УДК 517.977

РЕШЕНИЕ ТЕРМИНАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ АФФИННЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ К КВАЗИКАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

Д.А. Фетисов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: dfetisov@yandex.ru

Рассмотрена терминальная задача для многомерных аффинных систем, не линеаризуемых обратной связью. Аффинная система гладкой невырожденной заменой переменных в пространстве состояний преобразована к регулярному квазиканоническому виду, терминальная задача для исходной системы – к эквивалентной терминальной задаче для системы квазиканонического вида. Для систем квазиканонического вида предложен метод решения терминальных задач, основанный на обобщении концепции обратных задач динамики. Доказано достаточное условие применимости предложенного метода к решению терминальных задач. Предложена численная процедура решения терминальных задач для систем квазиканонического вида. Приведен пример построения решения терминальной задачи для системы шестого порядка указанным методом. Полученные результаты могут быть использованы при решении задач терминального управления техническими системами.

***Ключевые слова*: аффинная система, управление, квазиканонический вид, терминальная задача.**

SOLVING OF TERMINAL PROBLEMS FOR MULTIDIMENSIONAL AFFINE SYSTEMS BASED ON TRANSFORMATION TO A QUASICANONICAL FORM

D.A. Fetisov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: dfetisov@yandex.ru

A terminal problem for multidimensional affine systems not linearizable by a feedback is considered. The affine system is transformed to a regular quasicanonical form using the smooth nondegenerate change of variables within the space of states. Also the terminal problem for the initial system is transformed to the equivalent terminal problem for the system of a quasicanonical form. For this system method for solving of terminal tasks was proposed on the basis of a generalization of the concept of inverse problems of dynamics. The sufficient condition of applicability of the proposed method for solving terminal problems is proved. The numerical procedure for solving terminal problems for systems of a quasicanonical form is proposed. An example of solution development of terminal problem for sixth-order system using above mentioned method is given. The obtained results may be used in solving problems of terminal control for technical systems.

***Keywords*: affine system, control, quasicanonical form, terminal problem.**

Введение. Эквивалентные преобразования систем с управлением предоставляют широкие возможности для решения различных задач теории управления. В работах [1–3] изложены методы исследования управляемости, построения множеств достижимости, решения задач стабилизации и терминальных задач на основе преобразования систем к тем или иным каноническим формам. В настоящей работе рассмотрена проблема решения терминальных задач для аффинных систем. Различные подходы к решению этой проблемы можно найти в работах [1, 4, 5–9]. В работах [1, 4] представлены методы решения терминальных задач для аффинных систем, линеаризуемых обратной связью, т.е. таких систем, которые гладкой невырожденной заменой переменных и обратимой заменой управлений преобразуются к линейным управляемым системам. Методы решения терминальных задач для линейных управляемых систем хорошо известны и основаны на применении концепции обратных задач динамики [10]. В настоящее время основной интерес представляет разработка методов решения терминальных задач для систем, не линеаризуемых обратной связью. В работах [5–8] изложены методы решения терминальных задач для таких систем. Однако эти методы охватывают относительно небольшой класс систем, область применимости таких методов накладывает серьезные ограничения на размерность систем, зачастую используется специальный вид векторных полей системы. В связи с этим проблема решения терминальных задач для аффинных систем, не линеаризуемых обратной связью, является актуальной. Именно этой проблеме и посвящена настоящая работа.

Рассмотрим следующую задачу. Для аффинной системы

$$\dot{x} = F(x) + \sum_{j=1}^{m} G_j(x)u_j; \tag{1}$$

$$x = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{т}} \in R^n, \quad u = (u_1, \ldots, u_m)^{\mathrm{т}} \in R^m;$$
$$F(x) = (F_1(x), \ldots, F_n(x))^{\mathrm{т}}, \quad G_j(x) = (G_{1j}(x), \ldots, G_{nj}(x))^{\mathrm{т}};$$
$$F_i(x),\ G_{ij}(x) \in C^\infty(R^n), \quad i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m},$$

не линеаризуемой обратной связью, требуется найти такие непрерывные управления $u_1 = u_1(t)$, ..., $u_m = u_m(t)$, $t \in [0, t_*]$, которые за заданное время t_* переводят систему (1) из начального состояния $x(0) = x_0$ в конечное состояние $x(t_*) = x_*$.

