УДК 519.21+531.19

СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЧАСТИЦ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ КОМПЛЕКСАМИ

А.В. Калинкин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: kalinkin@bmstu.ru

Рассмотрена стохастическая система из n частиц различных типов $T_1, \ldots, T_n$, взаимодействующих комплексами. Состояние системы описано как n-мерный вектор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ из множества N^n векторов с целыми неотрицательными компонентами. Такой вектор интерпретирован как группа S_α, состоящая из α_1 частиц типа T_1, ..., α_n частиц типа T_n. Приведены достаточные условия замкнутости класса состояний, достижимых из состояния α, а также необходимые и достаточные условия конечности замкнутого класса состояний. Получено выражение для стационарного распределения марковского процесса в замкнутом классе и рассмотрены некоторые частные случаи — биномиальное и пуассоновское распределение. Установлена связь найденного стационарного распределения с микроканоническим и каноническим распределениями, известными в равновесной статистической физике.

***Ключевые слова*:** марковский процесс, дискретные состояния, стационарное распределение, взаимодействие частиц.

STATIONARY DISTRIBUTION FOR A STOCHASTIC SYSTEM OF COMPLEXES INTERACTING PARTICLES

A.V. Kalinkin

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: kalinkin@bmstu.ru

A stochastic system of particles of n different kinds $T_1, \ldots, T_n$ interacting as complexes is considered. A state of the system is a n-dimensional vector $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ of N^n vector set with nonnegative integer components. This means that there is a group S_α consisting of α_1 particles of the kind T_1,..., and α_n particles of the kind T_n. Sufficient conditions are given for the closed class of states which are achievable from a given state α. Necessary and sufficient conditions are given for a finite closed class of states. A stationary distribution of the Markov process for the closed class is derived and some particular cases — binomial and Poisson distributions are considered. Relation of the found stationary distribution and the microcanonical and canonical distributions has been established.

***Keywords*:** Markov process, discrete states, stationary distribution, particle interaction.

Марковская модель системы взаимодействующих частиц. На множестве состояний

$$N^n = \{\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),\ \alpha_i = 0, 1, 2, \ldots,\ i = 1, \ldots, n\}$$

рассмотрим однородный во времени марковский процесс [1]

$$\xi(t) = (\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t)), \qquad t \in [0, \infty),$$

с переходными вероятностями

$$P_{\alpha\beta}(t) = \mathbf{P}\{\xi(t) = \beta \mid \xi(0) = \alpha\}, \qquad \alpha, \beta \in N^n.$$

Плотности переходных вероятностей зададим следующим образом. Фиксируем множество векторов $A = \{\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^l \in N^n\}$ и матрицу $P = (p_j^i)_{i,j=1}^l$, для элементов которой выполнены условия $p_j^i \geqslant 0$, $\sum\limits_{j=1}^{l} p_j^i = 1$ и $p_i^i = 0$, $i, j = 1, \ldots, l$. Пусть при $\Delta t \to 0+$ переходные вероятности имеют вид ($\lambda_i > 0,\ i = 1, \ldots, l$)

$$\begin{aligned} P_{\alpha\beta}(\Delta t) &= \sum_{\substack{i,j\,:\,\alpha-\varepsilon^i \geqslant 0,\\ \beta=\alpha-\varepsilon^i+\varepsilon^j}} \lambda_i \alpha_1^{[\varepsilon_1^i]} \ldots \alpha_n^{[\varepsilon_n^i]} p_j^i \Delta t + o(\Delta t) \quad (\alpha \neq \beta); \\ P_{\alpha\alpha}(\Delta t) &= 1 - \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \alpha_1^{[\varepsilon_1^i]} \ldots \alpha_n^{[\varepsilon_n^i]} \Delta t + o(\Delta t), \end{aligned} \tag{1}$$

где $\alpha_1^{[\varepsilon_1^i]} \ldots \alpha_n^{[\varepsilon_n^i]} = \prod\limits_{j=1}^{n} \alpha_j(\alpha_j - 1) \ldots (\alpha_j - \varepsilon_j^i + 1)$. Далее для векторов $\alpha, \beta, \gamma \in N^n$ приняты обозначения: $\gamma = \alpha - \beta$, если $\gamma_1 = \alpha_1 - \beta_1,\ \ldots$, $\gamma_n = \alpha_n - \beta_n$; $\alpha \geqslant \beta$, если $\alpha_1 \geqslant \beta_1,\ \ldots,\ \alpha_n \geqslant \beta_n$, и т.п.; примем $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!$.

Введем многомерные производящие функции [1, 2] ($|s| \leqslant 1$)

$$F_\alpha(t; s) = \sum_{\beta \in N^n} P_{\alpha\beta}(t) s^\beta, \quad \alpha \in N^n;$$

$$h_i(s) = \sum_{j=1}^{l} p_j^i s^{\varepsilon^j}, \quad i = 1, \ldots, l,$$

где $s = (s_1, \ldots, s_n)$, $s^\alpha = s_1^{\alpha_1} \ldots s_n^{\alpha_n}$ и $|s| \leqslant 1$ означает, что $|s_1| \leqslant 1, \ldots, |s_n| \leqslant 1$.

Вторая (прямая) система дифференциальных уравнений Колмогорова для переходных вероятностей $P_{\alpha\beta}(t)$, $\beta \in N^n$, равносильна линейному уравнению в частных производных [3, 4] ($|s| \leqslant 1$)

$$\frac{\partial F_\alpha(t; s)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i (h_i(s) - s^{\varepsilon^i}) \frac{\partial^{\varepsilon^i} F_\alpha(t; s)}{\partial s^{\varepsilon^i}} \tag{2}$$

с начальным условием $F_\alpha(0; s) = s^\alpha$. Здесь $\dfrac{\partial^\varepsilon}{\partial s^\varepsilon} = \dfrac{\partial^{\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n}}{\partial s_1^{\varepsilon_1} \ldots \partial s_n^{\varepsilon_n}}$.

