УДК 519.248

МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТАТИСТИК ТИПА КОЛМОГОРОВА – СМИРНОВА В ИСПЫТАНИЯХ С ПЕРЕМЕННОЙ НАГРУЗКОЙ ДЛЯ КОНЕЧНЫХ ОБЪЕМОВ ВЫБОРОК

В.И. Тимонин, **Н.Д. Тянникова**

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: tiannikova@yandex.ru

В теории форсированных испытаний широко применяют испытания в переменном режиме. Они предназначены для определения одинаковых функций пересчета результатов форсированных испытаний на нормальный режим для любых партий однотипных изделий. Предложен усовершенствованный метод проведения испытаний в переменном режиме, позволяющий с большей точностью оценивать функции пересчета. Получен метод вычисления точных распределений статистик типа Колмогорова – Смирнова, предназначенных для проверки гипотез о виде функции связи. Особенность используемых методов — применение оценок Каплана – Мейера функции надежности для сокращения объемов и продолжительности испытаний в переменных режимах. Знание точных распределений применяемых статистик важно вследствие того, что в реальности не бывает больших объемов выборок изделий, выделяемых для проведения испытаний. Однако в большинстве случаев используют асимптотические распределения статистик, что зачастую приводит к большим погрешностям при анализе результатов испытаний. Предлагаемый метод позволяет устранить этот недостаток.

***Ключевые слова*:** форсированные испытания, испытания в переменных режимах, непараметрическая статистика, статистики Колмогорова – Смирнова, оценки Каплана – Мейера.

CALCULATION METHOD OF THE DISTRIBUTION STATISTICS OF KOLMOGOROV-SMIRNOV TYPE IN TESTINGS WITH ALTERNATE LOAD FOR FINITE SAMPLE SIZE

V.I. Timonin, **N.D. Tyannikova**

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: tiannikova@yandex.ru

In theory, the accelerated tests are implementing using widely the testings in an alternating mode. These testings are designed to determine the same scaling functions for recalculating of the accelerated tests results to the normal mode for any parts of single-type products. An improved method for testing in an alternating mode is proposed that allows estimating scaling functions for the recalculating with higher accuracy. The calculation method of the exact distributions statistics of Kolmogorov-Smirnov type designed to test hypotheses about the form of link function is given. The feature of these methods is the application of the Kaplan-Meier estimation of the reliability function to reduce the amount and duration of the alternative modes testings. Knowledge of the exact distributions of applied statistics is important due to the fact that in reality there are no large sample size of products allocated for *testings. However, in most cases the asymptotic distributions of the statistics are used. It often leads to large errors in the analysis of test results. The proposed method can eliminate this drawback.*

Keywords**:** accelerated testing, testing in alternative modes, non-parametric statistics, Kolmogorov – Smirnov statistics, Kaplan – Meier estimates.

Форсированные испытания радиоэлектронной аппаратуры широко применяют для определения показателей их надежности [1, 2]. При этом основное внимание уделяется разработке непараметрических методов анализа, которые не предполагают знания законов распределения наработок до отказа изделий [3, 4].

Рассмотрим общую постановку задачи. Пусть наработки одного и того же изделия $\xi_0,\ \xi_*$ в режимах $\varepsilon_0, \varepsilon_*$ связаны соотношением

$$H_0: \quad \xi_0 = \varphi\left(\xi_*\right), \tag{1}$$

где $\varphi\left(x\right)$ — некоторая функция.

В работе [5] показано, что для проверки (1) испытания в переменном режиме $\tilde{\varepsilon}(t)$ должны проводиться следующим образом. Разбитые случайным образом на n групп по m изделий $N = mn$ изделий начинают испытываться в режиме ε_0, при первом отказе изделия в группе оставшиеся $m-1$ изделия переключаются в режим ε_*. Пусть $\xi_1^i, \xi_2^i, \ldots, \xi_m^i$ — теоретические наработки до отказа в режиме ε_0 изделий i-й группы; $\theta_0^i, \theta_{*1}^i, \ldots, \theta_{*(m-1)}^i$ — реальные времена работы i-й группы в режимах $\varepsilon_0, \varepsilon_*$. Тогда $\theta_0^i = \min\left\{\xi_1^i, \ldots, \xi_m^i\right\}$. Как доказано в работе [6], при соблюдении некоторых слабых ограничений на распределение наработок ξ_*^i, при справедливости (1) величины $\eta_1^i = \theta_0^i + \varphi\left(\theta_{*1}^i\right), \ldots, \eta_{(m-1)}^i = \theta_0^i + \varphi\left(\theta_{*(m-1)}^i\right)$ будут совпадать с наработками ξ_j^i. Назовем η_j^i прогнозными наработками изделия в нормальном режиме.