Преобразование системы к квазиканоническому виду. Следующая теорема [11] устанавливает необходимые и достаточные условия, при выполнении которых система (1) преобразуется к квазиканоническому виду

$$\begin{aligned}
&\dot{z}_1^i = z_2^i;\\
&\ldots\\
&\dot{z}_{r_i-1}^i = z_{r_i}^i;\\
&\dot{z}_{r_i}^i = f_i(z^1, \ldots, z^m, \eta) + \sum_{j=1}^{m} g_{ij}(z^1, \ldots, z^m, \eta)u_j, \quad i = \overline{1,m};\\
&\dot{\eta} = q(z^1, \ldots, z^m, \eta);
\end{aligned} \tag{2}$$

$$r_1 + \ldots + r_m = n - \rho, \quad z^i = (z_1^i, \ldots, z_{r_i}^i)^{\text{т}}, \quad \eta = (\eta_1, \ldots, \eta_\rho)^{\text{т}};$$
$$q(z^1, \ldots, z^m, \eta) = (q_1(z^1, \ldots, z^m, \eta), \ldots, q_\rho(z^1, \ldots, z^m, \eta))^{\text{т}}.$$

В формулировке теоремы используются векторные поля

$$F = \sum_{i=1}^{n} F_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad G_j = \sum_{i=1}^{n} G_{ji}(x) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad j = \overline{1, m},$$

взаимно-однозначно соответствующие системе (1) в пространстве состояний R^n, а также векторные поля $\mathrm{ad}_F^0 G_j = G_j$, $\mathrm{ad}_F^k G_j = [F, \mathrm{ad}_F^{k-1} G_j]$, $k = 1, 2, \ldots$, где $[X, Y]$ — коммутатор векторных полей X и Y.

Теорема 1. *Для приведения аффинной системы (1) на множестве $\Omega \subseteq R^n$ к квазиканоническому виду (2) необходимо и достаточно, чтобы:*

1) существовали функции $\varphi_i(x) \in C^\infty(\Omega)$, $i = \overline{1, m}$, удовлетворяющие в множестве Ω системе уравнений в частных производных первого порядка

$$\mathrm{ad}_F^k G_j \varphi_i(x) = 0, \quad k = \overline{0, r_i - 2}, \, i, j = \overline{1, m}, \quad x \in \Omega;$$

2) существовали такие функции $\varphi_{n-\rho+l}(x) \in C^\infty(\Omega)$, $l = \overline{1, \rho}$, что для всех $x \in \Omega$

$$G_j \varphi_{n-\rho+l}(x) = 0, \quad j = \overline{1, m}, \, l = \overline{1, \rho}$$

и отображение $\Phi : \Omega \to \Phi(\Omega)$, задаваемое системой функций

$$\begin{aligned} z_k^i &= F^{k-1} \varphi_i(x), \quad k = \overline{1, r_i}, \, i = \overline{1, m}; \\ \eta_l &= \varphi_{n-\rho+l}(x), \quad l = \overline{1, \rho}, \end{aligned}$$

являлось диффеоморфизмом.

В переменных z^1, …, z^m, η система (1) имеет квазиканонический вид (2). Если матрица коэффициентов при управлениях в системе (2)

$$g(z^1, \ldots, z^m, \eta) = \begin{pmatrix} g_{11}(z^1, \ldots, z^m, \eta) & \ldots & g_{1m}(z^1, \ldots, z^m, \eta) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1}(z^1, \ldots, z^m, \eta) & \ldots & g_{mm}(z^1, \ldots, z^m, \eta) \end{pmatrix}$$

невырождена на множестве $\Phi(\Omega)$, то систему (2) называют регулярной на множестве $\Phi(\Omega)$.

