УДК 536.75

СТАЦИОНАРНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФЛУКТУАЦИЙ СКОРОСТИ БРОУНОВСКОЙ ЧАСТИЦЫ В СРЕДЕ С ФЛУКТУИРУЮЩИМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ВЯЗКОГО ТРЕНИЯ

А.Н. Морозов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: amor59@mail.ru

Описано броуновское движение в среде с флуктуирующим коэффициентом вязкого трения. Рассчитана стационарная функция распределения флуктуаций скорости броуновской частицы для случая гауссовых случайных изменений коэффициента вязкого трения. Показано, что эта функция в предельных случаях совпадает с функциями распределения Коши и Максвелла. Выведено уравнение для характеристической функции флуктуаций скорости броуновской частицы при воздействии пуассоновского случайного процесса и найдено его решение для стационарного случая. В первом приближении определена функция распределения флуктуаций скорости броуновской частицы, а также ее первые четыре момента и кумулянта. Вычислена асимметрия и эксцесс функции распределения. Установлена зависимость меры Кульбака от интенсивности пуассоновского процесса и эксцесса функции распределения. Предложено определять интенсивность пуассоновского процесса по результатам долговременных измерений флуктуаций тока в малых объемах электролита.

Ключевые слова: броуновское движение, флуктуации скорости, винеровский процесс, пуассоновский процесс, функция распределения, характеристическая функция, вязкое трение.

STATIONARY FLUCTUATIONS DISTRIBUTIONS OF BROWNIAN PARTICLE VELOCITY IN A MEDIUM WITH FLUCTUATING VISCOUS FRICTION COEFFICIENT

A.N. Morozov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: amor59@mail.ru

Brownian motion in the medium with the fluctuating viscous friction coefficient is described. Stationary function of fluctuations distribution of a Brownian particle velocity for a case of Gaussian random variations of a viscous friction coefficient is calculated. It is shown that this function in limiting cases coincides with Cauchy and Maxwell distribution functions. The author deduced the equation for characteristic function of velocity fluctuations of a Brownian particle on exposure to Poisson random process, and also the solution of this equation for a stationary case was found. The distribution function of fluctuations of a Brownian particle velocity and also its first four moments and cumulant were defined at first approximation. Asymmetry and kurtosis of distribution function is calculated. The author established the Kullback's measure dependence on Poisson process intensity and distribution function kurtosis. It is proposed to define Poisson process intensity by results of long-term measurements of current fluctuations in small volumes of electrolyte.

Keywords: Brownian motion, velocity fluctuations, Wiener process, Poisson process, distribution function, characteristic function, viscous friction.

Традиционное описание броуновского движения основано на использовании уравнения Ланжевена для скорости броуновской частицы и получении на его основе уравнения Фоккера – Планка для функции распределения флуктуаций указанной скорости [1, 2]. Такой подход позволяет достаточно адекватно описывать флуктуации скорости в первом приближении, в том числе и для случаев, напрямую не связанных с описанием броуновского движения [3], но не позволяет учесть флуктуации коэффициента вязкого трения [4, 5]. Эти флуктуации могут быть учтены при использовании теории немарковских процессов [6, 7], в частности с применением линейных интегральных преобразований [8, 9].

Одной из задач описания броуновского движения в среде с флуктуирующим коэффициентом вязкого трения является разработка теории, с помощью которой можно определять функцию распределения флуктуаций скорости движения броуновской частицы (в общем случае может отличаться от распределения Максвелла) [10]. В настоящей работе определена функция распределения скоростей броуновской частицы в стационарном случае для модели флуктуирующего коэффициента вязкого трения, описываемого δ-коррелированным гауссовым случайным процессом.

Еще одним модельным ограничением, обычно используемым в теории броуновского движения, является предположение о воздействии на частицу силы Ланжевена, описываемой как производная винеровского процесса [11, 12]. Для учета особенностей взаимодействия броуновской частицы и частиц окружающей среды можно воспользоваться предположением о независимости соударений указанных частиц. Тогда при микроскопическом описании воздействия частиц среды на броуновскую частицу необходимо принять, что случайная сила представляет собой пуассоновский случайный процесс со скачками, имеющими нормальное распределение [13, 14].

Далее в настоящей работе будут найдены стационарные характеристические функции скорости броуновской частицы при различных способах задания силы Ланжевена в уравнении ее движения.