В работах [7–9] предложен метод оценки функции $\varphi\left(x\right)$ по результатам испытаний в переменном режиме $\tilde{\varepsilon}(t)$. Хотя этот метод и позволяет существенно сократить продолжительность и стоимость испытаний по сравнению с применяемыми ранее методами [5], тем не менее точность оценки $\varphi\left(x\right)$ существенно падает при увеличении размера группы m [9]. Чтобы устранить этот недостаток, необходима следующая модификация испытаний с переменной нагрузкой: переключение в форсированный режим в каждой группе следует проводить не после первого отказа в режиме ε_0, а после r-го отказа. В этом случае статистическая обработка результатов существенно усложняется по описанным ниже причинам. В настоящей работе представлен случай $r = 2$, которого достаточно для большинства практических задач. Случай произвольного r принципиально не отличается от рассматриваемого случая $r = 2$, увеличивается лишь объем вычислений.

Пусть $\theta_{01}^i, \theta_{02}^i$ — первая и вторая порядковые статистики из i-й выборки объемом m, $\theta_{01}^i < \theta_{02}^i$. Аналогично случаю $r = 1$ обозначим $\theta_{*1}^i, \ldots, \theta_{*(m-2)}^i$ — реальные времена работы i-й группы в режиме ε_*, а $\xi_1^i, \xi_2^i, \ldots, \xi_m^i$ — теоретические наработки до отказа в режиме ε_0 изделий i-й группы. Точно так же определяют величины $\eta_1^i = \theta_{02}^i + \varphi\left(\theta_{*1}^i\right), \ldots, \eta_{(m-2)}^i = \theta_{02}^i + \varphi\left(\theta_{*(m-2)}^i\right)$ — прогнозируемые наработки изделий в нормальном режиме.

Пусть $P_0(t)$ — функция надежности изделий в режиме ε_0. Ее можно оценить по двум выборкам. Пусть $Q = \{\xi_1^1, \xi_2^1, \eta_1^1, \ldots, \eta_{m-2}^1, \ldots \ldots, \xi_1^n, \xi_2^n, \eta_1^n, \ldots, \eta_{m-2}^n\}$ — объединенная выборка из реальных и прогнозируемых наработок до отказов всех изделий в нормальном режиме. Если справедлива гипотеза (1), то функцию надежности $P_0(t)$ одного изделия группы можно оценить по выборке Q из всех значений наработок (стандартная выборочная оценка):

$$\widehat{P}_q\,(t) = 1 - \frac{d_1\,(t)}{mn}, \tag{2}$$

где $d_1(t)$ — число элементов выборки Q, меньших t. Аналогично $\Theta = \{\theta_{01}^i, \theta_{02}^i, \overline{i = 1, n}\}$ — выборка из реальных наработок на отказ изделий в нормальном режиме. В этом случае для оценки надежности системы необходимо использовать оценку Каплана – Мейера [10, 11]. Пусть $d_2(t)$ — число элементов выборки Θ, меньших t. Тогда оценка Каплана – Мейера имеет вид

$$\widehat{P}_\theta\,(t) = \prod_{j=1}^{d_2(t)} \left(1 - \frac{1}{S_j}\right), \tag{3}$$

где S_j — число изделий, функционирующих в нормальном режиме перед j-м отказом выборки $\Theta = \{\theta_{01}^i, \theta_{02}^i, \overline{i = 1, n}\}$.