Будем полагать, что система (1) удовлетворяет условиям теоремы 1, причем $\Phi(\Omega) = R^n$. Тогда система (1) преобразуется к эквивалентному квазиканоническому виду (2), определенному на всем пространстве состояний, а терминальная задача для системы (1) — в эквивалентную терминальную задачу для системы (2): найти непрерывные управления $u_1 = u_1(t)$, …, $u_m = u_m(t)$, $t \in [0, t_*]$, переводящие систему (2) за время t_* из начального состояния

$$\Phi(x_0) = (z_0^1, \ldots, z_0^m, \eta_0) \tag{3}$$

в конечное состояние

$$\Phi(x_*) = (z_*^1, \ldots, z_*^m, \eta_*). \tag{4}$$

Управления $u_1 = u_1(t)$, …, $u_m = u_m(t)$, являющиеся решением задачи (3), (4) для системы (2), одновременно представляют собой решение и исходной терминальной задачи для системы (1). В связи с этим будем рассматривать терминальную задачу (3), (4) для системы (2).

Решение терминальной задачи для системы квазиканонического вида. В работе [9] получено следующее необходимое и достаточное условие существования решения терминальной задачи для регулярной системы квазиканонического вида.

Теорема 2. *Для того чтобы существовали непрерывные управления $u_1 = u_1(t)$, …, $u_m = u_m(t)$, $t \in [0, t_*]$, являющиеся решением терминальной задачи (3), (4) для регулярной системы (2), необходимо и достаточно существование функций $B_i(t) \in C^{r_i}([0, t_*])$, $i = \overline{1, m}$, таких, что:*

1) вектор-функции $\overline{B}_i(t) = (B_i(t), B_i'(t), \ldots, B_i^{(r_i-1)}(t))^{\mathrm{т}}$ удовлетворяют условиям

$$\overline{B}_i(0) = z_0^i, \quad \overline{B}_i(t_*) = z_*^i;$$

2) решение $\eta(t)$ задачи Коши

$$\dot{\eta} = q(\overline{B}_1(t), \ldots, \overline{B}_m(t), \eta), \quad \eta(0) = \eta_0 \tag{5}$$

определено при всех $t \in [0, t_*]$ и удовлетворяет условию

$$\eta(t_*) = \eta_*. \tag{6}$$

В работе [9] также показано, что управление $u = u(t)$, являющееся решением терминальной задачи, определяется по равенству

$$u(t) = g^{-1}(\overline{B}_1(t), \ldots, \overline{B}_m(t), \eta(t)) \times \\ \times \begin{pmatrix} B_1^{(r_1)}(t) - f_1(\overline{B}_1(t), \ldots, \overline{B}_m(t), \eta(t)) \\ \ldots \\ B_m^{(r_m)}(t) - f_m(\overline{B}_1(t), \ldots, \overline{B}_m(t), \eta(t)) \end{pmatrix}, \tag{7}$$

а соотношения $z^i = \overline{B}_i(t)$, $i = \overline{1, m}$, $\eta = \eta(t)$, $t \in [0, t_*]$, — это параметрические уравнения той фазовой траектории системы (2), которая соединяет состояния (3) и (4).

Согласно работе [9], будем искать функции $B_1(t)$, …, $B_m(t)$ из теоремы 2 в виде

$$B_i(t) = b_i(t) + c_i d_i(t), \qquad i = \overline{1, m},$$

где $b_i(t)$, $d_i(t) \in C^{r_i}([0, t_*])$ вектор-функции

$$\overline{b}_i(t) = (b_i(t), b_i'(t), \ldots, b_i^{(r_i-1)}(t))^{\mathrm{т}}$$

удовлетворяют условиям

$$\overline{b}_i(0) = z_0^i, \quad \overline{b}_i(t_*) = z_*^i, \quad i = \overline{1, m},$$

а вектор-функции $\overline{d}_i(t) = (d_i(t), d_i'(t), \ldots, d_i^{(r_i-1)}(t))^{\mathrm{т}}$ — условиям

$$\overline{d}_i(0) = 0, \quad \overline{d}_i(t_*) = 0, \quad i = \overline{1, m}, \tag{8}$$

$c_i \in R$ необходимо найти.