Рассмотрим броуновское движение частицы, когда флуктуации коэффициента вязкого трения $\delta\gamma(t)$ описываются δ-коррелированным гауссовым случайным процессом. В этом случае уравнение для одномерного движения броуновской частицы может быть записано в виде

$$m\frac{dV}{dt} + m\gamma(t)\,V = F(t) + \xi(t)\,, \tag{1}$$

где m — масса броуновской частицы; V — скорость этой частицы; $\gamma(t) = \gamma_0 + \delta\gamma(t)$ — коэффициент вязкого трения, который представляет собой сумму постоянной γ_0 и флуктуирующей $\delta\gamma(t)$ величин;

$F(t)$ — внешняя детерминированная сила; $\xi(t)$ — δ-коррелированный гауссовый случайный процесс, описывающий силу Ланжевена [1]. Предположим, что средние значения случайных процессов $\delta\gamma(t)$ и $\xi(t)$ равны нулю:

$$\langle\delta\gamma(t)\rangle = 0; \langle\xi(t)\rangle = 0,$$

а их корреляционные функции составляют

$$\langle\delta\gamma(t_2)\,\delta\gamma(t_1)\rangle = 2\alpha\delta(t_2 - t_1);$$

$$\langle\xi(t_2)\,\xi(t_1)\rangle = 2m\gamma_0 kT\delta(t_2 - t_1);$$

$$\langle\delta\gamma(t_2)\,\xi(t_1)\rangle = 0.$$

Здесь k — постоянная Больцмана; T — абсолютная температура среды.

Представим уравнение (1) в следующем виде:

$$\frac{dV}{dt} = \left(\frac{F}{m} - \gamma_0 V\right) + \frac{1}{m}\xi(t) - \delta\gamma(t)\,V.$$

В соответствии с работой [11] можно записать уравнение Фоккера — Планка для функции распределения $f(V,t)$:

$$\frac{\partial f(V,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial V}\left(\left(\frac{F}{m} - \gamma_0 V\right) f(V,t)\right) + \\ + \frac{\partial^2}{\partial V^2}\left(\left(\frac{\gamma_0 kT}{m} + \alpha V^2\right) f(V,t)\right). \quad (2)$$

Определим стационарное распределение для скорости броуновской частицы V. Уравнение Фоккера – Планка для стационарной функции распределения $f(V)$ при $F(t) = F_0 = \mathrm{const}$ принимает вид (см. (2))

$$\frac{d}{dV}\left(\left(\frac{F_0}{m} - \gamma_0 V\right) f(V)\right) - \frac{d^2}{dV^2}\left(\left(\frac{\gamma_0 kT}{m} + \alpha V^2\right) f(V)\right) = 0. \quad (3)$$

После интегрирования уравнение (3) может быть записано так:

$$\frac{d}{dv}\left(\left(\frac{\gamma_0 kT}{m} + \alpha V^2\right) f(V)\right) = \left(\frac{F_0}{m} - \gamma_0 V\right) f(V), \quad (4)$$

где константа интегрирования принята равной нулю.

Представим уравнение (4) в виде

$$\left(A_1 + A_2 V^2\right)\frac{df(V)}{dV} = -(BV - F_m)\, f(V), \quad (5)$$

где $A_1 = \dfrac{\gamma_0 kT}{m}$; $A_2 = \alpha$; $B = \gamma_0 + 2\alpha$; $F_m = \dfrac{F_0}{m}$. Тогда дифференциальное уравнение (5) можно записать в форме

$$\frac{df}{f} = -\frac{BV - F_m}{A_1 + A_2 V^2} dV. \quad (6)$$

Интегрирование выражения (6) дает следующее [15]:

$$f(V) = G \exp\left(-\frac{B}{2A_2}\ln\left(A_1 + A_2V^2\right)\right) \times$$

$$\times \exp\left(\frac{F_m}{\sqrt{A_1A_2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{A_2}{A_1}}V\right)\right), \quad (7)$$

где G — константа интегрирования, определяемая из условия нормировки функции распределения $f(V)$. Выражение (7) можно преобразовать к виду

$$f(V) = \frac{G}{\left(A_1 + A_2V^2\right)^{\beta}} \exp\left(\frac{F_m}{\sqrt{A_1A_2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{A_2}{A_1}}V\right)\right), \quad (8)$$

или

$$f(V) = \frac{Gm^{\beta}}{\left(\gamma_0kT + \alpha mV^2\right)^{\beta}} \exp\left(\frac{F_0}{\sqrt{\alpha\gamma_0mkT}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{\alpha m}{\gamma_0kT}}V\right)\right).$$