В работе [6] доказано, что при соблюдении некоторых слабых ограничений на распределение наработок ξ_*^i гипотеза (1) эквивалентна статистической гипотезе

$$H_0^1 \;:\; P_q(t) = P_\theta(t). \tag{4}$$

Гипотезу (4) можно проверить, сравнив функции (2) и (3). В настоящей работе рассмотрен метод проверки (4), основанный на статистиках типа Колмогорова – Смирнова [12, 13], общий вид которых можно задать следующим образом:

$$T = \max \rho(\widehat{P}_\theta\,(x),\, \widehat{P}_q\,(x)), \tag{5}$$

где $\rho(x,\, y)$ — некоторая функция, определяющая расстояние между $x,\, y$. Вид функции $\rho(x,\, y)$ можно получить методами, аналогичными тем, которые применяли при выводе статистик типа Колмогорова – Смирнова для частного случая $r = 1$ [9].

Анализ оценки Каплана – Мейера (3) показывает, что ее значение зависит от последовательности появления отказов $\theta_{01}^i, \theta_{02}^i, i = \overline{1, n}$. В связи с этим для вычисления распределения статистики $T = \max \rho(\overset{\frown}{P}_\theta\ (x), \overset{\frown}{P}_q\ (x))$ необходимо использовать формулу полной вероятности, которая в таком случае имеет вид

$$P\,(T < h) = \sum_{\vec{\nu}} P\,(T < h/\vec{\nu})P(\vec{\nu}). \qquad (6)$$

Вектор $\vec{\nu}$ определяется следующим образом. Рассмотрим вариационный ряд $\Delta = (\delta_1 < \delta_2 < \cdots < \delta_{2n})$ элементов выборки $\Theta = \{\theta_{01}^i, \theta_{02}^i, \overline{i = 1, n}\}$. Примем

$$z_k = \begin{cases} 1, \text{ если } \delta_k = \theta_{02}^i,\ i = \overline{1, n} \\ 0, \text{ если } \ \delta_k = \theta_{01}^i,\ i = \overline{1, n} \end{cases},\ k = 1, \ldots, 2n\ ;\ \vec{z} = (z_1, z_2, \cdots, z_{2n})\,.$$

Пусть $k_1 < k_2 < \cdots < k_n$, где $z_{k_i} = 1$. Обозначим $\nu_i = k_i,\ i = \overline{1, n}$. Отметим, что $2 \le \nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_n = 2n$, $2i \le \nu_i \le n + i$. Назовем вектор $\vec{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n)$ допустимым. Очевидно, что вектора $\vec{z}$ и $\vec{\nu}$ находятся во взаимно-однозначном соответствии. Обозначим $R_i,\ i = \overline{1, n-1}$ — число нулей между i-й и $(i+1)$-й единицами в векторе $\vec{z}$.

Чтобы применить формулу (6), вычислим сначала $P(\vec{\nu})$. Предварительно примем $V_i = \sum\limits_{k=1}^{i-1} z_k$, $V_1 = 0$, $i = \overline{2, 2n}$.

Утверждение 1. Распределение вероятностей случайных векторов $\vec{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ имеет вид

$$P(\vec{\nu}) = \frac{m^n (m-1)^n n! \prod\limits_{i=1}^{n} (\nu_i - 2i + 1)}{\prod\limits_{i=1}^{2n} (mn - i + 1 - V_i(m-2))}.$$

◄ Статистика $T = \max \rho(\overset{\frown}{P}_\theta\ (x), \overset{\frown}{P}_q\ (x))$ не зависит от закона распределения наработок на отказ, поэтому примем в качестве распределения наработок на отказ равномерное распределение на интервале $[0, 1]$. Совместная плотность двух порядковых статистик $\theta_{01}^i, \theta_{02}^i$ имеет вид $f(t, \tau) = m(m-1)(1-t)^{m-2}, 0 \le \tau \le t \le 1$ [14, 15]. В силу независимости отказов в разных системах получим, что совместная плотность совокупности случайных величин $\theta_{01}^i, \theta_{02}^i, \overline{i=1,n}$, равна

$$f(\vec{t}, \vec{\tau}) = m^n(m-1)^n \prod_{i=1}^{n} (1-t_i)^{m-2}, \quad 0 \le \tau_i \le t_i \le 1.$$

Пусть $\theta = (\theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_{2n})$ — одна из перестановок величин $\theta_{01}^i, \theta_{02}^i, \overline{i=1,n}$, приводящая к вектору $\vec{z}$ (и $\vec{\nu}$). Совместная плотность $f(\vec{t}, \vec{\tau})$ может быть записана как

$$f(u_1, u_2, \ldots, u_{2n}) = m^n(m-1)^n \prod_{i=1}^{2n} (1-u_i)^{z_i(m-2)}.$$