Марковский процесс $\xi(t)$ интерпретируется как стохастическая система из n частиц различных типов $T_1, \ldots, T_n$, взаимодействующих комплексами. Состояние системы характеризуется n-мерным вектором $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in N^n$, что означает наличие группы частиц

$S_\alpha = \alpha_1 T_1 + \ldots + \alpha_n T_n$ из α_1 частиц типа $T_1, \ldots, \alpha_n$ частиц типа T_n; $P_{\alpha\beta}(t)$, $\alpha, \beta \in N^n$ — вероятности того, что за промежуток времени $[0, t]$ начальная группа частиц S_α перейдет в группу частиц S_β. Векторам $\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^l$, принадлежащим множеству A, соответствуют комплексы взаимодействия частиц. Предположения (1) о плотностях переходных вероятностей означают, что за время Δt, $\Delta t \to 0$, для любой совокупности $S_{\varepsilon^i} = \varepsilon_1^i T_1 + \ldots + \varepsilon_n^i T_n$ ее частицы взаимодействуют с вероятностью $\lambda_i \Delta t + o\,(\Delta t)$, причем взаимодействие нескольких таких групп за время Δt может произойти лишь с вероятностью $o\,(\Delta t)$. В результате такого взаимодействия с вероятностью p_j^i вместо комплекса взаимодействующих частиц S_{ε^i} появляется новая совокупность частиц S_{ε^j} и группа частиц $S_\alpha = \alpha_1 T_1 + \ldots + \alpha_n T_n$ переходит в группу частиц $S_{\alpha - \varepsilon^i + \varepsilon^j} = (\alpha_1 - \varepsilon_1^i + \varepsilon_1^j) T_1 + \ldots + (\alpha_n - \varepsilon_n^i + \varepsilon_n^j) T_n$.

Описанному процессу взаимодействий и превращений частиц соответствует кинетическая схема [4–7]

$$\varepsilon_1^1 T_1 + \ldots + \varepsilon_n^1 T_n \to \varepsilon_1^1 T_1 + \ldots + \varepsilon_n^1 T_n, \ldots, \varepsilon_1^l T_1 + \ldots + \varepsilon_n^l T_n;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varepsilon_1^i T_1 + \ldots + \varepsilon_n^i T_n \to \varepsilon_1^1 T_1 + \ldots + \varepsilon_n^1 T_n, \ldots, \varepsilon_1^l T_1 + \ldots + \varepsilon_n^l T_n;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varepsilon_1^l T_1 + \ldots + \varepsilon_n^l T_n \to \varepsilon_1^1 T_1 + \ldots + \varepsilon_n^1 T_n, \ldots, \varepsilon_1^l T_1 + \ldots + \varepsilon_n^l T_n.$$

Предположения (1) означают, что за время Δt, $\Delta t \to 0$, вероятность взаимодействия комплекса частиц S_{ε^i} пропорциональна числу $C_{\alpha_1}^{\varepsilon_1^i}$ сочетаний ε_1^i частиц типа T_1 из имеющихся α_1 частиц типа $T_1, \ldots$, а также пропорциональна числу $C_{\alpha_n}^{\varepsilon_n^i}$ сочетаний ε_n^i частиц типа T_n из имеющихся α_n частиц типа T_n. Такие предположения дают возможность обосновать [5, 8] предельный переход при большом числе взаимодействующих частиц к системе дифференциальных уравнений закона действующих масс для кинетической схемы.

Переходные вероятности $\{P_{\alpha\beta}(t),\ \beta \in N^n\}$ определяют *α-частичную функцию распределения* [9]. Для марковских процессов рассматриваемого типа первая (обратная) система дифференциальных уравнений Колмогорова записывается в виде *цепочки уравнений* [4].

Задача о стационарных вероятностях. Пусть $P_{\alpha\beta}(t)$ — переходные вероятности однородного марковского процесса на множестве N^n с непрерывным временем t, $t \in [0, \infty)$. В общей теории процессов со счетным множеством состояний показано, что при выполнении некоторых условий [10] существуют пределы, называемые предельными вероятностями:

$$q_{\alpha\beta} = \lim_{t \to \infty} P_{\alpha\beta}(t), \quad \alpha, \beta \in N^n.$$

Предельные вероятности не обязательно составляют распределение вероятностей $\sum_{\beta \in N^n} q_{\alpha\beta} \leqslant 1$. Введем производящую функцию предельных вероятностей

$$f_\alpha(s) = \sum_{\beta \in N^n} q_{\alpha\beta} s^\beta, \quad \alpha \in N^n.$$

Функция $f_\alpha(s)$ является аналитической в области $|s| < 1$. Функция $f_\alpha(s)$ удовлетворяет стационарному второму уравнению Колмогорова, которое в случае рассматриваемого процесса $\xi(t)$ имеет вид [4] ($|s| \leqslant 1$)

$$\sum_{i=1}^{l} \lambda_i (h_i(s) - s^{\varepsilon^i}) \frac{\partial^{\varepsilon^i} f_\alpha(s)}{\partial s^{\varepsilon^i}} = 0. \qquad (3)$$

Задача вычисления стационарного распределения вероятностей для марковских процессов с дискретными состояниями хорошо известна и является одной из первых, рассмотренных в теории случайных процессов [1]. В настоящей работе нахождение стационарного распределения для марковского процесса сводится к определению решения линейного уравнения в частных производных (3). Такой способ нахождения стационарных вероятностей, основанный на рассмотрении стационарного второго уравнения для многомерной производящей функции переходных вероятностей, применялся для марковских ветвящихся процессов с несколькими типами частиц (теорема о предельном стационарном распределении для докритического ветвящегося процесса с иммиграцией [2]; теорема о предельном распределении в финальном классе ветвящегося процесса [2] и других марковских процессов на множестве N, N^2 [4].

В леммах 1 и 2 исследованы классы достижимых состояний для марковского процесса $\xi(t)$: даны достаточные условия замкнутости класса достижимых состояний, найдены необходимые и достаточные условия конечности такого класса. В теореме 1 для производящей функции стационарных вероятностей в замкнутом классе определено явное представление в виде конечной суммы или ряда, содержащее в качестве параметра решение вспомогательной алгебраической системы уравнений. Исследование алгебраической системы проведено в лемме 3.

Полученное в теореме 1 решение стационарного второго уравнения (3) обобщает полученные ранее выражения для стационарных вероятностей марковских процессов. Это решение как частный случай содержит известные ранее стационарные распределения вероятностей — биномиальное и пуассоновское распределение. Теорема 1 анонсирована в краткой заметке [11].