Здесь

$$\beta = \frac{B}{2A_2} = 1 + \frac{\gamma_0}{2\alpha}.$$

Рассмотрим частные случаи. Если внешняя детерминированная сила отсутствует ($F_0 = 0$), то функция распределения (8) принимает вид

$$f(V) = \frac{G}{\left(A_1 + A_2V^2\right)^{\beta}}. \quad (9)$$

Используя условие нормировки функции распределения $f(V)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(V)\,dV = 1,$$

определяем константу G [15, 16]:

$$G^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(A_1 + A_2V^2\right)^{\beta}}dV = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\beta - 1/2)}{\Gamma(\beta)}\sqrt{\frac{A_1}{A_2}}\frac{1}{A_1^{\beta}},$$

где $\Gamma(\beta)$ — гамма-функция.

С учетом этого функция распределения (9) примет вид

$$f(V) = \frac{\Gamma(\beta)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\beta - 1/2)}\sqrt{\frac{A_2}{A_1}}\frac{A_1^{\beta}}{\left(A_1 + A_2V^2\right)^{\beta}},$$

или

$$f(V) = \frac{\Gamma(\beta)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\beta - 1/2)}\sqrt{\frac{\alpha m}{\gamma_0kT}}\frac{(\gamma_0kT)^{\beta}}{\left(\gamma_0kT + \alpha mV^2\right)^{\beta}}. \quad (10)$$

Если ввести обозначение $\beta = 1 + \delta$, где $\delta = \gamma_0/(2\alpha)$, и принять $\delta \ll 1$, то выражение (10) можно представить в виде распределения Коши [11]:

$$f(V) = \frac{1 - C\delta}{\pi(1 - (C + 2\ln 2))}\sqrt{\frac{\alpha m}{\gamma_0 kT}}\frac{(\gamma_0 kT)^{1+\delta}}{(\gamma_0 kT + \alpha m V^2)^{1+\delta}}\Bigg|_{\delta \ll 1}. \quad (11)$$

Здесь $C = 0{,}577$ — постоянная Эйлера и учтены асимптотики гамма-функции [16].

Если $\alpha = 0$, то $A_2 = 0$, а $\beta \to \infty$. В этом случае функция распределения (10) принимает вид распределения Максвелла:

$$f(V) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\exp\left(-\frac{mV^2}{2kT}\right). \quad (12)$$

Формулу (12) можно получить путем решения уравнения (4) при $\alpha = 0$ и $F_0 = 0$. Таким образом, соотношение между параметрами γ_0 и α определяет вид функции распределения. При $\gamma_0 \ll \alpha$ функция распределения близка к распределению Коши (11), а при $\gamma_0 \gg \alpha$ — к распределению Максвелла (12).

Если $\beta > 5/2$ ($\gamma_0 > 3\alpha$), то формула (10) позволяет определить кумулянты второго и четвертого порядка флуктуаций скорости броуновской частицы [15]:

$$k_2 = \langle V^2 \rangle = \frac{\Gamma(\beta)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\beta - 1/2)}\sqrt{\frac{\alpha m}{\gamma_0 kT}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{V^2}{\left(1 + \dfrac{\alpha m}{\gamma_0 kT}V^2\right)^{\beta}}dV = \frac{\gamma_0}{\gamma_0 - \alpha}\frac{kT}{m}; \quad (13)$$

$$k_4 = \langle V^4 \rangle = \frac{\Gamma(\beta)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\beta - 1/2)}\sqrt{\frac{\alpha m}{\gamma_0 kT}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{V^4}{\left(1 + \dfrac{\alpha m}{\gamma_0 kT}V^2\right)^{\beta}}dV = \frac{3\gamma_0^2}{(\gamma_0 - \alpha)(\gamma_0 - 3\alpha)}\left(\frac{kT}{m}\right)^2. \quad (14)$$

Формулы (13) и (14) дают возможность рассчитать эксцесс функции распределения

$$\kappa_4 = \frac{k_4 - 3k_2^2}{k_2^2} = \frac{6\alpha}{\gamma_0 - 3\alpha}.$$

При $\alpha \to 0$ эксцесс также стремится к нулю ($\kappa_4 \to 0$), что соответствует стремлению функции распределения (10) в указанном предельном случае к распределению Максвелла (12).

Полученное выше выражение для функции распределения флуктуаций скорости броуновской частицы в среде с флуктуирующим коэффициентом вязкого трения позволяет путем экспериментального определения отличия функции распределения скоростей броуновской частицы от функции распределения Максвелла устанавливать характеристики флуктуаций коэффициента вязкого трения. Критерием отличия может стать мера Кульбака, метод экспериментального определения которой предложен в работе [17].