Тогда вероятность перестановки $\theta = (\theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_{2n})$ составляет

$$P(\theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_{2n}) =$$
$$= m^n(m-1)^n \int_0^1 (1-u_1)^{z_1(m-2)} du_1 \int_{u_1}^1 (1-u_2)^{z_2(m-2)} du_2 \cdots \times$$
$$\times \int_{u_{2n-1}}^1 (1-u_{2n})^{z_{2n}(m-2)} du_{2n} = \frac{m^n(m-1)^n}{\prod\limits_{i=1}^{2n} (mn-i+1-V_i\,(m-2))}.$$

Учитывая число перестановок, приводящих к одному и тому же вектору $\vec{\nu}$, определяем

$$P(\vec{\nu}) = \frac{m^n(m-1)^n n! \prod\limits_{i=1}^{n} (\nu_i - 2i + 1)}{\prod\limits_{i=1}^{2n} (mn-i+1-V_i\,(m-2))}. \blacktriangleright$$

Для использования формулы (5) необходимо получить алгоритм перебора всех допустимых векторов $\vec{\nu}$. Зададим вектора $\vec{\nu}^0 = (\nu_1^0, \ldots, \nu_n^0)$, где $\nu_i^0 \le \nu_i$ и $\vec{\nu}^L = \left(\nu_1^L, \ldots, \nu_n^L\right)$, $\nu_i^L \ge \nu_i$ для любого допустимого вектора $\vec{\nu}$. Нетрудно заметить, что $\nu_i^0 = 2i$, $\nu_i^L = i + n$, $i = \overline{1,n}$. Алгоритм перебора начинается с вектора $\vec{\nu}^0 = (\nu_1^0, \ldots, \nu_n^0)$. Пусть на $(j-1)$-м шаге имеется допустимый вектор $\vec{\nu}^{j-1} = \left(\nu_1^{j-1}, \ldots, \nu_n^{j-1}\right)$. Тогда на j-м шаге сначала находим минимальный номер k, для которого выполняется неравенство $\nu_{k+1}^{j-1} - \nu_k^{j-1} \ge 2$ и полагаем $\vec{\nu}^j = \left(\nu_1^0, \nu_2^0, \ldots, \nu_{k-1}^0, \nu_k^{j-1} + 1, \nu_{k+1}^{j-1}, \nu_{k+2}^{j-1}, \ldots, \nu_n^{j-1}\right)$. Алгоритм завершается на шаге N, когда $\vec{\nu}^N = \vec{\nu}^L$.

Для вычисления вероятностей $P(T < h/\vec{\nu})$ введем следующие обозначения. Пусть $\Gamma = (\gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_{mn})$ — вариационный ряд объединенной выборки Q. Примем

$$u_k=\begin{cases}0, & \text{если } \gamma_k=\theta_{01}^i, \quad i=\overline{1,n};\\ 1, & \text{если } \gamma_k=\theta_{02}^i, \quad i=\overline{1,n}; \\ 2 & \text{в противном случае;}\end{cases} \quad k=\overline{1,mn}; \vec{u}=(u_1,\ldots,u_{mn}).$$

Если $u_k=2$, то в вариационном ряду Γ на k-м месте находится прогнозируемая наработка на отказ, если $u_k=1$, то — наработка, после которой очередная группа переключается в форсированный режим. Такую наработку назовем открывающей, остальные наработки в нормальном режиме — неоткрывающими. Очевидно, что множество $U=\{\vec{u}\}$ разбивается на непересекающиеся подмножества $U_{\vec{z}}$, $U=\bigcup_{\vec{z}} U_{\vec{z}}$, причем подмножества $U_{\vec{z}}$ характеризуются тем, что между i-й и $(i+1)$-й единицами в векторе $\vec{u}$ находятся R_i нулей, $i=\overline{1,n-1}$.

Появление единицы или нуля на k-м месте в векторе $\vec{u}=(u_1,\ldots$ $\ldots,u_{mn})$ означает, что изменяется оценка Каплана – Мейера функции надежности, в противном случае она не изменяется.