Замкнутые классы сообщающихся состояний. Проведем классификацию состояний марковского процесса $\xi(t)$. Состояние γ называется достижимым из состояния α, $\alpha \to \gamma$, если существует t_0, $t_0 < \infty$, такое, что $P_{\alpha\gamma}(t_0) > 0$ [1]. Состояния α и γ, для которых $\alpha \to \gamma$ и $\gamma \to \alpha$, называются сообщающимися и обозначаются $\alpha \sim \gamma$. Здесь и далее предположена неразложимость матрицы $P = (p^i_j)^l_{i,j=1}$.

Определение 1. *Матрица* $A = (a^i_j)^l_{i,j=1}$ *называется разложимой, если множество индексов* $\{1, \ldots, l\}$ *можно разбить на два таких непустых непересекающихся множества* S_1, S_2, *что* $a^i_j = 0$ *для всех* $i \in S_1$, $j \in S_2$. *Матрица* $A = (a^i_j)^l_{i,j=1}$, *не удовлетворяющая этому свойству, называется неразложимой.*

Используем свойства неотрицательных неразложимых матриц, которые в удобной для дальнейшего изложения форме приведены в работе [2] (теорема Перрона – Фробениуса).

Лемма 1. *Пусть для марковского процесса* $\xi(t)$ *матрица* $P = (p^i_j)^l_{i,j=1}$ *неразложима. Если* $\alpha \to \gamma$, *то* $\gamma \to \alpha$.

◄ (а) Покажем, что для марковского процесса $\xi(t)$ из состояния ε^i достижимо состояние ε^j для всех $i, j = 1, \ldots, l$.

Рассмотрим порождаемую процессом $\xi(t)$ марковскую цепь

$$S_0, S_1, S_2, \ldots, S_n, S_{n+1}, \ldots$$

на l состояниях $\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^l$ с вероятностями переходов за один шаг

$$\mathbf{P}\{S_{n+1} = \varepsilon^j \mid S_n = \varepsilon^i\} = p^i_j, \quad i, j = 1, \ldots, l.$$

Для цепи S_n матрица $P = (p^i_j)^l_{i,j=1}$ вероятностей переходов за один шаг неотрицательна и неразложима по условиям леммы. Согласно лемме 2, приведенной в работе [2], для любых i и j найдется степень m матрицы P такая, что для матрицы P^m ее элемент на пересечении i-й строки и j-го столбца неотрицателен, т.е. $\mathbf{P}\{S_m = \varepsilon^j \mid S_0 = \varepsilon^i\} > 0$. Существует последовательность состояний $\varepsilon^i, \tilde{\varepsilon}^1, \ldots, \tilde{\varepsilon}^{m-1}, \varepsilon^j$, соответствующая возможности достижения состояния ε^j из состояния ε^i для цепи S_n.

Следовательно, и для процесса $\xi(t)$ состояние ε^j достижимо из состояния ε^i по той же последовательности состояний $\varepsilon^i, \tilde{\varepsilon}^1, \ldots, \tilde{\varepsilon}^{m-1}, \varepsilon^j$.

Аналогично, состояние ε^i достижимо из состояния ε^j по некоторой последовательности состояний $\varepsilon^j, \hat{\varepsilon}^1, \ldots, \hat{\varepsilon}^{l-1}, \varepsilon^i$.

(б) По условиям (1) рассматривается случайный процесс, для которого из состояния θ возможен скачок только в состояния $\theta - \varepsilon^i + \varepsilon^j$ (если вероятность $p^i_j > 0$), $i, j = 1, \ldots, l$. Если $\alpha \to \gamma$, то состояние γ достижимо из состояния α по последовательности состояний α, $\alpha - \varepsilon_1 + \tilde{\varepsilon}_1, \alpha - \varepsilon_1 + \tilde{\varepsilon}_1 - \varepsilon_2 + \tilde{\varepsilon}_2, \ldots, \gamma = \alpha - \varepsilon_1 + \tilde{\varepsilon}_1 - \varepsilon_2 + \tilde{\varepsilon}_2 - \ldots - \varepsilon_{k-1} + \tilde{\varepsilon}_{k-1} - \varepsilon_k + \tilde{\varepsilon}_k$, где $\varepsilon_1, \tilde{\varepsilon}_1, \varepsilon_2, \tilde{\varepsilon}_2, \ldots, \varepsilon_{k-1}, \tilde{\varepsilon}_{k-1}, \varepsilon_k, \tilde{\varepsilon}_k \in A$.

Следовательно, состояние α достижимо из состояния γ по последовательности состояний γ, $\gamma - \tilde{\varepsilon}_k + \varepsilon_k$, $\gamma - \tilde{\varepsilon}_k + \varepsilon_k - \tilde{\varepsilon}_{k-1} + \varepsilon_{k-1}, \ldots,$

$\alpha=\gamma-\tilde{\varepsilon}_k+\varepsilon_k-\tilde{\varepsilon}_{k-1}+\varepsilon_{k-1}-\ldots-\tilde{\varepsilon}_2+\varepsilon_2-\tilde{\varepsilon}_1+\varepsilon_1$, с учетом того, что, если совершен скачок из состояния θ в состояние $\theta-\varepsilon^i+\varepsilon^j$, то и состояние θ достижимо из состояния $\theta-\varepsilon^i+\varepsilon^j$. Действительно, в силу последнего предложения, сделанного в пункте (а), этого можно достичь по последовательности состояний $\theta-\varepsilon^i+\varepsilon^j$, $\theta-\varepsilon^i+\varepsilon^j-\varepsilon^j+\hat{\varepsilon}^1$, $\ldots, \theta=\theta-\varepsilon^i+\varepsilon^j-\varepsilon^j+\hat{\varepsilon}^1-\ldots-\hat{\varepsilon}^{l-1}+\varepsilon^i$. Лемма 1 доказана. ►

Обозначим $K_\alpha=\{\gamma:\alpha\to\gamma\}$ множество состояний, достижимых из состояния α. Согласно лемме 1, множество K_α является множеством сообщающихся состояний, или *замкнутым классом*, $K_\alpha=\{\gamma\ :\ \alpha\sim\gamma\}$. Каждое состояние $\alpha\in N^n$ принадлежит некоторому замкнутому классу. Два замкнутых класса либо не имеют общих состояний, либо совпадают. Тривиальным замкнутым классом называется класс, содержащий одно состояние.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы 1. Нетривиальный замкнутый класс K_α является бесконечным тогда и только тогда, когда имеются i и j такие, что $\varepsilon^i>\varepsilon^j$.*