Еще один метод описания флуктуаций коэффициента вязкого трения — использование модели, в которой предполагается, что на броуновскую частицу воздействует случайная сила, описывающаяся пуассоновским процессом. Представим уравнение (1) в виде дифференциального уравнения Ито [11]:

$$dV = F_m(t)\,dt - V\,dW_\gamma(t) + dW_\xi(t)\,, \tag{15}$$

где $W_\gamma(t)$ и $W_\xi(t)$ — процессы с независимыми приращениями.

Далее примем, что процесс $W_\gamma(t)$, описывающий флуктуации коэффициента вязкого трения, представляет собой пуассоновский процесс с единичными приращениями [11], характеристическая функция которого имеет вид

$$g_\gamma(\mu_\gamma, t) = \exp\left[\left(\exp\left(iD_\gamma\mu_\gamma\right) - 1\right)\nu_\tau t\right], \tag{16}$$

где $D_\gamma = \gamma_0\tau_0$ — дисперсия пуассоновского процесса $W_\gamma(t)$; ν_τ — интенсивность этого процесса. Постоянная времени $\tau_0 = 1/\nu_\tau$ характеризует среднее время между очередными соударениями частиц среды с броуновской частицей.

Процесс $W_\xi(t)$ описывает случайные воздействия частиц среды на броуновскую частицу и в общем случае представляет собой обобщенный пуассоновский процесс, задаваемый характеристической функцией [11]:

$$g_\xi(\mu_\xi, t) = \exp\left[\left(\exp\left(-\frac{1}{2}D_\xi\mu_\xi^2\right) - 1\right)\nu_\tau t\right], \tag{17}$$

где $D_\xi = \dfrac{2\gamma_0}{\nu_\tau}\dfrac{kT}{m}$ — дисперсия пуассоновского процесса $W_\xi(t)$, характеризующая воздействие частицы среды на броуновскую частицу при единичном соударении.

В традиционном описании полагается, что процесс $W_\xi(t)$ представляет собой винеровский случайный процесс с характеристической функцией

$$g_\xi(\mu_\xi; t) = \exp\left(-\frac{\gamma_0 kT}{m}\mu_\xi^2 t\right). \tag{18}$$

Формула (18) является первым приближением при разложении в ряд экспоненты $\exp\left(-\frac{1}{2}D_\xi \mu_\xi^2\right)$ в выражении (17).

В общем случае уравнение для характеристической функции $g(\lambda;t)$, описывающей флуктуации скорости броуновской частицы (см. (15)), имеет вид

$$\frac{\partial g(\lambda;t)}{\partial t} = i\lambda F_m(t)\, g(\lambda;t) + \frac{\nu_\tau}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Bigg[(\exp(-iD_\gamma \lambda V) - 1) + \\ + \left(\exp\left(-\frac{1}{2}D_\xi \lambda^2\right) - 1\right)\Bigg] \mathrm{e}^{i(\lambda-\mu)V} g(\mu;t)\, d\mu dV. \quad (19)$$

При выводе формулы (19) учтены выражения (16) и (17) для характеристических функций процессов $W_\gamma(t)$ и $W_\xi(t)$.

Нахождение интегралов в формуле (19) позволяет получить уравнение для характеристической функции $g(\lambda;t)$:

$$\frac{\partial g(\lambda;t)}{\partial t} = i\lambda F_m(t)\, g(\lambda;t) + \nu_\tau\left(g\left((1-D_\gamma)\lambda;t\right) - g(\lambda;t)\right) + \\ + \nu_\tau\left(\exp\left(-\frac{1}{2}D_\xi \lambda^2\right) - 1\right) g(\lambda;t). \quad (20)$$

Разложив в ряд функцию $g((1-D_\gamma)\lambda;t)$ при $D_\gamma \ll 1$ и сохранив только первые три члена, запишем

$$g((1-D_\gamma)\lambda;t) = g(\lambda;t) - D_\gamma \lambda \frac{\partial g(\lambda;t)}{\partial \lambda} + \frac{1}{2}D_\gamma^2 \lambda^2 \frac{\partial^2 g(\lambda;t)}{\partial \lambda^2}. \quad (21)$$