Обозначим l_0^i, l_1^i, l_2^i — число нулей, единиц, двоек в векторе $\vec{u}=(u_1,\ldots,u_{mn})$ до i-го места включительно. Вектор $\vec{u}=(u_1,\ldots,u_{mn})$ удовлетворяет следующим условиям:

1) вектор $\vec{u}$ состоит из n единиц, n нулей и $n\,(m-2)$двоек;

2) $l_0^i\geq l_1^i$;

3) $l_2^i\leq l_1^i(m-2)$.

Такой вектор $\vec{u}$ назовем допустимым.

Если вектор $\vec{\nu}=(\nu_1,\nu_2,\ldots\nu_n)$ фиксирован (фиксирован и вектор $\vec{z}$), то оценка Каплана – Мейера определяется однозначно и имеет вид

$$\widehat{P_\theta}\,(t)=\begin{cases}1, & d_2\,(t)=0;\\ \displaystyle\prod_{i=1}^{d_2(t)}\left(1-\frac{1}{(m-2)\,(n-V_i)+2n-i+1}\right); & 1\leq d_2\,(t)\leq 2n-1.\\ 0, & d_2\,(t)=2n;\end{cases}$$

Здесь $d_2(t)$ — число элементов выборок Θ, меньших t.

В силу однозначности определения оценки $\widehat{P_\theta}\,(t)$ при фиксированном векторе $\vec{\nu}$ найдем условные распределения $P(\vec{u}/\vec{\nu})$. Обозначим $s_i, i=\overline{1,n}$ — число двоек между i-й и $(i+1)$-й единицами в векторе $\vec{u}$.

Утверждение 2. Условное распределение вероятностей $P(\vec{u}/\,\vec{\nu})$ имеет вид

$$P(\vec{u}/\vec{\nu})=\frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\left(A_{i(m-2)-s_1-s_2-\ldots-s_{i-1}}^{s_i}\right)\prod_{i=1}^{2n}\left(mn-i+1-V_i(m-2)\right)}{(mn)!},$$

где A_d^l — число размещений из d элементов по l элементам.

◀ Распределение вероятностей случайных векторов $\vec{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \ldots$ $\ldots, \nu_n)$ получено в утверждении 1:

$$P(\vec{\nu}) = P\left(U_{\vec{z}}\right) = \frac{m^n (m-1)^n n! \prod_{i=1}^{n} (\nu_i - 2i + 1)}{\prod_{i=1}^{2n} (mn - i + 1 - V_i(m-2))}.$$

Поскольку все перестановки элементов $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{mn}$ при справедливости гипотезы (1) равновероятны, вероятность одной такой перестановки равна $\dfrac{1}{(mn)!}$. Число перестановок, приводящих к вектору $\vec{u}$ при фиксированном векторе $\vec{\nu}$:

$$N(\vec{u} \cap \vec{v}) = \\ = n! m^n (m-1)^n \prod_{i=1}^{n} C^1_{\nu_i - 2(i-1) - 1} \prod_{i=1}^{n} \left(s_i! C^{s_i}_{i(m-2) - s_1 - s_2 - \ldots - s_{i-1}} \right) = \\ = n! m^n (m-1)^n \prod_{i=1}^{n} (\nu_i - 2i + 1) \prod_{i=1}^{n} \left(A^{s_i}_{i(m-2) - s_1 - s_2 - \ldots - s_{i-1}} \right).$$

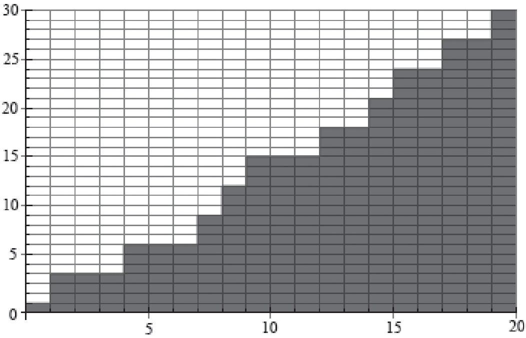
Тогда

$$P(\vec{u} \cap \vec{\nu}) = \frac{n! m^n (m-1)^n \prod_{i=1}^{n} (\nu_i - 2i + 1) \prod_{i=1}^{n} \left(A^{s_i}_{i(m-2) - s_1 - s_2 - \ldots - s_{i-1}} \right)}{(mn)!}.$$