В качестве функций $b_i(t)$, $i = \overline{1, m}$, можно взять, например, интерполяционные многочлены степеней $2r_i - 1$, в качестве функций $d_i(t)$, $i = \overline{1, m}$, — любые функции, для которых выполняются соотношения (8). При указанном выборе функций $B_i(t)$ условие 1 теоремы 2 выполнено для любых $c_i \in R$. Числа c_i следует подбирать так, чтобы было выполнено условие 2 теоремы 2. Если существуют такие числа $c_1 = c_{1*}$, …, $c_m = c_{m*}$, что решение $\eta(t)$ задачи Коши (5) удовлетворяет дополнительному требованию $\eta(t_*) = \eta_*$, то для функций $B_i(t) = b_i(t) + c_{i*}d_i(t)$, $i = \overline{1, m}$, выполнены все условия теоремы 2 и, следовательно, терминальная задача (3), (4) для системы (2) имеет решение.

Предположим, что $\rho \leqslant m$. Под нормой векторов из пространства R^ρ и $\rho\times\rho$-матриц будем понимать евклидову норму. Пусть $r = \max\{r_1, \ldots, r_\rho\}$. Для всех пар индексов l и j таких, что $l \in \{2, \ldots, r\}$, $j \in \{1, \ldots, \rho\}$, $l > r_j$, введем формально дополнительные переменные z_l^j. Обозначим $z_l = (z_l^1, \ldots, z_l^\rho)^{\mathrm{т}}$, $l = \overline{1, r}$. Примем по определению, что, если $l > r_j$, то $\partial q_i / \partial z_l^j = 0$ для всех $i = \overline{1, \rho}$. Обозначим через $\partial q / \partial z_l$ $\rho\times\rho$-матрицы с элементами $\partial q_i / \partial z_l^j$, $i, j = \overline{1, \rho}$.

Независимо от номера i зададим функции $d_i(t)$ формулой

$$d_i(t) \equiv d(t) = \frac{t^r (t_* - t)^r}{\displaystyle\int\limits_0^{t_*} t^r (t_* - t)^r dt}. \tag{9}$$

Обозначим $L = \max\limits_{[0, t_*]} \{d(t) + |d'(t)| + |d''(t)| + \ldots + |d^{(r-1)}(t)|\}$.

Докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Пусть $P(t)$, $R(t)$ — $\rho \times \rho$-матрицы с элементами $P_{ij}(t)$, $R_{ij}(t) \in C[0, t_*]$, и существует такое число $\lambda \in R$, что при всех $y \in R^\rho$, $t \in [0, t_*]$, выполнено неравенство*

$$(P(t)y, y) \leqslant \lambda \|y\|^2. \tag{10}$$

Тогда $\rho \times \rho$-матрица $W(t)$, являющаяся решением задачи Коши

$$\dot{W} = P(t)W + R(t), \qquad W(0) = 0, \tag{11}$$

удовлетворяет неравенству

$$\|W(t_*)\| \leqslant e^{\lambda t_*} \int\limits_0^{t_*} \|R(t)\| e^{-\lambda t} dt. \tag{12}$$

◀ Обозначим j-е столбцы матриц $W(t)$ и $R(t)$ как $W_j(t)$ и $R_j(t)$ соответственно. Тогда систему $\dot{W} = P(t)W + R(t)$ можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} \dot{W}_1 \\ \dot{W}_2 \\ \dots \\ \dot{W}_\rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & P(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \dots \\ W_\rho \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_1(t) \\ R_2(t) \\ \dots \\ R_\rho(t) \end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$V(t) = \begin{pmatrix} W_1(t) \\ W_2(t) \\ \dots \\ W_\rho(t) \end{pmatrix}, \quad Q(t) = \begin{pmatrix} P(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & P(t) \end{pmatrix}, \quad S(t) = \begin{pmatrix} R_1(t) \\ R_2(t) \\ \dots \\ R_\rho(t) \end{pmatrix}$$

и запишем задачу Коши (11) в виде

$$\dot{V} = Q(t)V + S(t), \qquad V(0) = 0.$$

Поскольку евклидовы нормы матриц $W(t)$ и $R(t)$ совпадают с евклидовыми нормами векторов $V(t)$ и $S(t)$, для доказательства неравенства (12) достаточно показать, что

$$\|V(t_*)\| \leqslant e^{\lambda t_*} \int\limits_0^{t_*} \|S(t)\| e^{-\lambda t} dt. \tag{13}$$