◄ (а) Пусть i и j такие, что $\varepsilon^i>\varepsilon^j$ и замкнутый класс $K_\alpha = \{\gamma:\alpha\sim\gamma\}$ нетривиален. Имеется комплекс взаимодействия $\varepsilon^m\in A$ такой, что $\varepsilon^m\leqslant\alpha$ (если комплекса не существует, то класс K_α тривиален). В пункте (а) доказательства леммы 1 показано, что все состояния $\varepsilon^1,\ldots,\varepsilon^l$ сообщающиеся, в частности $\varepsilon^m\sim\varepsilon^j$, $\varepsilon^j\sim\varepsilon^i$. Тогда $\alpha\sim\alpha-\varepsilon^m+\varepsilon^j=\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\alpha}\geqslant\varepsilon^j$, а из состояния $\tilde{\alpha}$ достижимо счетное множество состояний $\gamma^k=\tilde{\alpha}+k(\varepsilon^i-\varepsilon^j)$, $k=1,2,\ldots$ Таким образом, класс K_α бесконечный.

(б) Если не существует i и j таких, что $\varepsilon^i>\varepsilon^j$, то класс K_α конечный.

Из построений пункта (а) при доказательстве леммы 1 следует, что $K_{\varepsilon^1}=\ldots=K_{\varepsilon^l}$. Имеем конечный класс $K_{\varepsilon^i}=\{\varepsilon^1,\ldots,\varepsilon^l\}$, поскольку процесс $\xi(t)$ при выходе из состояния ε^i может попасть только в одно из состояний ε^j, $j=1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,l$; другие скачки из состояния ε^i невозможны, так как отсутствует комплекс взаимодействия, меньший состояния ε^i.

Конечность класса K_{ε^1} равносильна конечности класса K_α, $\alpha\in N^n$. Действительно, класс K_{ε^1} — это пересечение n-мерного положительного квадранта N^n с гиперплоскостью из точек с целочисленными координатами

$$L_{\varepsilon^1}=\{\gamma:\gamma=\varepsilon^1+\sum_{i,j=1}^{l}\sum_{k_{ij}=0}^{\infty}k_{ij}(-\varepsilon^i+\varepsilon^j)\}.$$

Класс K_α — пересечение n-мерного положительного квадранта N^n с гиперплоскостью из точек с целочисленными координатами

$$L_\alpha = \{\gamma : \gamma = \alpha + \sum_{i,j=1}^{l} \sum_{k_{ij}=0}^{\infty} k_{ij}(-\varepsilon^i + \varepsilon^j)\}.$$

Гиперплоскости L_{ε^1} и L_α либо совпадают, либо параллельны, следовательно конечность множества $K_{\varepsilon^1} = N^n \cap L_{\varepsilon^1}$ равносильна конечности множества $K_\alpha = N^n \cap L_\alpha$. Лемма 2 доказана. ►

Общие положительные нули характеристических многочленов. Введем дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами

$$\tilde{h}_j\Big(\frac{\partial}{\partial s}\Big) = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i p_j^i \frac{\partial^{\varepsilon^i}}{\partial s^{\varepsilon^i}}, \qquad j = 1, \ldots, l, \tag{4}$$

и преобразуем левую часть выражения (3):

$$\sum_{i=1}^{l} \lambda_i (h_i(s) - s^{\varepsilon^i}) \frac{\partial^{\varepsilon^i} f_\alpha(s)}{\partial s^{\varepsilon^i}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \Big(\sum_{j=1}^{l} p_j^i s^{\varepsilon^j} - s^{\varepsilon^i} \Big) \frac{\partial^{\varepsilon^i} f_\alpha(s)}{\partial s^{\varepsilon^i}} =$$

$$= \sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{l} \lambda_i p_j^i s^{\varepsilon^j} \frac{\partial^{\varepsilon^i} f_\alpha(s)}{\partial s^{\varepsilon^i}} - \sum_{j=1}^{l} \lambda_j s^{\varepsilon^j} \frac{\partial^{\varepsilon^j} f_\alpha(s)}{\partial s^{\varepsilon^i}} =$$

$$= \sum_{j=1}^{l} s^{\varepsilon^j} \Big(\sum_{i=1}^{l} \lambda_i p_j^i \frac{\partial^{\varepsilon^i}}{\partial s^{\varepsilon^i}} - \lambda_j \frac{\partial^{\varepsilon^j}}{\partial s^{\varepsilon^j}} \Big) f_\alpha(s) =$$

$$= \sum_{j=1}^{l} s^{\varepsilon^j} \Big(\tilde{h}_j\Big(\frac{\partial}{\partial s}\Big) - \lambda_j \frac{\partial^{\varepsilon^j}}{\partial s^{\varepsilon^j}} \Big) f_\alpha(s).$$

Таким образом, стационарное уравнение (3) записывается в виде

$$\sum_{j=1}^{l} s^{\varepsilon^j} \Big(\tilde{h}_j\Big(\frac{\partial}{\partial s}\Big) - \lambda_j \frac{\partial^{\varepsilon^j}}{\partial s^{\varepsilon^j}} \Big) f_\alpha(s) = 0. \tag{5}$$

В выражении для решения уравнения (5) основную роль играют нули характеристических многочленов для дифференциальных операторов (4):

$$\tilde{h}_j(z) - \lambda_j z^{\varepsilon^j} = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i p_j^i z_1^{\varepsilon_1^i} \ldots z_n^{\varepsilon_n^i} - \lambda_j z_1^{\varepsilon_1^j} \ldots z_n^{\varepsilon_n^j}, \quad j = 1, \ldots, l. \tag{6}$$

Для нас представляют интерес общие положительные нули, т.е. множество

$$Q = \{z = (z_1, \ldots, z_n) : \tilde{h}_j(z) - \lambda_j z^{\varepsilon^j} = 0,$$
$$j = 1, \ldots, l;\ z_i > 0,\ i = 1, \ldots, n\}.$$