В итоге по формуле полной вероятности получаем, что условная вероятность

$$P(\vec{u}/\vec{\nu}) = \frac{P(\vec{u} \cap \vec{\nu})}{P(\vec{\nu})} = \\ = \frac{\prod_{i=1}^{2n} (mn - i + 1 - (m-2) V_i) \prod_{i=1}^{n} \left(A^{s_i}_{i(m-2) - s_1 - s_2 - \ldots - s_{i-1}} \right)}{(mn)!}. \blacktriangleright$$

Для вычисления условных вероятностей $P(\vec{u}/\vec{\nu})$ удобно воспользоваться следующей моделью случайного блуждания [9]. Пусть множество ячеек $A_{\vec{\nu}} = \{a_{ij}\}$ удовлетворяет условиям $\nu_A \le i < \nu_{A+1}$ при $0 \le j \le A(m-2)$, $A = \overline{0, n}$, где i — номер столбца; j — номер строки, в которых находится ячейка a_{ij} (рисунок). Будем полагать, что $\nu_0 = 0$, $\nu_{n+1} = 2n + 1$. Частица начинает блуждание из ячейки a_{00}, переходя на w-м шаге из ячейки $a_{l_1^{w-1} + l_0^{w-1}, l_2^{w-1}}$ в ячейку $a_{l_1^w + l_0^w, l_2^w}$, и заканчивает блуждание на mn-м шаге в ячейке $a_{2n, n(m-2)}$. Если $u_w = 1$ или $u_w = 0$,



Множество ячеек случайного блуждания

то происходит скачок вправо $a_{l_1^{w-1}+l_0^{w-1},l_2^{w-1}} \to a_{l_1^{w-1}+l_0^{w-1}+1,l_2^{w-1}}$, в противном случае вверх $a_{l_1^{w-1}+l_0^{w-1},l_2^{w-1}} \to a_{l_1^{w-1}+l_0^{w-1},l_2^{w-1}+1}$. Таким образом, траектории частицы будут находиться во взаимно-однозначном соответствии с допустимыми векторами $\vec{u}$. Множество ячеек случайного блуждания $A_{\vec{\nu}}$ при $n = 10$, $m = 5$ показано на рисунке ($\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 5$, $\nu_3 = 8$, $\nu_4 = 9$, $\nu_5 = 10$, $\nu_6 = 13$, $\nu_7 = 15$, $\nu_8 = 16$, $\nu_9 = 18$, $\nu_{10} = 20$).

При фиксированном векторе $\vec{\nu}$ из определения оценки Каплана – Мейера следует, что при попадании траектории случайного блуждания в ячейку $a_{ij} \in A_{\vec{\nu}}$, оценка $\widehat{P}_\theta\ (t)$ принимает значения $\widehat{P}_\theta\ (t) = p_{ij} = \prod_{d=1}^{i} \mu_d$,

$$\mu_d = \begin{cases} 1, \quad d = 0; \\ 1 - \dfrac{1}{2n - d + 1 + (m-2)\,(n - V_d)}, \quad d = \overline{1, 2n-1}; \\ 0, \quad d = 2n. \end{cases}$$

Аналогично $\widehat{P}_q\ (t) = q_{ij} = 1 - \dfrac{i+j}{mn}$. Тогда для статистики (5) справедливо равенство $T = \max\limits_{i,j} \rho(p_{ij}, q_{ij})$. Обозначим $W_i = \sum\limits_{k=1}^{i} z_k$.

Теорема 1. Вероятность $P\,(T < h/\vec{\nu})$ равна $\pi_{2n,n(m-2)}$, которую можно получить повторным соотношением

$$\pi_{ij} = \begin{cases} 1, & i = 0,\ j = 0; \\ \Bigl(\pi_{i-1,j}\dfrac{mn - V_i\,(m-2) - i + 1}{mn - i - j + 1} + \\ \qquad + \pi_{i,j-1}\dfrac{W_i\,(m-2) - j + 1}{mn - i - j + 1}\Bigr)\chi_{ij}, & a_{ij} \in A_{\vec{\nu}}; \\ 0,\ (j = -1)\bigcup((i = \nu_c - 1) \cap ((c-1)(m-2) + \\ \qquad +1 \le j \le c(m-2))), & c = \overline{0, n}. \end{cases}$$

Здесь $\chi_{ij} = \begin{cases} 1, & a_{ij} \in A_0; \\ 0, & a_{ij} \notin A_0 \end{cases}$ — индикатор множества $A_0 =$ $= \{a_{ij} \in A_{\vec{\nu}} \bigcap \rho(p_{ij}, q_{ij}) < h\}$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы, приведенной в работе [9] для $r = 1$.

