

УДК 517.958

РАСЧЕТ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЛЩИНЫ ЗАЩИТНОЙ ОБОЛОЧКИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ЭЛЕКТРОНАГРЕВАТЕЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА

Л.К. Мартинсон, О.Ю. Чигирёва

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: mathmod@bmstu.ru

Рассмотрена математическая модель нестационарного процесса теплопроводности в электронагревательном элементе, представляющем собой цилиндрический проводник с нанесенным на его боковую поверхность защитным керамическим покрытием. В проводящем слое электронагревательного элемента происходит выделение теплоты с объемной мощностью, зависящей от силы электрического тока. Отвод теплоты осуществляется с поверхности защитного покрытия по закону Ньютона. Предположено, что контактная поверхность между слоями обладает известным термическим сопротивлением, а теплофизические свойства материалов зависят от температуры. По результатам численных расчетов исследовано влияние геометрических и теплофизических параметров задачи на характер эволюции температуры электронагревательного элемента. При этом выделены рабочие режимы нагрева, при которых плавление проводника не наблюдается. В рассматриваемой многопараметрической задаче для нахождения таких режимов заданы значения всех параметров кроме толщины защитной керамической оболочки, определено такое критическое значение этой толщины, при котором температура на оси проводника достигает температуры плавления.

Ключевые слова: электронагревательный элемент, нестационарный процесс нелинейной теплопроводности, термическое сопротивление контактной поверхности.

CALCULATION OF CRITICAL THICKNESS OF THE PROTECTIVE SHELL OF THE CYLINDRICAL ELECTRIC HEATING ELEMENT

L.K. Martinson, O.Yu. Chigireva

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: mathmod@bmstu.ru

The mathematical model of non-stationary process of heat conduction in an electric heating element is considered. The element is a cylindrical conductor with a protective ceramic coating sputtered on its lateral surface. The conducting layer of the electric heating element generates heat of the volumetric power depending on electric current. The heat extracts from a surface of protective coating according to the Newton law. The contact surface between layers is assumed to possess known thermal resistance and thermal physical properties of materials depend on temperature. Influence of geometrical and thermo physical parameters of the model on the evolution of the electric heating element temperature has been studied, operating modes of heating without melting the conductor being determined. A critical value of the protective ceramic coating thickness at which temperature on the axis of the conductor reaches the melting temperature is defined.

Keywords: electric heating element, non-stationary process of nonlinear heat conductivity, thermal contact resistance.

Введение. Теория теплопроводности широко используется в инженерных расчетах [1, 2]. В частности, в теории нелинейной теплопроводности важное место занимает класс задач по исследованию теплового состояния активных сред, в которых происходят экзотермические процессы [3, 4]. В работах [5–10] рассмотрены задачи, в которых моделируются тепловые состояния многослойных конструкций различной геометрической конфигурации при наличии идеального и неидеального теплового контакта между слоями.

В настоящей работе изучено влияние геометрического параметра задачи на температурный режим двухслойного цилиндрического электронагревательного элемента с учетом термического сопротивления контактной поверхности.

Физическая постановка задачи и математическая модель процесса. Рассмотрим электронагревательный элемент, представляющий собой цилиндрическую проволоку радиусом r_1 с нанесенным на ее поверхность защитным покрытием — слой керамики толщиной $d = r_2 - r_1$ (рис. 1). При пропускании электрического тока по нагревателю (проволоке) в нем выделяется теплота. Согласно закону Джоуля – Ленца, объемная мощность тепловых источников определяется по формуле

$$Q(T) = J^2 \gamma(T),$$

где T — температура; J — плотность тока; $\gamma(T)$ — удельное электрическое сопротивление проводника. На поверхности защитного покрытия происходит отвод теплоты в окружающую среду с коэффициентом теплоотдачи α . Контактная поверхность металлической проволоки и керамики обладает термическим сопротивлением R_T [11]. Полагая, что теплофизические параметры материалов электронагревательного элемента зависят от температуры, запишем математическую модель рассматриваемого процесса нестационарной теплопроводности