Из неравенства (10) следует, что для любых $t \in [0, t_*]$ и $V = (V_1^{\text{т}}, \dots, V_\rho^{\text{т}})^{\text{т}} \in R^{\rho^2}$, где $V_j \in R^\rho$, справедлива оценка

$$\begin{aligned} &(Q(t)V, V) = (P(t)V_1, V_1) + \ldots + (P(t)V_\rho, V_\rho) \leqslant \\ &\leqslant \lambda \|V_1\|^2 + \ldots + \lambda \|V_\rho\|^2 = \lambda \|V\|^2. \end{aligned} \tag{14}$$

Используем (14), чтобы доказать неравенство (13). Отметим, если $V(t_*) = 0$, то $\|V(t_*)\| = 0$ и справедливость неравенства (13) следует из неотрицательности его правой части.

Если $V(t_*) \neq 0$, то обозначим через t_0 точную верхнюю грань таких t из промежутка $[0; t_*)$, для которых $V(t) = 0$. Тогда $V(t_0) = 0$ и для всех $t \in (t_0; t_*)$ выполнено неравенство $V(t) \neq 0$. На интервале $(t_0; t_*)$ вычислим и оценим $\dfrac{d}{dt}\|V\|$, используя неравенство (14) и неравенство Коши – Буняковского:

$$\frac{d}{dt}\|V\| = \frac{(V, \dot V)}{\|V\|} = \frac{1}{\|V\|}\left[(Q(t)V, V) + (S(t), V)\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\lambda\|V\|^2}{\|V\|} + \left(S(t), \frac{V}{\|V\|}\right) \leqslant \lambda\|V\| + \|S(t)\|.$$

Таким образом, на интервале $(t_0; t_*)$ функция $\|V(t)\|$ удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$\frac{d}{dt}\|V\| \leqslant \lambda\|V\| + \|S(t)\|.$$

Решением дифференциального уравнения $\dot v = \lambda v + \|S(t)\|$ с начальным условием $v(t_0) = 0$ является функция

$$v(t) = e^{\lambda t}\int\limits_{t_0}^{t} \|S(\tau)\| e^{-\lambda\tau} d\tau,$$

поэтому при всех $t \in [t_0, t_*]$ справедливо неравенство [12]:

$$\|V(t)\| \leqslant e^{\lambda t}\int\limits_{t_0}^{t} \|S(\tau)\| e^{-\lambda\tau} d\tau$$

и, следовательно,

$$\|V(t_*)\| \leqslant e^{\lambda t_*}\int\limits_{t_0}^{t_*} \|S(t)\| e^{-\lambda t} dt. \tag{15}$$

Из неотрицательности подынтегральной функции в правой части неравенства (15) имеем

$$\int\limits_{t_0}^{t_*} \|S(t)\| e^{-\lambda t} dt \leqslant \int\limits_{0}^{t_*} \|S(t)\| e^{-\lambda t} dt,$$

с учетом чего из (15) получим неравенство (13). ►

Докажем главный результат.

Теорема 3. *Пусть:*

1) $q(z^1, \ldots, z^m, \eta) = \sum\limits_{i=1}^{r} A_i z_i + K\eta + p(z^1, \ldots, z^m)$, *где* $A_1, \ldots, A_r$, K *—* $\rho \times \rho$*-матрицы;*

2) матрица $M = A_1 + KA_2 + K^2 A_3 + \ldots + K^{r-1} A_r$ *невырождена;*

3) существует такое $\varepsilon>0$, что для всех $i=\overline{1,r}$ и $(z^1,\ldots,z^m)\in R^{n-\rho}$ выполнены неравенства $\|\partial p/\partial z_i\|\leqslant\varepsilon$;

4) λ — наибольшее собственное число матрицы $(P+P^{\text{т}})/2$, где $P=M^{-1}KM$;

$$\gamma=\begin{cases}(\|M^{-1}\|\varepsilon L+\|P\|)t_*, & \text{если}\quad \lambda=0;\\ (\|M^{-1}\|\varepsilon L+\|P\|)\frac{e^{\lambda t_*}-1}{\lambda}, & \text{если}\quad \lambda\neq 0.\end{cases} \tag{16}$$

Если $\gamma<1$, то терминальная задача (3), (4) для системы (2) имеет решение.