Лемма 3. *Пусть матрица* $P = (p^i_j)^l_{i,j=1}$ *неразложима. Множество* Q *либо пустое, либо состоит из одной точки или содержит континуум точек. Для любых* $q, \tilde{q} \in Q$ *справедливо равенство*

$$\frac{\tilde{q}^{\varepsilon^1}}{q^{\varepsilon^1}} = \ldots = \frac{\tilde{q}^{\varepsilon^l}}{q^{\varepsilon^l}}. \tag{7}$$

◀ (a) По определению множества Q рассматриваются положительные решения системы уравнений

$$\begin{aligned} \lambda_1 p^1_1 z^{\varepsilon^1} + \ldots + \lambda_l p^l_1 z^{\varepsilon^l} &= \lambda_1 z^{\varepsilon^1}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_1 p^1_j z^{\varepsilon^1} + \ldots + \lambda_l p^l_j z^{\varepsilon^l} &= \lambda_j z^{\varepsilon^j}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_1 p^1_l z^{\varepsilon^1} + \ldots + \lambda_l p^l_l z^{\varepsilon^l} &= \lambda_l z^{\varepsilon^l}. \end{aligned} \tag{8}$$

Введем вектор $v = (v^1, \ldots, v^l)$, где $v^i = \lambda_i z^{\varepsilon^i}$, $i = 1, \ldots, l$; тогда равенства (8) означают, что вектор v является левым собственным вектором матрицы P:

$$vP = v.$$

Матрица P неотрицательна, неразложима и $\sum\limits_{j=1}^{l} p^i_j = 1, i = 1, \ldots, l$. Для такой матрицы левый собственный вектор единственный (с точностью до умножения на константу) для собственного значения 1 и может быть выбран положительным [2].

Из системы (8) получаем равенства

$$\begin{aligned} \lambda_1 z^{\varepsilon^1} &= C v^1; \\ \ldots&\ldots\ldots \\ \lambda_j z^{\varepsilon^j} &= C v^j; \\ \ldots&\ldots\ldots \\ \lambda_l z^{\varepsilon^l} &= C v^l, \end{aligned}$$

где $C > 0$; $v = (v^1, \ldots, v^l)$ — левый собственный вектор матрицы P (для определенности примем $\sum\limits_{j=1}^{l} v^j = 1$). Логарифмируя равенства, записываем систему

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_1^1 \ln z_1 + \ldots + \varepsilon_n^1 \ln z_n = \ln C + \ln v^1 - \ln \lambda_1;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\varepsilon_1^j \ln z_1 + \ldots + \varepsilon_n^j \ln z_n = \ln C + \ln v^j - \ln \lambda_j;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\varepsilon_1^l \ln z_1 + \ldots + \varepsilon_n^l \ln z_n = \ln C + \ln v^l - \ln \lambda_l.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Таким образом, нахождение множества Q сводится к рассмотрению системы линейных уравнений (9). Из линейной алгебры известно, что система линейных уравнений может быть несовместной, иметь единственное решение или некоторое линейное многообразие решений. Анализ системы (9) показывает, что множество Q может быть пустым, содержать одну точку или континуум точек.

(б) Пусть q и $\tilde{q}$ являются положительными решениями системы (8). Вектор $v = (v^1, \ldots, v^l)$, где $v^i = \lambda_i q^{\varepsilon^i}$, $i = 1, \ldots, l$, и вектор $\tilde{v} = (\tilde{v}^1, \ldots, \tilde{v}^l)$, где $\tilde{v}^i = \lambda_i \tilde{q}^{\varepsilon^i}$, $i = 1, \ldots, l$ — левые собственные вектора матрицы P, соответствующие собственному значению 1. Такой вектор единственный с точностью до умножения на константу [2]:

$$
\frac{\tilde{v}^1}{v^1} = \ldots = \frac{\tilde{v}^l}{v^l}.
$$

Значит,

$$
\frac{\lambda_1 \tilde{q}^{\varepsilon^1}}{\lambda_1 q^{\varepsilon^1}} = \ldots = \frac{\lambda_l \tilde{q}^{\varepsilon^l}}{\lambda_l q^{\varepsilon^l}}
$$

и справедливо равенство (7). Лемма 3 доказана. ►

Замечание 1. Частный случай. Пусть марковский процесс $\xi(t)$ определен двумя комплексами взаимодействия $\varepsilon^1, \varepsilon^2 \in N^n$. Тогда множество Q не пусто.

Действительно, имеем матрицу

$$
P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

и нахождение множества Q сводится к рассмотрению системы

$$
\begin{aligned}
\lambda_2 z^{\varepsilon^2} &= \lambda_1 z^{\varepsilon^1};\\
\lambda_1 z^{\varepsilon^1} &= \lambda_2 z^{\varepsilon^2}.
\end{aligned}
$$

Уравнение $\lambda_1 z^{\varepsilon^1} = \lambda_2 z^{\varepsilon^2}$ имеет, очевидно, положительное решение $q = (q_1, \ldots, q_n)$ при любых комплексах ε^1, ε^2.

Отметим, что в случае двух комплексов взаимодействия множества $K_\alpha = N^n \cap L_\alpha$, где

$$
L_\alpha = \{\gamma : \gamma = \alpha + \sum_{k=-\infty}^{\infty} k(-\varepsilon^1 + \varepsilon^2)\},
$$

представляют собой замкнутые классы и являются либо отрезками, либо полупрямыми из точек с целочисленными координатами.