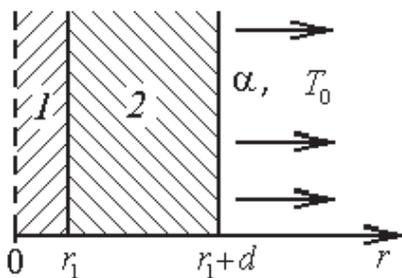


Рис. 1. Осевое сечение электронагревательного элемента:
1 — проводник; 2 — керамика

$$\rho_1 c_1 (T_1) \frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_1 (T_1) r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) + Q(T_1), \quad t > 0, \quad 0 \leq r < r_1; \quad (1)$$

$$\rho_2 c_2 (T_2) \frac{\partial T_2}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_2 (T_2) r \frac{\partial T_2}{\partial r} \right), \quad t > 0, \quad r_1 < r < r_2;$$

$$\begin{aligned} T_1(r, 0) &= T_0, & 0 \leq r \leq r_1; \\ T_2(r, 0) &= T_0, & r_1 \leq r \leq r_2; \end{aligned} \quad (2)$$

$$-\lambda_2 (T_2) \frac{\partial T_2}{\partial r} \Big|_{r=r_2} = \alpha (T_2(r_2, t) - T_0), \quad t > 0; \quad (3)$$

$$\begin{aligned} -\lambda_1 (T_1) \frac{\partial T_1}{\partial r} \Big|_{r=r_1} &= \frac{1}{R_T} (T_1(r_1, t) - T_2(r_1, t)) = \\ &= -\lambda_2 (T_2) \frac{\partial T_2}{\partial r} \Big|_{r=r_1}, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь индекс $j = 1$ соответствует проводнику; $j = 2$ — защитно-керамическому покрытию; r — радиальная координата; t — время; $T_j(r, t)$, $j = 1, 2$ — искомые температурные поля; ρ , c , λ — плотность, удельная теплоемкость и коэффициент теплопроводности; T_0 — начальная температура, равная температуре окружающей среды.

В указанной задаче следует учитывать условие ограниченности температуры на оси проводника [12].

Введем функции

$$F(T_1, r) = rQ(T_1);$$

$$C_j(T_j, r) = \rho_j r c_j(T_j), \quad \Lambda_j(T_j, r) = r \lambda_j(T_j), \quad j = 1, 2,$$

и запишем задачу (1)–(4) в виде

$$C_1(T_1, r) \frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\Lambda_1(T_1, r) \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) + F(T_1, r), \quad t > 0, \quad 0 \leq r < r_1;$$

$$C_2(T_2, r) \frac{\partial T_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\Lambda_2(T_2, r) \frac{\partial T_2}{\partial r} \right), \quad t > 0, \quad r_1 < r < r_2; \quad (5)$$

$$\begin{aligned} T_1(r, 0) &= T_0, & 0 \leq r \leq r_1; \\ T_2(r, 0) &= T_0, & r_1 \leq r \leq r_2; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} T_1(0, t) &< \infty, \quad t > 0; \\ -\Lambda_2(T_2, r) \frac{\partial T_2}{\partial r} \Big|_{r=r_2} &= \alpha r_2 (T_2(r_2, t) - T_0), \quad t > 0; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
-\Lambda_1(T_1, r) \frac{\partial T_1}{\partial r} \Big|_{r=r_1} &= \frac{r_1}{R_T} (T_1(r_1, t) - T_2(r_1, t)) = \\
&= -\Lambda_2(T_2, r) \frac{\partial T_2}{\partial r} \Big|_{r=r_1}, \quad t > 0. \quad (8)
\end{aligned}$$

Построение алгоритма приближенного решения. Для нахождения приближенного аналитического решения начально-краевой задачи (5)–(8), воспользуемся модификацией метода [13], предложенного в работе [14]. Для этого согласно методу Рунге проведем дискретизацию временной переменной t системой точек $t_k = k\tau$, $k = 1, 2, \dots$ ($\tau > 0$ — достаточно малый шаг разбиения) и заменим в уравнениях (5) производные по времени разностными отношениями:

$$\frac{\partial T_j}{\partial t} \Big|_{t=t_k} \approx \frac{T_j^{(k)}(r) - T_j^{(k-1)}(r)}{\tau}, \quad j = 1, 2,$$

где $T_j^{(k)}(r)$ — приближенные значения функций $T_j(r, t)$ при $t = t_k$; $T_j^{(0)}(r) = T_0$ в силу начальных условий (6).