◀ Примем $c_{\rho+1}=\ldots=c_m=0$, обозначим через $c=(c_1,\ldots,c_\rho)^{\text{т}}$ вектор неизвестных параметров. Тогда задача Коши (5) примет вид

$$\begin{aligned}&\dot\eta=q(\overline{b}_1(t)+c_1\overline{d}_1(t),\ldots,\overline{b}_\rho(t)+c_\rho\overline{d}_\rho(t),\overline{b}_{\rho+1}(t),\ldots,\overline{b}_m(t),\eta);\\ &\eta(0)=\eta_0.\end{aligned} \tag{17}$$

Докажем существование такого параметра $c_*\in R^\rho$, что решение $\eta(t,c)$ задачи Коши (17) удовлетворяет условию $\eta(t_*,c_*)=\eta_*$. Поскольку $b_i(t)$, $d_i(t)\in C^{r_i}([0,t_*])$, $i=\overline{1,m}$, и $q(z^1,\ldots,z^m,\eta)\in C^\infty(R^n)$, то вектор-функция $\eta(t,c)$ дифференцируема по параметру c, причем матричная функция $\nu=\partial\eta/\partial c$ удовлетворяет системе уравнений [13]:

$$\dot\nu=K\nu+\sum_{i=1}^{r}\left(A_i+\frac{\partial p}{\partial z_i}\right)d^{(i-1)}(t);\qquad \nu(0)=0, \tag{18}$$

получающейся в результате дифференцирования системы (17) по параметру c.

Введем отображение $\Psi\colon R^\rho\to R^\rho$, которое каждому параметру $c\in R^\rho$ ставит в соответствие значение $\eta(t_*,c)\in R^\rho$ решения $\eta(t,c)$ задачи Коши (17) в момент времени t_*. Покажем, что при выполнении условий теоремы существует такой параметр c_*, для которого выполнено равенство $\Psi(c_*)=\eta_*$. Для этого введем отображение $v:R^\rho\to R^\rho$, действующее по правилу

$$v(c)=c-M^{-1}(\Psi(c)-\eta_*).$$

Равенство $\Psi(c_*)=\eta_*$ эквивалентно тому, что параметр c_* является неподвижной точкой отображения v. Чтобы доказать существование у отображения v неподвижной точки, докажем, что отображение v является сжимающим. Матрица Якоби отображения v имеет вид $v'(c)=E-M^{-1}\Psi'(c)$, где E — единичная $\rho\times\rho$-матрица; $\Psi'(c)$ — матрица Якоби отображения Ψ. Согласно определению отображения Ψ, $\Psi'(c)=\nu(t_*)$, тогда

$$v'(c)=E-M^{-1}\nu(t_*).$$

Обозначим $D(t)=\displaystyle\int_0^t d(\tau)d\tau$. Выбор функций $d(t)$ в виде (9) гарантирует, что при $t \in [0, t_*]$ выполнены неравенство $0 \leqslant D(t) \leqslant 1$ и равенство $D(t_*) = 1$. Рассмотрим матричную функцию

$$W(t) = D(t)E + \sum_{i=1}^{r-1} d^{(i-1)}(t) N_i - M^{-1}\nu(t), \tag{19}$$

где N_i — $\rho \times \rho$-матрицы, которые будут выбраны позднее. Из равенств $D(0) = 0$, $d(0) = 0$, ..., $d^{(r-2)}(0) = 0$, $\nu(0) = 0$ следует, что $W(0) = 0$, а из равенств $D(t_*) = 1$, $d(t_*) = 0$, ..., $d^{(r-2)}(t_*) = 0$ — $W(t_*) = E - M^{-1}\nu(t_*)$. Показав, что $\|W(t_*)\| \leqslant \gamma < 1$, тем самым запишем неравенство $\|v'(c)\| \leqslant \gamma < 1$. Таким образом, докажем, что отображение v является сжимающим. Вычислим $\dot{W}$ с помощью (18):

$$\begin{gathered}\dot{W} = d(t)E + \sum_{i=2}^{r} d^{(i-1)}(t) N_{i-1} - M^{-1}\dot{\nu} = \\ = d(t)E + \sum_{i=2}^{r} d^{(i-1)}(t) N_{i-1} - M^{-1}\left[K\nu + \sum_{i=1}^{r}\left(A_i + \frac{\partial p}{\partial z_i}\right) d^{(i-1)}(t)\right].\end{gathered} \tag{20}$$