Предельные стационарные распределения в замкнутых классах. Теорема 1. *Пусть матрица P неразложима и найдется набор положительных чисел $q = (q_1, \ldots, q_n)$ такой, что*

$$\sum_{i=1}^{l} \lambda_i p_j^i q^{\varepsilon^i} - \lambda_j q^{\varepsilon^j} = 0, \quad j = 1, \ldots, l. \tag{10}$$

Тогда при любом начальном состоянии α марковского процесса, в классе K_α существует предельное стационарное распределение $\{q_{\alpha\gamma}, \gamma \in K_\alpha\}$, $q_{\alpha\gamma} = \lim_{t\to\infty} P_{\alpha\gamma}(t)$, $\alpha, \gamma \in K_\alpha$, а производящая функция стационарных вероятностей имеет вид

$$f_\alpha(s) = \sum_{\gamma\in K_\alpha} q_{\alpha\gamma} s^\gamma = \left(\sum_{\gamma\in K_\alpha} \frac{q^\gamma}{\gamma!}\right)^{-1} \left(\sum_{\gamma\in K_\alpha} \frac{q^\gamma s^\gamma}{\gamma!}\right). \tag{11}$$

Замечание 2. Покажем корректность формулы (11). Если $\tilde{q} \in Q$, то производящая функция

$$\left(\sum_{\gamma\in K_\alpha} \frac{\tilde{q}^\gamma}{\gamma!}\right)^{-1} \left(\sum_{\gamma\in K_\alpha} \frac{\tilde{q}^\gamma s^\gamma}{\gamma!}\right)$$

совпадает с производящей функцией (11).

Достаточно показать, что отношение $\tilde{q}^\gamma / q^\gamma$ не зависит от состояний γ, $\gamma \in K_\alpha$. Поскольку состояние γ достижимо из состояния α, существует последовательность из комплексов взаимодействия $\varepsilon_1, \tilde{\varepsilon}_1, \varepsilon_2, \tilde{\varepsilon}_2, \ldots, \varepsilon_{k-1}, \tilde{\varepsilon}_{k-1}, \varepsilon_k, \tilde{\varepsilon}_k \in A$ такая, что $\gamma = \alpha - \varepsilon_1 + \tilde{\varepsilon}_1 - \varepsilon_2 + {} + \tilde{\varepsilon}_2 - \ldots - \varepsilon_{k-1} + \tilde{\varepsilon}_{k-1} - \varepsilon_k + \tilde{\varepsilon}_k$. Справедливо равенство

$$\frac{\tilde{q}^\gamma}{q^\gamma} = \frac{\tilde{q}^{\alpha + \sum_{i=1}^k (-\varepsilon_i + \tilde{\varepsilon}_i)}}{q^{\alpha + \sum_{i=1}^k (-\varepsilon_i + \tilde{\varepsilon}_i)}} = \frac{\tilde{q}^\alpha}{q^\alpha} \prod_{i=1}^{k} \frac{q^{\varepsilon_i}}{\tilde{q}^{\varepsilon_i}} \frac{\tilde{q}^{\tilde{\varepsilon}_i}}{q^{\tilde{\varepsilon}_i}} = \frac{\tilde{q}^\alpha}{q^\alpha},$$

так как произведения отношений под знаком произведения равны 1 по лемме 3.

◄ Согласно лемме 2, для рассматриваемого марковского процесса либо все нетривиальные замкнутые классы конечны, либо все нетривиальные замкнутые классы бесконечны.

(a) Пусть класс K_α конечный. В конечном замкнутом классе состояний марковского процесса с непрерывным временем всегда существует предельное распределение и оно единственно [1]. Для доказательства теоремы достаточно показать, что производящая функция (11) удовлетворяет стационарному второму уравнению (3):

$$\sum_{i=1}^{l} \lambda_i (h_i(s) - s^{\varepsilon^i}) \frac{\partial^{\varepsilon^i}}{\partial s^{\varepsilon^i}} \left(\sum_{\gamma\in K_\alpha} \frac{q^\gamma s^\gamma}{\gamma!}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \Big(\sum_{j=1}^{l} p_j^i s^{\varepsilon^j} - s^{\varepsilon^i} \Big) q^{\varepsilon^i} \sum_{\gamma \in K_\alpha} \frac{q^{\gamma-\varepsilon^i} s^{\gamma-\varepsilon^i}}{(\gamma-\varepsilon^i)!} =$$

$$= \Big(\sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{l} \lambda_i p_j^i s^{\varepsilon^j} q^{\varepsilon^i} - \sum_{i=1}^{l} \lambda_i s^{\varepsilon^i} q^{\varepsilon^i} \Big) \Big(\sum_{\gamma \in K_\alpha} \frac{q^{\gamma-\varepsilon^1} s^{\gamma-\varepsilon^1}}{(\gamma-\varepsilon^1)!} \Big) =$$

$$= \Big(\sum_{\gamma \in K_\alpha} \frac{q^{\gamma-\varepsilon^1} s^{\gamma-\varepsilon^1}}{(\gamma-\varepsilon^1)!} \Big) \sum_{j=1}^{l} s^{\varepsilon^j} \Big(\sum_{i=1}^{l} \lambda_i p_j^i q^{\varepsilon^i} - \lambda_j q^{\varepsilon^j} \Big) = 0, \quad (12)$$

так как по условию (10) второй множитель равен нулю.

(б) В случае бесконечного класса K_α также используется стационарное уравнение (3). Достаточное условие существования предельного распределения в замкнутом классе состояний марковского процесса [1] — наличие нетривиального абсолютно суммируемого решения стационарной второй системы уравнений Колмогорова.

Выкладки (12), сделанные в пункте (а) для случая, когда выражение для $f_\alpha(s)$ имело конечное число слагаемых, справедливы и при бесконечном числе слагаемых — в силу абсолютной сходимости степенного ряда (11) при $|s| \leqslant 1$:

$$|f_\alpha(s)| \leqslant C^{-1} \sum_{\gamma \in K_\alpha} \frac{q^\gamma |s|^\gamma}{\gamma!} \leqslant C^{-1} \sum_{\gamma \in N^n} \frac{q^\gamma |s|^\gamma}{\gamma!} \leqslant$$
$$\leqslant C^{-1} e^{q_1|s_1| + \ldots + q_n|s_n|} \leqslant C^{-1} e^{q_1 + \ldots + q_n} < \infty,$$

где

$$0 < C = \sum_{\gamma \in K_\alpha} \frac{q^\gamma}{\gamma!} \leqslant \sum_{\gamma \in N^n} \frac{q^\gamma}{\gamma!} \leqslant e^{q_1 + \ldots + q_n} < \infty.$$

Теорема 1 доказана. ►

Частные случаи. Стационарное распределение (11) для системы взаимодействующих частиц связано с основными представлениями равновесной статистической физики.