Проведем линеаризацию задачи (5)–(8). На каждом временном слое $t = t_k$ все нелинейности в уравнениях (5), граничных условиях (7) и в условии сопряжения (8) будем полагать известными, вычисленными на предыдущем временном слое $t = t_{k-1}$:

$$F^{(k)}(r) = F\left(T_1^{(k-1)}(r), r\right);$$

$$C_j^{(k)}(r) = C_j\left(T_j^{(k-1)}(r), r\right), \Lambda_j^{(k)}(r) = \Lambda_j\left(T_j^{(k-1)}(r), r\right), \quad j = 1, 2.$$

Кроме того, на временном слое $t = t_k$ значения тепловых потоков в (7) и (8) определим через значения функций $T_j^{(k-1)}(r)$, найденных на предыдущем временном слое $t = t_{k-1}$:

$$\begin{aligned}
q_2^{(k)} &= \alpha r_2 \left(T_2^{(k-1)}(r_2) - T_0\right); \\
q_1^{(k)} &= \frac{r_1}{R_T} \left(T_1^{(k-1)}(r_1) - T_2^{(k-1)}(r_1)\right).
\end{aligned}$$

Это позволяет записать условие сопряжения (8) в виде двух граничных условий

$$\begin{aligned}
-\Lambda_1^{(k)}(r) \frac{\partial T_1^{(k)}}{\partial r} \Big|_{r=r_1} &= q_1^{(k)}; \\
-\Lambda_2^{(k)}(r) \frac{\partial T_2^{(k)}}{\partial r} \Big|_{r=r_1} &= q_1^{(k)}.
\end{aligned}$$

Таким образом, дифференциально-разностный аналог начально-краевой задачи (5)–(8) можно представить следующей итерационной

схемой ($k = 1, 2, \dots$) решения двух краевых задач для линейных эллиптических уравнений с переменными коэффициентами $\Lambda_j^{(k)}(r)$ и $C_j^{(k)}(r)$.

Краевая задача 1:

$$-\frac{d}{dr} \left[\Lambda_1^{(k)}(r) \frac{dT_1^{(k)}}{dr} \right] + \frac{1}{\tau} C_1^{(k)}(r) T_1^{(k)}(r) = \frac{1}{\tau} C_1^{(k)}(r) T_1^{(k-1)}(r) + F^{(k)}(r), \quad 0 < r < r_1; \quad (9)$$

$$T_1^{(k)} \Big|_{r=0} < \infty; \quad -\Lambda_1^{(k)}(r) \frac{dT_1^{(k)}}{dr} \Big|_{r=r_1} = q_1^{(k)}. \quad (10)$$

Краевая задача 2:

$$-\frac{d}{dr} \left[\Lambda_2^{(k)}(r) \frac{dT_2^{(k)}}{dr} \right] + \frac{1}{\tau} C_2^{(k)}(r) T_2^{(k)}(r) = \frac{1}{\tau} C_2^{(k)}(r) T_2^{(k-1)}(r), \quad r_1 < r < r_2; \quad (11)$$

$$-\Lambda_2^{(k)}(r) \frac{dT_2^{(k)}}{dr} \Big|_{r=r_1} = q_1^{(k)}; \quad -\Lambda_2^{(k)}(r) \frac{dT_2^{(k)}}{dr} \Big|_{r=r_2} = q_2^{(k)}. \quad (12)$$

На каждом временном слое $t = t_k$ задачи (9), (10) и (11), (12) решаются независимо.

Сходимость метода Рунге для краевых задач в нелинейной постановке доказана в работе [15] для класса степенных функций.

На k -м шаге итерации решения краевых задач (9), (10) и (11), (12) будем искать в виде разложений в ряды Фурье:

$$T_j^{(k)}(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n a_{j,n}^{(k)} X_{j,n}(r), \quad r_{j-1} \leq r \leq r_j, \quad j = 1, 2, \quad (13)$$

по системам собственных функций $\{X_{j,n}(r)\}_{n=0}^{\infty}$ следующих задач ($j = 1, 2$) Штурма – Лиувилля

$$\begin{aligned} X_j''(r) + \theta_j X_j(r) &= 0, \quad r_{j-1} < r < r_j; \\ X_j'(r_{j-1}) &= 0, \quad X_j'(r_j) = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