С учетом формулы (21) в этом приближении уравнение (20) принимает вид

$$\frac{\partial g(\lambda;t)}{\partial t} = i\lambda F_m(t)\, g(\lambda;t) + \nu_\tau\left(-D_\gamma \lambda \frac{\partial g(\lambda;t)}{\partial \lambda} + \frac{1}{2}D_\gamma^2 \lambda^2 \frac{\partial^2 g(\lambda;t)}{\partial \lambda^2}\right) + \\ + \nu_\tau\left(\exp\left(-\frac{1}{2}D_\xi \lambda^2\right) - 1\right) g(\lambda;t). \quad (22)$$

Далее будем полагать детерминированную силу постоянной: $F_m(t) = F_0/m =$ const. Тогда можно записать уравнение (22) для стационарного случая, когда $\dfrac{\partial g(\lambda;t)}{\partial t} = 0$:

$$i\lambda \frac{F_0}{m} g(\lambda) + \nu_\tau\left(-D_\gamma \lambda \frac{dg(\lambda)}{d\lambda} + \frac{1}{2}D_\gamma^2 \lambda^2 \frac{d^2 g(\lambda)}{d\lambda^2}\right) + \\ + \nu_\tau\left(\exp\left(-\frac{1}{2}D_\xi \lambda^2\right) - 1\right) g(\lambda) = 0. \quad (23)$$

Пренебрегая последним членом в разложении (21), представим уравнение (23) в виде

$$\nu_\tau D_\gamma \lambda \frac{dg(\lambda)}{d\lambda} = i\lambda \frac{F_0}{m} g(\lambda) + \nu_\tau \left(\exp\left(-\frac{1}{2} D_\xi \lambda^2 \right) - 1 \right) g(\lambda),$$

или

$$\frac{dg(\lambda)}{d\lambda} = i \frac{F_0}{\nu_\tau D_\gamma m} g(\lambda) + \frac{1}{D_\gamma \lambda} \exp\left(-\frac{1}{2} D_\xi \lambda^2 \right) g(\lambda) - \frac{1}{D_\gamma \lambda} g(\lambda). \quad (24)$$

Решение уравнения (24) имеет вид [15]

$$g(\lambda) =$$
$$= \exp\left[i \frac{F_0}{\nu_\tau D_\gamma m} \lambda + \frac{1}{2D_\gamma} \mathrm{Ei}\left(-\frac{1}{2} D_\xi \lambda^2 \right) - \frac{1}{D_\gamma} \ln\left(\sqrt{\frac{1}{2} D_\xi} \lambda \right) - \frac{1}{2D_\gamma} C \right],$$

или с учетом введенных обозначений

$$g(\lambda) = \exp\left[i \frac{F_0}{\gamma_0 m} \lambda + \frac{\nu_\tau}{2\gamma_0} \mathrm{Ei}\left(-\frac{\gamma_0 kT}{\nu_\tau m} \lambda^2 \right) - \right.$$
$$\left. - \frac{\nu_\tau}{\gamma_0} \ln\left(\sqrt{\frac{\gamma_0 kT}{\nu_\tau m}} \lambda \right) - \frac{\nu_\tau}{2\gamma_0} C \right], \quad (25)$$

где $\mathrm{Ei}(z)$ — интегральная показательная функция. Разложение интегральной показательной функции $\mathrm{Ei}(z)$] в ряд позволяет представить решение (25) следующим образом [16]:

$$g(\lambda) = \exp\left[i \frac{F_0}{\gamma_0 m} \lambda + \frac{\nu_\tau}{2\gamma_0} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\gamma_0 kT}{\nu_\tau m} \right)^n \frac{\lambda^{2n}}{n \cdot n!} \right]. \quad (26)$$

Сохраняя только первый член суммы в формуле (26), в первом приближении имеем

$$g(\lambda) = \exp\left(i \frac{F_0}{\gamma_0 m} \lambda - \frac{kT}{2m} \lambda^2 \right).$$

Обратное преобразование Фурье позволяет определить функцию распределения скорости броуновской частицы

$$f(V) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \exp\left[-\frac{m \left(V - F_0 / (\gamma_0 m) \right)^2}{2kT} \right]. \quad (27)$$

Проанализируем решение (26) при сохранении двух первых членов ряда в сумме под экспонентой

$$g(\lambda) = \exp\left[i \frac{F_0}{\gamma_0 m} \lambda - \frac{kT}{2m} \lambda^2 + \frac{\nu_\tau}{8\gamma_0} \frac{k^2 T^2}{m^2} \lambda^4 \right]. \quad (28)$$