Пример 1. Пусть классы сообщающихся состояний образуют множества $K_E = \{\gamma \in N^n : \ \gamma_1 + \ldots + \gamma_n = E\}$, $E = 0, 1, 2, \ldots$, и существует положительный вектор q, удовлетворяющий условиям (10). Предельное распределение в классе K_E задается производящей функцией полиномиального распределения

$$f_E(s) = \Big(\sum_{\gamma \in K_E} \frac{q^\gamma}{\gamma!} \Big)^{-1} \Big(\sum_{\gamma \in K_E} \frac{q^\gamma s^\gamma}{\gamma!} \Big) =$$
$$= \Big(\sum_{i=1}^{n} q_i \Big)^{-E} \Big(\sum_{i=1}^{n} q_i s_i \Big)^{E} = (\widetilde{q}_1 s_1 + \ldots + \widetilde{q}_n s_n)^E, \quad (13)$$

где $\widetilde{q}_i = q_i \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} q_i \Big)^{-1}$, $i = 1, \ldots, n$. Распределение (13) — микроканоническое распределение [8], справедливое для замкнутых систем взаимодействующих частиц. Если при $t = 0$ имелось E частиц произвольных типов, то при $t \to \infty$ частицы распределяются по типам $T_1, \ldots, T_n$ независимо друг от друга с распределением вероятностей $\{\widetilde{q}_1, \ldots, \widetilde{q}_n\}$. Распределение (13) получено в работе [8] для бимолекулярной реакции $T_i + T_j \to T_k + T_m$, $i, j, k, m = 1, \ldots, n$, при требованиях типа симметрии на плотности (1).

Пример 2. Пусть имеется один тип частиц T и два комплекса взаимодействия $\varepsilon^1 = 0$, $\varepsilon^2 = 1$, т.е. рассматривается схема превращений $0 \to T$, $T \to 0$. Все множество состояний $N = \{0, 1, \ldots\}$ образует замкнутый класс и стационарным распределением является пуассоновское распределение

$$q_{\alpha\gamma} = \frac{q^\gamma}{\gamma!}\, e^{-q}, \quad \gamma \in N.$$

Такой процесс рассмотрен в работе [12] как открытая система взаимодействующих частиц с интерпретацией пуассоновского распределения как канонического распределения.

Одномерный марковский процесс, приведенный в примере 2, интерпретируется как система массового обслуживания $M|M|\infty$ [13]. В соответствии с замечанием 1, в случае двух комплексов взаимодействия $\varepsilon^1, \varepsilon^2 \in N^n$ всегда существует стационарное распределение марковского процесса, определяемое по формуле (11).

Частные случаи результата теоремы 1 приведены в работах [4, 5, 14–16] и др. В работе [15] для бимолекулярных химических реакций со схемой $T_1 \to 2T_2$; $2T_2 \to T_1$, схемой $2T_1 \to T_2 + T_3$; $T_2 + T_3 \to 2T_1$, схемами $T_1 + T_2 \to T_3$; $T_3 \to T_1 + T_2$ и $T_1 + T_2 \to T_3 + T_4$; $T_3 + T_4 \to T_1 + T_2$, выражения для производящих функций стационарных вероятностей сведены к различным гипергеометрическим функциям. В работе [14] приведено стационарное распределение марковского процесса, соответствующее схеме взаимодействий $0 \to 2T$; $2T \to 0$. Распределение вида (11) установлено методами, отличными от методов, применяемых в настоящей статье, в работе [16] для мономолекулярной схемы $T_1 \to T_2$; $T_2 \to T_1$, схемы ферментативной кинетики $T_1 + T_2 \to T_3$; $T_3 \to T_1 + T_2, T_1 + T_4$; $T_1 + T_4 \to T_3$; $0 \to T_1$; $T_1 \to 0$, более общей схемы $T_1 + T_2 \to T_3$; $T_3 \to T_1 + T_2, T_1 + T_4$; $T_1 + T_4 \to T_3$; $0 \to T_1, T_2$; $T_1 \to 0$; $T_2 \to 0$, схемы $0 \to T_1 + T_2$; $T_1 + T_2 \to 0$ и др.

Заключение. В настоящей работе применение аналитических методов позволило определить явный вид стационарных распределений для специальных марковских процессов.

Для указанных в примерах 1 и 2 вероятностных распределений хорошо известны стандартные нормальные приближения при увеличении параметров E и q соответственно. В общем случае ряд (11), задающий стационарное распределение, малопригоден для асимптотического исследования. В некоторых работах рассмотрены специальные функции, соответствующие ряду (11). В частности, в работе [17] с помощью бесселевых функций и интегральных представлений для бесселевых функций исследованы стационарные распределения для марковских процессов на множестве N, в том числе соответствующие ряду (11), и установлена их асимптотическая нормальность.

Прикладной интерес представляет задача о нахождении асимптотических приближений для вероятностного распределения (11) в случае отличия таких приближений от стандартного нормального закона, в связи с приложениями в теории надежности. Например, в статье [18] рассмотрены задачи оценки показателей надежности сложных систем с восстанавливаемыми элементами (среднее время безотказной работы) в стационарном режиме при $t \to \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1977. 568 с.
2. *Севастьянов Б.А.* Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971. 436 с.
3. *Севастьянов Б.А., Калинкин А.В.* Ветвящиеся случайные процессы с взаимодействием частиц // Доклады АН СССР. 1982. Т. 264. № 2. С. 306–308.
4. *Калинкин А.В.* Марковские ветвящиеся процессы с взаимодействием // Усп. математ. наук. 2002. Т. 57. № 2. С. 23–84.
5. *Гардинер К.В.* Стохастические методы в естественных науках. М.: Наука, 1986. 526 с.
6. *Anderson W.J.* Continuous-time markov chains: an application-oriented approach. N.Y.: Springer, 1991. 340 p.
7. *Калинкин А.В.* Типовой расчет по марковским процессам рождения и гибели квадратичного типа // Всеросс. конф. “Прикладная теория вероятностей и теоретическая информатика”: Труды. М.: Изд-во РУДН, 2012. С. 41–43.
8. *Леонтович М.А.* Основные уравнения кинетической теории газов с точки зрения теории случайных процессов // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1935. Т. 5. № 3–4. С. 211–230.
9. *Маслов В.П., Таривердиев С.Э.* Асимптотика уравнений Колмогорова-Феллера для системы из большого числа частиц // Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятн. Матем. статист. Теоретич. киберн. Т. 19. М.: ВИНИТИ, 1982. С. 85–124.
10. *Чжун Кай Лай.* Однородные цепи Маркова. М.: Наука, 1964. 426 с.
11. *Калинкин А.В.* Стационарное распределение системы взаимодействующих частиц с дискретными состояниями // Доклады АН СССР. 1983. Т. 268. № 6. С. 1362–1364.
12. *Николис Г., Пригожин И.* Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979. 512 с.
13. *Бочаров П.П., Печинкин А.В.* Теория массового обслуживания. М.: Изд-во РУДН, 1995. 529 с.