где $r_0 = 0$; $\delta_n = \begin{cases} 0,5, & n = 0; \\ 1, & n > 0. \end{cases}$

Собственные значения $\theta_{j,n}$ и собственные функции задач (14) имеют вид [16]

$$\theta_{j,n} = \frac{\pi n}{r_j - r_{j-1}}; \quad X_{j,n}(r) = \cos \theta_{j,n}(r - r_{j-1}), \quad j = 1, 2.$$

Для нахождения коэффициентов Фурье $a_{j,n}^{(k)}$, $j = 1, 2$ в разложении (13), умножим уравнения (9) и (11) на функции $X_{1,n}(r)$ и $X_{2,n}(r)$ соответственно и проинтегрируем полученные равенства по переменной r : первое — от $r_0 = 0$ до r_1 , второе — от r_1 до r_2 . В результате запишем следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
 & - \int_{r_{j-1}}^{r_j} \frac{d}{dr} \left[\Lambda_j^{(k)}(r) \frac{dT_j^{(k)}}{dr} \right] X_{j,n}(r) dr + \frac{1}{\tau} \int_{r_{j-1}}^{r_j} C_j^{(k)}(r) T_j^{(k)}(r) X_{j,n}(r) dr = \\
 & = \frac{1}{\tau} \int_{r_{j-1}}^{r_j} C_j^{(k)}(r) T_j^{(k-1)}(r) X_{j,n}(r) dr + H_j, \quad j = 1, 2, \quad (15)
 \end{aligned}$$

где $H_1 = \int_0^{r_1} F^{(k)}(r) X_{1,n}(r) dr$; $H_2 = 0$.

Для вычисления первого интеграла в левой части соотношения (15) применим правило интегрирования по частям. Тогда с учетом граничных условий (10) и (12), а также

$$X_{j,n}(r_{j-1}) = 1, \quad X_{j,n}(r_j) = (-1)^n, \quad j = 1, 2,$$

получим

$$\begin{aligned}
 & \int_{r_{j-1}}^{r_j} \Lambda_j^{(k)}(r) \frac{dT_j^{(k)}}{dr} \frac{dX_{j,n}}{dr} dr + \frac{1}{\tau} \int_{r_{j-1}}^{r_j} C_j^{(k)}(r) T_j^{(k)}(r) X_{j,n}(r) dr = \\
 & = \frac{1}{\tau} \int_{r_{j-1}}^{r_j} C_j^{(k)}(r) T_j^{(k-1)}(r) X_{j,n}(r) dr + K_j, \quad j = 1, 2, \quad (16)
 \end{aligned}$$

где

$$K_1 = H_1 + (-1)^{n+1} q_1^{(k)}; \quad K_2 = H_2 + (-1)^{n+1} q_2^{(k)} + q_1^{(k)}.$$

Подставляя в соотношения (16) разложения (13) и учитывая равенства

$$\begin{aligned}
 X_{j,n}(r) X_{j,m}(r) &= \frac{1}{2} [X_{j,n-m}(r) + X_{j,n+m}(r)]; \\
 \frac{dX_{j,n}}{dr} \frac{dX_{j,m}}{dr} &= \frac{\theta_{j,n} \theta_{j,m}}{2} [X_{j,n-m}(r) - X_{j,n+m}(r)],
 \end{aligned}$$

записываем следующие бесконечные системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов Фурье $a_{j,n}^{(k)}$, $j = 1, 2$:

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_{j,nm}^{(k)} \delta_m a_{j,m}^{(k)} = b_{j,n}^{(k)}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad j = 1, 2, \quad (17)$$

где

$$A_{j,nm}^{(k)} = \frac{\pi^2 n m \tau}{r_j - r_{j-1}} \left(\phi_{j,n-m}^{(k)} - \phi_{j,n+m}^{(k)} \right) + (r_j - r_{j-1}) \left(\psi_{j,n-m}^{(k)} + \psi_{j,n+m}^{(k)} \right);$$

$$b_{j,n}^{(k)} = f_{j,n}^{(k)} + (r_j - r_{j-1}) \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m a_{j,m}^{(k-1)} \left(\psi_{j,n-m}^{(k)} + \psi_{j,n+m}^{(k)} \right);$$

$$f_{1,n}^{(k)} = 4\tau (-1)^{n+1} q_1^{(k)} + 2\tau r_1 \xi_n^{(k)}, f_{2,n}^{(k)} = 4\tau \left((-1)^{n+1} q_2^{(k)} + q_1^{(k)} \right).$$