В качестве примера расчета вероятностей $P\left(T < h\right)$ был рассмотрен случай, когда статистика T имела вид

$$T = m\sqrt{n}\frac{\overset{\frown}{P}{}_q^{m-1}(t)\left|\overset{\frown}{P}_q(t) - \overset{\frown}{P}_\theta(t)\right|}{1 - m\overset{\frown}{P}{}_q^{m-1}(t)\left(1 - \overset{\frown}{P}_q(t)\right)}.$$

Эта статистика была получена в работе [9] для проверки аналогичных гипотез при $r = 1$. Результаты расчета распределения статистики T для $n = \overline{5, 16}$; $m = 5, 6$; $h = 0,7$; $h = 1,2$ приведены в таблице.

Точные вероятности $P\left(T < h\right)$ для квантиля $h = 0{,}7$ (числитель) и 1,2 (знаменатель)

Число групп	Объем групп	
	4	5
5	0,956880/1	0,885474/1
6	0,981976/1	0,948425/0,988438
7	0,992496/1	0,938168/0,995690
8	0,996444/1	0,970792/0,998409
9	0,992467/1	0,966697/0,996309
10	0,996281/1	0,964883/0, 998515
11	0,993859/1	0,981835/0,997569
12	0,996842/1	0,981028/0,998970
13	0,998170/0,999974	0,980870/0,999570
14	0,997515/0,999999	0,989448/0,999361
15	0,998473/0,999996	0,989398/0,9997241
16	0,998114/0,999998	0,989548/0,999625

ЛИТЕРАТУРА

1. *Nelson W.* Accelerated Testing Statistical Models, Test Plans and Data Analysis. New Jersey: John Wiley & Sons, 2004. 601 p.
2. *Карташов Г.Д.* Форсированные испытания аппаратуры. М.: Знание, 1986. 54 с.
3. *Wasserman L.* All of Nonparametric Statistics. N.Y.: Springer Science+Business Media, 2006. 272 p.
4. *Gamiz M.L.*, *Kulasekera K.B.*, *Limnios N.*, *Lindqvist H.* Applied Nonparametric Statistics in Reliability. London: Springer-Verlag, 2011. 227 p.

5. *Карташов Г.Д.* Предварительные исследования в теории форсированных испытаний. М.: Знание, 1980. 51 с.
6. *Карташов Г.Д.* Установление связей между ненаблюдаемыми одновременно случайными величинами // Применение теории вероятностей и математической статистики. Вильнюс. 1981. № 4. С. 18–29.
7. *Тимонин В.И.* Точные распределения ранговых статистик для цензурированных данных в испытаниях с переменной нагрузкой // Труды МВТУ им. Н.Э. Баумана. 1985. № 428. С. 48–54.
8. *Тимонин В.И.* Оптимизация проведения предварительных исследований в теории форсированных испытаний // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2004. № 1. С. 23–33.
9. *Тимонин В.И.*, *Ермолаева М.А.* Оценки Каплана – Мейера в статистиках типа Колмогорова – Смирнова при проверке гипотез в испытаниях с переменной нагрузкой // Электромагнитные волны и электронные системы. 2010. Т. 15, № 7. С. 18–26.
10. *Klein J.P.*, *Moeschberger L.* Survival Analysis Techniques for Censored and Truncated Data. N.Y.: Springer-Verlag, 2003. 536 p.
11. *Meeker W.Q.*, *Escobar L.A.* Statistical Methods for Reliability Data. N.Y.: Wiley, 1998. 701 p.
12. *Гаек Я.*, *Шидак З.* Теория ранговых критериев. М.: Наука, 1971. 376 с.
13. *Elandt-Johnson R.*, *Johnson N.* Survival Models and Data Analysis. N.Y.: Wiley, 1980. 403 p.
14. *Сархан А.*, *Гринберг Б.* Введение в теорию порядковых статистик. М.: Статистика, 1970. 343 с.
15. *Sheshkin D.J.* Handbook of parametric and nonparametric statistical procedures. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2000. 1002 p.