14. *Ван Кампен Н.Г.* Стохастические процессы в физике и химии. М.: Высш. шк., 1990. 376 с.
15. *Dadvey I.G., Ninham B.W., Staff P.J.* Stochastic models for second-order chemical reaction kinetics. The equilibrium state // J. Chem. Phys. 1966. Vol. 45. P. 2145–2155.
16. *Anderson D.F., Craciun G., Kurtz T.G.* Product-form stationary distributions for deficiency zero chemical reaction networks // Bulletin of Mathematical Biology. 2010. Vol. 72. No. 8. P. 1947–1970.
17. *Ланге А.М.* Стационарное распределение в открытой стохастической системе с парным взаимодействием частиц // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2005. № 1 (16). С. 3–22.
18. *Павлов И.В.* Приближенно оптимальные доверительные границы для показателей надежности систем с восстановлением // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1988. № 3. С. 109–116.

REFERENCES

[1] Gikhman I.I., Skorokhod A.V. Vvedenie v teoriyu sluchaynykh protsessov [Introduction to the theory of stochastic processes]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 568 p.

[2] Sevast’yanov B.A. Vetvyashchiesya protsessy [Branching process]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 436 p.

[3] Sevast’yanov B.A., Kalinkin A.V. Branching stochastic processes with interaction of particles. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* [Proc. Acad. Sci. USSR], 1982, vol. 264, no. 2, pp. 306–308 (in Russ.).

[4] Kalinkin A.V. Branching Markov process with interaction. *Usp. Mat. Nauk* [Math-Uspekhi], 2002, vol. 57, no. 2, pp. 23–84 (in Russ.).

[5] Gardiner C.W. Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences. 2d ed. Springer-Verlag, 1985. 442 p. (Russ. ed.: Gardiner K.V. Stokhasticheskie metody v estestvennykh naukakh. Moscow, Mir, 1986. 528 p.).

[6] Anderson W.J. Continuous-time markov chains: an application-oriented approach. N.Y., Springer, 1991. 340 p.

[7] Kalinkin A.V. Typical calculation for Markov processes of birth and death of quadratic type. *Tr. Vseross. Konf. “Prikladnaya teoriya veroyatnostey i teoreticheskaya informatika”* [Proc. All-Russ. Conf. “Applied probability theory and theoretical informatics”], Izd. RUDN Publ., 2012, pp. 41–43 (in Russ.).

[8] Leontovich M.A. Basic equations of the kinetic theory of gases in terms of the theory of stochastic processes. *Zhurnal eksperimental’noy i teoreticheskoy fiziki* [J. Exp. Theor. Phys.], 1935, vol. 2, no. 3–4, pp. 210–230 (in Russ.).

[9] Maslov V.P., Tariverdiev S.E. Asymptotics of Kolmogorov-Feller equations for a system of a large number of particles. *Sb. VINITI (Baza Dannykh RAN) “Itogi nauki i tekhniki”. Ser. Teoriya veroyatn. Matem. statist. Teoretich. kibern.* [Collect. Pap. of All-Russ. Inst. for Sc. Tech. Inf. VINITI (Database RAS) “Science and technique totals”. Ser.: Probability Theory. Math. Stat. Theor. Cybernetics], Moscow, 1982, vol. 19, pp. 85–124 (in Russ.).

[10] Chzhun Kay Lay. Odnorodnye tsepi Markova. [Homogeneous Markov Chains]. Moscow, Nauka Publ., 1964. 426 p.

[11] Kalinkin A.V. Stationary distribution of system of interacting particles with discrete states. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* [Proc. Acad. Sci. USSR], 1983, vol. 268, no. 6, pp. 1362–1364 (in Russ.).

[12] Nicolis G., Prigogine I. Self-organization in nonequilibrium systems John Wiley & Sons, 1977. 491 p. (Russ. Ed.: Nicolis G., Prigogine I. Samoorganizatsiya v neravnovesnykh sistemakh. Moscow, Mir Publ., 1979. 512 p.).

[13] Bocharov P.P., Pechinkin A.V. Teoriya massovogo obsluzhivaniya [Queuing theory]. Moscow, RUDN Publ., 1995. 529 p.

[14] Van Kampen N.G. Stochastic processes in physics and chemistry. Front Cover. North-Holland, 1981. 419 p. (Russ. Ed.: Van Kampen N.G. Stokhasticheskie protsessy v fizike i khimii. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 1990. 376 p.).
[15] Dadvey I.G., Ninham B.W., Staff P.J. Stochastic models for second-order chemical reaction kinetics. The equilibrium state. *J. Chem. Phys.*, 1966, vol. 45, pp. 2145–2155.
[16] Anderson D.F., Craciun G., Kurtz T.G. Product-form stationary distributions for deficiency zero chemical reaction networks. *Bulletin of Mathematical Biology.* 2010, vol. 72, no. 8, pp. 1947–1970.
[17] Lange A.M. Stationary distribution in an open stochastic system with pairwise interaction of particles. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2005, no. 1 (16), pp. 3–22 (in Russ.).
[18] Pavlov I.V. Approximately optimum confidential boundaries for indexes of reliability of systems with recovery. *Izv. Akad. Nauk, Tech. Cyber.* [Bull. Russ. Acad. Sci.: Tech. Cyber.], 1988, vol. 3, pp. 109–116 (in Russ.).

Статья поступила в редакцию 19.03.2014

Александр Вячеславович Калинкин — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры “Высшая математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 60 научных работ в области теории вероятностей и математического моделирования.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

A.V. Kalinkin — Dr. Sci. (Phys.-Math.), professor of “Higher Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 60 publications in the field of probability theory and mathematical modelling.
Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.