Здесь $\phi_{j,p}^{(k)}$ и $\psi_{j,p}^{(k)}$ — коэффициенты Фурье функций $\Lambda_j^{(k)}(r)$ и $C_j^{(k)}(r)$ по системам собственных функций $\{X_{j,p}(r)\}_{p=0}^{\infty}$ задач Штурма–Лиувилля (14); $\xi_n^{(k)}$ — коэффициенты Фурье функции $F^{(k)}(r)$ по системе собственных функций $\{X_{1,n}(r)\}_{n=0}^{\infty}$.

Для решения бесконечных систем (17) применяем метод редукции [17, 18]. При этом порядок усечения N_j , $j = 1, 2$ каждой системы определяем на основе оценки Рунге [13]. Таким образом, на временном слое $t = t_k$ решения краевых задач (9), (10) и (11), (12) могут быть представлены в аналитической форме в виде тригонометрических рядов Фурье

$$T_1(r, t_k) \approx \sum_{n=0}^{N_1} \delta_n a_{1,n}^{(k)} \cos \frac{\pi n r}{r_1};$$

$$T_2(r, t_k) \approx \sum_{n=0}^{N_2} \delta_n a_{2,n}^{(k)} \cos \frac{\pi n (r - r_1)}{r_2 - r_1},$$

коэффициенты $a_{j,n}^{(k)}$ которых находим из конечных систем $(N_j + 1)$ -го порядка [18].

Выбор шага τ по временной переменной осуществляется согласно правилу двойного пересчета [19]. В фиксированный момент времени t_* сравниваются распределения температуры в проводящем слое электронагревательного элемента ($0 \leq r \leq r_1$), полученные в результате вычислений с шагом $\tau_1 = \tau$ и $\tau_2 = \tau/2$. Выбирается такое значение τ , при котором

$$\frac{\left\| T_1^{\tau/2}(r, t_*) - T_1^{\tau}(r, t_*) \right\|_2}{\left\| T_1^{\tau/2}(r, t_*) \right\|_2} < \varepsilon,$$

где ε — заданное значение относительной погрешности; норма $\| \cdot \|_2$ соответствует критерию малости среднеквадратичной ошибки [19].

Результаты численных расчетов. В рассматриваемой модели примем значение силы тока $I = \text{const}$. Тогда при заданных значениях

параметров задачи $I = 9 \text{ А}$, $r_1 = 0,15 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ находим

$$J^2 = \left(\frac{I}{\pi r_1^2} \right)^2 = 1,62 \cdot 10^{16} \text{ А}^2/\text{м}^4.$$

Для нихромовой проволоки удельное электрическое сопротивление слабо зависит от температуры и при расчетах его можно полагать постоянным: $\gamma_0 = 1,1 \cdot 10^{-6} \text{ Ом}\cdot\text{м}$ [20].

Теплофизические параметры материалов электронагревательного элемента приведены ниже [20]. Плотности этих материалов принимаются постоянными и равными $\rho_1 = 8300 \text{ кг}/\text{м}^3$, $\rho_2 = 5200 \text{ кг}/\text{м}^3$. Значения остальных параметров: $\alpha = 400 \text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{К})$; $R_T = 0,5 \cdot 10^{-4} (\text{м}^2 \times \text{К})/\text{Вт}$; $T_0 = 300 \text{ К}$; $T_{\text{пл}} = 1200 \text{ К}$ (температура плавления нихрома).

Теплофизические свойства нихрома

$T, \text{ К}$	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200
$\lambda_1, \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$	12,8	14,3	16,0	17,7	19,4	21,2	22,7	24,0	25,2	26,1
$c_1, \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$	450	465	480	495	505	515	520	525	530	535

Теплофизические свойства керамики

$T, \text{ К}$	300	500	700	900	1100	1300	1500
$\lambda_2, \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$	2,0	1,8	1,6	1,5	1,6	1,8	2,0
$c_2, \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$	460	505	550	600	640	680	725

Варьируя в рассматриваемой задаче параметр d , находим критическое значение $d_{\text{кр}}$ толщины керамического покрытия электронагревательного элемента. Как следует из расчетов, $d_{\text{кр}} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ м}$. Характер эволюции температуры $T_1(0, t)$ при $d = d_{\text{кр}}$ (рис. 2, *a*) подтверждает, что в процессе нагрева проводника температура на его оси достигает значения температуры плавления материала, равного 1200 К.