REFERENCES

[1] Nelson W. Accelerated Testing Statistical Models, Test Plans and Data Analysis. New Jersey, John Wiley & Sons, 2004. 601 p.

[2] Kartashov G.D. Forsirovannye ispytaniya apparatury [Accelerated testing of equipment]. Moscow, Znanie Publ., 1986. 54 p.

[3] Wasserman L. All of Nonparametric Statistics. N.Y., Springer Science+Business Media, 2006. 272 p.

[4] Gámiz M.L., Kulasekera K.B., Limnios N., Lindqvist H. Applied Nonparametric Statistics in Reliability. London, Springer-Verlag, 2011. 227 p.

[5] Kartashov G.D. Predvaritel’nye issledovaniya v teorii forsirovannykh ispytaniy [Preliminary researches in the theory of accelerated testing]. Moscow, Znanie Publ., 1980. 51 p.

[6] Kartashov G.D. Establishing links between unobserved simultaneously random variables. *Sb. nauch. tr. Instituta mat. i kib. AN LitSSR. “Primenenie teorii veroyatnostey i matematicheskoy statistiki”* [Collect. Pap. Ins. Math. Informatics of Acad. Sci. LitSSR “Application Probability Theory and Mathematical Statistics”], 1981, no. 4, pp. 18–29 (in Russ.).

[7] Timonin V.I. The exact distribution of rank statistics for censored data in testing in with varying load. *Sb. Tr. MGTU im. N.E. Baumana* [Proc. Bauman Moscow Higher Technical School], 1985, no. 428, pp. 48–54 (in Russ.).

[8] Timonin V.I. Optimization of the preliminary studies in the theory of accelerated testings. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2004, no. 1, pp. 22–33 (in Russ.).

[9] Timonin V.I., Ermolaeva M.A. Kaplan – Meier estimates in Kolmogorov – Smirnov statistics for hypothesis testing within testing in alternative modes. *Elektromagn. volny i electron. sist.* [Electromagn. Waves and Electron. Systems], 2010, vol. 15, no. 7, pp. 18 – 26 (in Russ.).

[10] Klein J.P., Moeschberger L. Survival analysis techniques for censored and truncated data. N.Y., Springer-Verlag, 2003. 536 p.
[11] Meeker W.Q., Escobar L.A. Statistical methods for reliability data. N.Y., Wiley, 1998. 701 p.
[12] Sidak H., Hajek J. Theory of rank tests, 2nd ed. Academic Press, 1999. 435 p. (Russ. Ed.: Gaek Ya., Shidak Z. Teoriya rangovykh kriteriev. Moscow, Nauka Publ., 1971. 376 p.).
[13] Elandt-Johnson R., Johnson N. Survival models and data analysis. N.Y., Wiley, 1980. 403 p.
[14] Sarhan, A. E., Greenberg B. G. (Ed.) Contributions to Order Statistics. John Wiley & Sons, New York – London, 1962, p. 482. (Russ. Ed.: Sarkhan A.E., Grinberg B.G., eds. Vvedenie v teoriyu poryadkovykh statistic. Moscow Statistika Publ., 1970. 343 p.).
[15] Sheshkin D.J. Handbook of parametric and nonparametric statistical procedures. Boca Raton, Chapman & Hall/CRC, 2000. 1002 p.

Статья поступила в редакцию 27.02.2014

Владимир Иванович Тимонин — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры “Высшая математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 50 научных работ в области математической статистики и обработки результатов экспериментов.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

V.I. Timonin — Dr. Sci. (Phys.-Math.), professor of “Higher Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 50 publications in the field of mathematical statistics and data analysis experiments.
Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Нина Дмитриевна Тянникова — аспирантка кафедры “Высшая математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор двух научных работ в области теории надежности, математической статистики.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

N.D. Tyannikova — post-graduate of “Higher Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of two publications in the field of reliability theory, mathematical statistics.
Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.