Тогда можно найти первые четыре момента функции распределения скорости броуновской частицы

$$D_1 = \left.\frac{\partial g(\lambda)}{i\partial\lambda}\right|_{\lambda=0} = \frac{F_0}{\gamma_0 m};$$

$$D_2 = \left.\frac{\partial^2 g(\lambda)}{(i\partial\lambda)^2}\right|_{\lambda=0} = \frac{kT}{m} + \left(\frac{F_0}{\gamma_0 m}\right)^2;$$

$$D_3 = \left.\frac{\partial^3 g(\lambda)}{(i\partial\lambda)^3}\right|_{\lambda=0} = 3\frac{kT}{m^2}\frac{F_0}{\gamma_0} + \left(\frac{F_0}{\gamma_0 m}\right)^3;$$

$$D_4 = \left.\frac{\partial^4 g(\lambda)}{(i\partial\lambda)^4}\right|_{\lambda=0} = 3\frac{\gamma_0}{\nu_\tau}\frac{k^2T^2}{m^2} + 3\frac{k^2T^2}{m^2} + 6\frac{kT}{m}\left(\frac{F_0}{\gamma_0 m}\right)^2 + \left(\frac{F_0}{\gamma_0 m}\right)^4,$$

с помощью которых можно получить первые четыре кумулянта [10]

$$k_1 = D_1 = \frac{F_0}{\gamma_0 m}; \tag{29}$$

$$k_2 = D_2 - D_1^2 = \frac{kT}{m}; \tag{30}$$

$$k_3 = D_3 - 3D_2D_1 + 2D_1^3 = 0; \tag{31}$$

$$k_4 = D_4 - 4D_3D_1 + 6D_2D_1^2 - 3D_1^4 = 3\frac{\gamma_0}{\nu_\tau}\frac{k^2T^2}{m^2} + 3\frac{k^2T^2}{m^2}. \tag{32}$$

Кумулянты (29)–(32) дают возможность вычислить асимметрию функции распределения

$$\kappa_3 = \frac{k_3}{k_2^{3/2}} = 0$$

и ее эксцесс

$$\kappa_4 = \frac{k_4 - 3k_2^2}{k_2^2} = 3\frac{\gamma_0}{\nu_\tau}. \tag{33}$$

Из выражения (28) следует, что экспериментальное определение эксцесса функции распределения флуктуаций скорости броуновской частицы позволяет определить интенсивность пуассоновского процесса ν_τ, описывающего взаимодействие частиц среды с броуновской частицей.

Если $F_0 = 0$, то выражение (33) принимает вид

$$g(\lambda) = \exp\left[-\frac{kT}{2m}\lambda^2 + \frac{\nu_\tau}{8\gamma_0}\frac{k^2T^2}{m^2}\lambda^4\right],$$

или, полагая второе слагаемое малым, в первом приближении

$$g(\lambda) = \left(1 + \frac{\nu_\tau}{8\gamma_0}\frac{k^2T^2}{m^2}\lambda^4\right)\exp\left(-\frac{kT}{2m}\lambda^2\right). \tag{34}$$

Характеристическая функция (34) позволяет с помощью обратного преобразования Фурье определить функцию распределения для скорости броуновской частицы

$$f\left(V\right)=\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\left(1+\frac{3\gamma_0}{8\nu_\tau}-\frac{3\gamma_0}{8\nu_\tau}\frac{mV^2}{kT}+\frac{\gamma_0}{8\nu_\tau}\frac{m^2V^4}{k^2T^2}\right)\times \\ \times\exp\left[-\frac{mV^2}{2kT}\right], \quad (35)$$

которая при $\nu_\tau\to\infty$ совпадает с выражением (27) в случае отсутствия внешней детерминированной силы ($F_0=0$).

С помощью функции распределения (35) можно вычислить меру Кульбака [18, 19]

$$H=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(V\right)\ln\left(\frac{f\left(V\right)}{f_0\left(V\right)}\right)dV, \quad (36)$$

где $f_0\left(V\right)$ — равновесное распределение флуктуаций скорости броуновской частицы,

$$f_0\left(V\right)=\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\exp\left[-\frac{mV^2}{2kT}\right]. \quad (37)$$

После подстановки выражений (35) и (37) в интеграл (36) и проведения необходимых вычислений получим

$$H=\frac{3}{16}\frac{\gamma_0}{\nu_\tau}, \quad (38)$$

или с учетом (33)

$$H=\frac{\kappa_4}{16}. \quad (39)$$

Согласно формуле (39), в первом приближении мера Кульбака и эксцесс связаны простым соотношением. Формула (38) для определения меры Кульбака через коэффициент вязкого трения γ_0 и интенсивность пуассоновского процесса ν_τ позволяет проводить оценку указанных величин по результатам долговременных измерений меры Кульбака флуктуаций тока в малых объемах электролита [17].