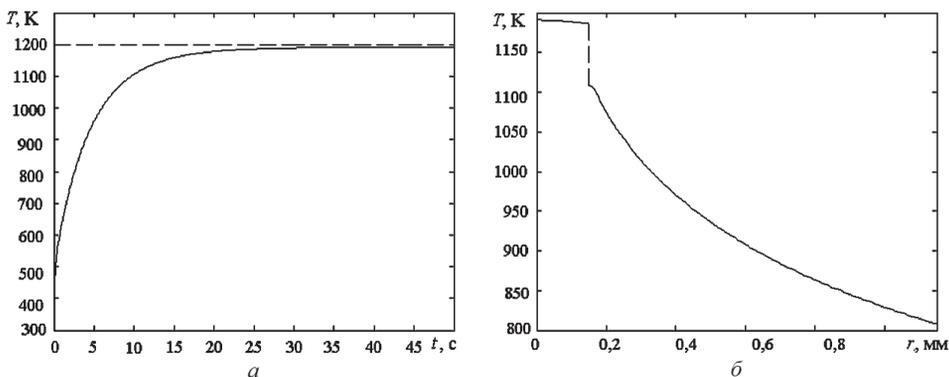


Рис. 2. Эволюция температуры $T_1(0, t)$ наиболее нагретой осевой точки электронагревательного элемента при $d = 1 \text{ мм}$ (*a*) и температурное поле в осевом сечении электронагревательного элемента в момент времени $t = 40 \text{ с}$ (*б*)

Распределение температуры в осевом сечении электронагревательного элемента для момента времени $t = 40$ с, соответствующего выходу на стационарный режим, приведено на рис. 2, б. При этом температура охлаждаемой поверхности керамического покрытия достигает 810 К, а перепад температуры на контактной поверхности составляет 80 К.

Заключение. Предложенный в работе алгоритм позволяет находить нестационарное температурное поле в многослойных областях цилиндрической формы при наличии термического сопротивления контактных поверхностей, а также учитывать изменение теплофизических свойств материалов и мощности источников выделения теплоты в зависимости от температуры. Применение этого алгоритма для решения задачи о нахождении критической толщины защитного керамического покрытия позволило определить область рабочих режимов электронагревательного элемента с установившейся температурой, не превышающей температуры плавления проводника.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зарубин В.С. Инженерные методы решения задач теплопроводности. М.: Энергоатомиздат, 1983. 328 с.
2. Димитриенко Ю.И. Механика композиционных материалов при высоких температурах. М.: Машиностроение, 1997. 368 с.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. М.: Наука, 1989. Т. 6. Гидродинамика. 752 с.
4. Франк-Каменецкий Д.А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Наука, 1967. 481 с.
5. Малов Ю.И., Нужненко Т.А. Математическое моделирование процесса нестационарной теплопроводности в цилиндрическом тепловыделяющем элементе // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2003. № 2. С. 20–27.
6. Стельмах Л.С., Зиненко Ж.А., Радугин А.В., Столин А.М. Численное исследование тепловой неустойчивости при нагреве керамических материалов // Инженерно-физический журнал. 1991. Т. 61. № 3. С. 452–457.
7. Малов Ю.И., Мартинсон Л.К. Влияние теплофизических параметров оболочки на критический режим сферического тепловыделяющего элемента // Необратимые процессы в природе и технике: Тез. докл. Третьей Всеросс. конф. М., 2005. С. 151–152.
8. Димитриенко Ю.И., Минин В.В., Сыздыков Е.К. Моделирование внутреннего теплопереноса и термонапряжений в композитных оболочках при локальном нагреве // Математическое моделирование. 2011. Т. 23. № 9. С. 14–32.
9. Чигирёва О.Ю. Математическое моделирование процесса разогрева двухслойного цилиндра движущимся кольцевым источником теплоты // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2011. № 2. С. 98–106.
10. Аверин Б.В. О тепловой устойчивости многослойных плоских стенок при нагреве внутренними источниками, зависящими от температуры // Вестник Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2009. № 2. С. 177–185.
11. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высш. шк., 2001. 550 с.

12. Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 368 с.
13. Чигирёва О.Ю. Расчет оптимальной толщины слоя термоизоляции в многослойном цилиндрическом пакете // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2005. № 1. С. 94–101.
14. Малов Ю.И., Мартинсон Л.К. Приближенные методы решения краевых задач. М.: Изд-во МВТУ им. Н.Э. Баумана, 1989. 26 с.
15. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. 587 с.
16. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1999. 798 с.
17. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.
18. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. М.: Физматгиз, 1962. 708 с.
19. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров. М.: Высш. шк., 1994. 544 с.
20. Чиркин В.С. Теплофизические свойства материалов: Справочное руководство. М.: Физматгиз, 1959. 356 с.

REFERENCES

- [1] Zarubin V.S. Inzhenernye metody resheniya zadach teploprovodnosti [Engineering methods for solving problems of heat conduction]. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1983. 329 p.
- [2] Dimitrienko Yu.I. Mekhanika kompozitsionnykh materialov pri vysokikh temperaturakh [Mechanics of composite materials at high temperatures]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1997. 368 p.
- [3] Landau L.D., Lifshic E.M. Teoreticheskaja fizika. V 10 t. T. 6. Gidrodinamika [Theoretical physics. Ten-volume set. Vol. 6. Fluid mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1989. 752 p. (Eng. Ed.: Landau L.D., Lifshitz E.M. Fluid Mechanics. Vol. 6 (Course of Theoretical Physics S). Second Ed. Oxford, New York, Pergamon Press, 1987.).
- [4] Frank-Kamenetskiy D.A. Diffuziya i teploperedacha v khimicheskoy kinetike. [Diffusion and Heat Transfer in Chemical Kinetics]. Moscow, Nauka Publ., 1967. 481 p.
- [5] Malov Yu.I., Nuzhnenko T.A. Mathematical simulation of unsteady heat conduction in a cylindrical fuel element. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2003, no. 2, pp. 20–27 (in Russ.).
- [6] Stel'makh L.S., Zinenko Zh.A., Radugin A.V., Stolín A.M. Numerical research the thermal instability during heating of ceramic materials. *Inzhenerno-fizicheskij zhurnal* [J. Eng.Phys. Thermophys.], 1991, vol. 61, no. 3, pp. 452–457 (in Russ.).
- [7] Malov Yu.I., Martinson L.K. Effect of thermal shell parameters on the critical mode of the spherical fuel element *Tezisy dokl. 3 Vseross. Konf. "Neobratimye protsessy v prirode i tekhnike"* [Summ. Rep. 3th All-Russ. Conf. "Irreversible processes in the Nature and Technology"], Moscow, 24–25 January 2005, MGTU im. N.E. Bauman Publ., 2005, pp. 151–152 (in Russ.).
- [8] Dimitrienko Yu.I., Minin V.V., Syzdykov E.K. Modeling of internal heat and mass transfer and thermal stresses in composite shells with local heating. *Mat. Model.* [Math. Models Comput. Simul.], 2011, vol. 23, no. 9, pp. 14–32 (in Russ.).
- [9] Chigireva O.Yu. Mathematical simulation of heating process of two-layer cylinder by moving ring source of heat. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2011, no. 2, pp. 98–106 (in Russ.).

- [10] Averin B.V. On the thermal stability of multilayer planar walls during heating by internal sources, depending on the temperature. *Vestn. Samar. Gos. Univ., Fiz.-Mat. Ser.* [J. Samara State Univ., Phys.-Math. Ser.], 2009, no. 2, pp. 177–185 (in Russ.).
- [11] Kartashov E.M. *Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tverdykh tel* [Analytical techniques in the theory of thermal conductivity of solids]. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 2001. 550 p.
- [12] Martinson L.K., Malov Yu.I. *Differentsial'nye uravneniya matematicheskoy fiziki* [The differential equations of mathematical physics]. Moscow, MGТУ im. N.E. Baumana Publ., 2002. 368 p.
- [13] Chigireva O.Yu. Calculation of the optimal layer thickness of thermal insulation in a multilayer cylindrical package. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2005, no. 1, pp. 94–101 (in Russ.).
- [14] Malov Yu.I., Martinson L.K. *Priblizhennyye metody resheniya kraevykh zadach* [Approximate methods for solution of boundary problems]. Moscow, MGТУ im. N.E. Baumana Publ., 1989. 26 p.
- [15] Lions G.L. Some methods for the solution of nonlinear boundary problems. Paris, Dunod, 1969. (Russ. ed.: Lions Zh.-L. *Nekotorye metody resheniya nelineynykh kraevykh zadach*. Moscow, Mir Publ., 1972. 587 p.).
- [16] Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. *Uraveniya matematicheskoy fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. M.: MGU Publ., 1999. 798 p. (Eng. Ed.: Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Equations of Mathematical Physics*. Oxford, N.Y., DOVER Publ. Inc., 1964. 784 p.).
- [17] Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Funksional'nyy analiz* [Function analysis] Moscow, Nauka Publ., 1984. 752 p. (Eng. Ed.: Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Function analysis*. 2nd ed. Oxford, New York, Pergamon Press, 1982. 589 p.)
- [18] Kantorovich L.V., Krylov V.I. *Priblizhennyye metody vysshego analiza*. [Approximate methods of higher analysis] Moscow, Fizmatgiz Publ., 1962. 708 p. (Kantorovich L.V., Krylov V.I. *Approximate Methods of Higher Analysis*. Translated by C.D. Benster. Groningen, P. Noordhoff Ltd., 1958. 681 p.)
- [19] Amosov A.A., Dubinskiy Yu.A., Kopchenova N.V. *Vychislitel'nye metody dlya inzhenerov* [Computational methods for engineers]. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 1994. 544 p.
- [20] Chirkin V.S. *Teplofizicheskie svoystva materialov: Spravochnoe rukovodstvo* [Thermophysical properties of materials. Reference manual]. M.: Fizmatgiz, 1959. 356 p.

Статья поступила в редакцию 03.03.2014

Леонид Карлович Мартинсон — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры “Физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 150 научных работ в области математического моделирования нелинейных процессов переноса, соавтор трех учебников по математике и физике для вузов.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

L.K. Martinson — Dr. Sci. (Phys.-Math.), professor of “Physics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 150 publications in the field of mathematical simulation of nonlinear processes of transfer, co-author of three textbooks on physics and mathematics for universities.
Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Ольга Юрьевна Чигирёва — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры “Математическое моделирование” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор ряда научных работ в области математической физики и математического моделирования.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

O.Yu. Chigireva — Cand. Sci. (Phys.-Math.), assoc. professor of “Mathematical Simulation” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of a number of publications in the field of mathematical simulation and mathematical physics. Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

В Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана вышла в свет книга

Н.П. Деменков, Г.Н. Васильев

Управление техническими системами

Изложены теоретические положения процедур анализа и синтеза систем управления при проектировании станков с числовым программным управлением на основе интеграции силовых, информационных и управляющих модулей. Приведены примеры расчета систем автоматического управления и их элементов.

Для студентов машиностроительных специальностей вузов. Может быть полезен инженерно-техническим работникам предприятий, проектных организаций и институтов, занимающимся автоматизацией производственных процессов и их управлением в машиностроении и других отраслях промышленности.

Часть I. Анализ систем управления

- Глава 1. Основные положения теории систем автоматического управления
- Глава 2. Линейные динамические модели систем автоматического управления техническими объектами и способы их преобразования
- Глава 3. Математические модели систем автоматического управления в переменных состояниях
- Глава 4. Временные и частотные характеристики систем автоматического управления
- Глава 5. Устойчивость линейных систем
- Глава 6. Качество линейных систем автоматического управления
- Глава 7. Построение переходного процесса и повышение качества систем автоматического управления

Часть II. Описание методов синтеза систем управления

- Глава 8. Аналитические методы синтеза линейных систем автоматического управления
- Глава 9. Оптимизация систем управления

Часть III. Проектирование систем управления технологическим оборудованием

- Глава 10. Этапы проектирования систем управления технологическим оборудованием
- Глава 11. Проектирование исполнительных механизмов систем управления
- Глава 12. Технологический контур систем числового программного управления
- Глава 13. Экстремальный контур систем числового программного управления
- Глава 14. Микропроцессорные системы управления технологическим оборудованием