В заключение рассмотрим случай решения уравнения (23) при $F_0=0$ и сохранении только первого значащего слагаемого в разложении экспоненты $\exp\left(-\frac{1}{2}D_\xi\mu_\xi^2\right)$ в последнем слагаемом этой формулы. Тогда уравнение (23) преобразуется к виду

$$\lambda\frac{d^2g\left(\lambda\right)}{d\lambda^2}-\frac{\nu_\tau}{2\gamma_0}\frac{dg\left(\lambda\right)}{d\lambda}-\frac{2\nu_\tau kT}{\gamma_0 m}g\left(\lambda\right)=0. \quad (40)$$

Решение уравнения (40) имеет вид [20]

$$g(\lambda) = \lambda^{a+1/2} Z_{a+1/2}\left(i\sqrt{b}\lambda\right),$$

где $a = \dfrac{\gamma_0}{\nu_\tau}$; $b = \dfrac{2\nu_\tau kT}{\gamma_0 m}$; $Z_{a+1/2}\left(i\sqrt{b}\lambda\right)$ — цилиндрическая функция [16].

Следовательно, проведенное в настоящей работе описание броуновского движения в среде с флуктуирующим коэффициентом вязкого трения позволило определить стационарные функции распределения и характеристические функции флуктуаций скорости броуновской частицы. Полученные выражения для таких статистических параметров флуктуаций скорости броуновской частицы, как кумулянты, асимметрия, эксцесс и мера Кульбака, позволяют предложить способ экспериментального измерения интенсивности пуассоновского процесса, описывающего процесс взаимодействия частиц среды с броуновской частицей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Климонтович Ю.Л.* Статистическая физика. М.: Наука, 1982. 608 с.
2. *Морозов А.Н.* Необратимые процессы и броуновское движение. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. 332 с.
3. *Марков Ю.Г.*, *Синицын И.Н.* Одно- и многомерные распределения флуктуаций неравномерности вращения Земли // ДАН. 2009. Т. 428. № 5. С. 616–619.
4. *Бочков Г.Н.*, *Кузовлев Ю.Е.* Новое в исследованиях $1/f$-шума // Успехи физических наук. 1983. Т. 141. Вып. 1. С. 151–176.
5. *Морозов А.Н.* Применение теории немарковских процессов при описании броуновского движения // ЖЭТФ. 1996. Т. 109. Вып. 4. С. 1304–1315.
6. *Морозов А.Н.* Метод описания немарковских процессов, задаваемых линейным интегральным преобразованием // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2004. № 3. С. 47–56.
7. *Морозов А.Н.*, *Скрипкин А.В.* Применение интегральных преобразований для описания броуновского движения как немарковского случайного процесса // Изв. вузов. Физика. 2009. Т. 52. № 2. С. 66–74.
8. *Morozov A.N.*, *Skripkin A.V.* Spherical particle Brownian motion in viscous medium as non-Markovian random process // Physics Letters A. 2011. Vol. 375. No. 46. P. 4113–4115.
9. *Lisy V.*, *Tothova J.*, *Glod L.* On the correlation properties of thermal noise in fluids // International Journal of Thermophysics. 2013. Vol. 34. I. 4. P. 629–641.
10. *Малахов А.Н.* Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. М.: Советское радио, 1978. 370 с.
11. *Пугачев В.С.*, *Синицын И.Н.* Стохастические дифференциальные системы. М.: Наука, 1990. 632 с.
12. *Стратонович Р.Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Советское радио, 1961. 321 с.
13. *Морозов А.Н.* Описание диффузии и броуновского движения как пуассоновских случайных процессов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 1999. № 2. С. 85–90.

14. *Бункин Н.Ф.*, *Морозов А.Н.* Стохастические системы в физике и технике. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 366 с.
15. *Прудников А.П.*, *Брычков Ю.А.*, *Маричев О.И.* Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 800 с.
16. *Никифоров А.Ф.*, *Уваров В.Б.* Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1984. 344 с.
17. *Морозов А.Н.* Предварительные результаты измерений меры Кульбака флуктуаций напряжения на электролитической ячейке // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2011. № 2. С. 16–24.
18. *Кульбак С.* Теория информации и статистика. М.: Наука, 1967. 408 с.
19. *Зарипов Р.Г.* Новые меры и методы в теории информации. Казань: Изд-во Казан. гос. тех. ун-та, 2005. 364 с.
20. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.

REFERENCES

[1] Klimontovich Yu.L. Statisticheskaya fizika [Statistical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1982. 608 p.

[2] Morozov A.N. Neobratimye protsessy i brounovskoe dvizhenie [Irreversible processes and Brownian motion]. Moscow, MGTU im. N.E. Baumana Publ., 1997. 332 p.

[3] Markov Yu.G., Sinitsyn I.N. Single- and multivariate distributions of irregularity fluctuations of the Earth rotation. Dokl. RAN [Proc. Russ. Acad. Sci.], 2009, vol. 428, no. 5, pp. 616–619 (in Russ.).

[4] Bochkov G.N., Kuzovlev Yu.E. The new in 1/f-noise researches. *Uspekhi fizicheskikh nauk* [Physics-Uspekhi], 1983, vol. 141, iss. 1, pp. 151–176 (in Russ.).

[5] Morozov A.N. Theory applications of non-Markovian processes in describing of Brownian motion. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* [J. Exp. Theor. Phys.], vol. 109, iss. 4. pp. 1304–1315 (in Russ.).

[6] Morozov A.N. The definition method of non-Markovian processes determined by linear integral transformation. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2004, no. 3, pp. 47–56 (in Russ.).

[7] Morozov A.N., Skripkin A.V. Application of integral transformations for Brownian motion definition as non-Markovian random process *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Fizika.* [Proc. Univ., Physics], 2009, vol. 52, no. 2, pp. 66–74 (in Russ.).

[8] Morozov A.N., Skripkin A.V. Spherical particle Brownian motion in viscous medium as non-Markovian random process. *Physics Letters A.*, 2011, vol. 375, no. 46. pp. 4113–4115.

[9] Lisy V., Tothova J., Glod L. On the correlation properties of thermal noise in fluids. *Int. J. of Thermophysics*, 2013, vol. 34, iss. 4, pp. 629–641.

[10] Malakhov A.N. Kumulyantnyy analiz sluchaynykh negaussovykh protsessov i ikh preobrazovaniy [Cumulant analysis of random non-Gaussian processes and their transformations]. Moscow, Sovetskoe radio Publ., 1978. 370 p.

[11] Pugachev V.S., Sinitsyn I.N. Stokhasticheskie differentsial'nye sistemy [Stochastic differential systems]. Moscow, Nauka Publ., 1990. 632 p.

[12] Stratonovich R.L. Izbrannye voprosy teorii fluktuatsiy v radiotekhnike [Selected problems in the theory of fluctuations in radio engineering]. Moscow, Sovetskoe radio Publ., 1963. 321 c.

[13] Morozov A.N. The definition of diffusion and Brownian motion as Poisson random process. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 1999, no. 2, pp. 85–90 (in Russ.).

[14] Bunkin N.F., Morozov A.N. Stokhasticheskie sistemy v fizike i tekhnike. [Stochastic systems in Physics and Engineering]. Moscow, MGTU im. N.E. Baumana Publ., 2011. 366 p.

[15] Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. Integraly i ryady [Integrals and Series]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 800 p.

[16] Nikiforov A.F., Uvarov V.B. Spetsial'nye funktsii matematicheskoy fiziki. Specific functions of Mathematical Physics Moscow, Nauka Publ., 1984. 344 p.

[17] Morozov A.N. Preliminary results of mensuration of Kullback's measure of voltage fluctuations on electrolytic cell. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2011, no. 2, pp. 16–24 (in Russ.). M.: Наука, 1967. 408 с.

[18] Kullback S. Information Theory and Statistics. N. Y., Wiley & Sons, 1959. 359 p. (Russ. Ed.: Kul'bak S. Teoriya informatsii i statistika. Moscow, Nauka Publ., 1967. 408 p.).

[19] Zaripov R.G. Novye mery i metody v teorii informatsii. [New measure and technics in Information theory]. Kazan', Kazan. Gos. Tekh. Unst. Publ., 2005. 364 p.

[20] Kamke E. Differentialgleichungen: Löosungsmethoden und Löosungen. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1967. (Russ. ed.: Kamke E. Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniyam. Per. s nem. 4-e izd., ispr. [Handbook on ordinary differential equations]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 388 p.)

Статья поступила в редакцию 17.02.2014

Андрей Николаевич Морозов — д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой “Физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 200 научных работ в области прецизионных измерений и физической кинетики.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

A.N. Morozov — Dr. Sci. (Phys.-Math.), professor, head of "Physics" department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 200 publications in the field of high precision measuring systems and physical kinetics.

Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.