Учитывая (19), выражаем $\nu(t)$ через $W(t)$:

$$\nu(t) = M\left(D(t)E + \sum_{i=1}^{r-1} d^{(i-1)}(t) N_i - W(t)\right),$$

подставляем полученное соотношение в (20). В результате имеем равенство

$$\begin{gathered}\dot{W} = PW + [E - M^{-1}A_1 - PN_1]d(t) + \\ + \sum_{i=2}^{r-1}[N_{i-1} - M^{-1}A_i - PN_i] d^{(i-1)}(t) + \\ + [N_{r-1} - M^{-1}A_r] d^{(r-1)}(t) - M^{-1}\sum_{i=1}^{r} \frac{\partial p}{\partial z_i} d^{(i-1)}(t) - PD(t).\end{gathered} \tag{21}$$

Выберем матрицы $N_1, \ldots, N_{r-1}$ из условия

$$\begin{aligned} &E - M^{-1}A_1 - PN_1 = 0; \\ &N_{i-1} - M^{-1}A_i - PN_i = 0, \quad i = \overline{2, r-1}; \\ &N_{r-1} - M^{-1}A_r = 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Непосредственной подстановкой показываем, что решением системы (22) матричных уравнений являются матрицы

$$
\begin{aligned}
&N_1 = M^{-1}(A_2 + KA_3 + \ldots + K^{r-2}A_r);\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&N_{r-2} = M^{-1}(A_{r-1} + KA_r);\\
&N_{r-1} = M^{-1}A_r.
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Примем, что матрицы N_i задаются формулами (23). Тогда равенство (21) преобразуется к виду

$$
\dot{W} = PW + R(t),
$$

где

$$
R(t) = -M^{-1}\sum_{i=1}^{r}\frac{\partial p}{\partial z_i}d^{(i-1)}(t) - PD(t).
$$

В соответствии с условием 3 теоремы, для всех $y \in R^{\rho}$ выполнено неравенство $(Py, y)\leqslant\lambda\|y\|^2$, поэтому согласно лемме 1 решение $W(t)$ задачи Коши

$$
\dot{W} = PW + R(t), \quad W(0) = 0
$$

удовлетворяет неравенству

$$
\|W(t_*)\|\leqslant e^{\lambda t_*}\int\limits_0^{t_*}\|R(t)\|e^{-\lambda t}dt. \tag{24}
$$

Используя неравенство треугольника, условие 3 теоремы и неравенство $0 \leqslant D(t) \leqslant 1$, выполненное при всех $t \in [0, t_*]$, получаем

$$
\begin{aligned}
\|R(t)\| = \left\|M^{-1}\sum_{i=1}^{r}\frac{\partial p}{\partial z_i}d^{(i-1)}(t) + PD(t)\right\| \leqslant \\
\leqslant \| M^{-1}\|\sum_{i=1}^{r}\left\|\frac{\partial p}{\partial z_i}\right\| |d^{(i-1)}(t)| + \|P\|D(t) \leqslant \\
\leqslant \| M^{-1}\|\sum_{i=1}^{r}\varepsilon|d^{(i-1)}(t)| + \|P\| \leqslant \| M^{-1}\|\varepsilon L + \|P\|.
\end{aligned}
$$

С учетом этой оценки и обозначения (16) неравенство (24) преобразуется к виду

$$
\|W(t_*)\| \leqslant e^{\lambda t_*}\int\limits_0^{t_*}(\|M^{-1}\|\varepsilon L + \|P\|)e^{-\lambda t}dt = \gamma.
$$

Если $\gamma < 1$, то $\|v'(c)\| = \|W(t_*)\| \leqslant \gamma < 1$ и, следовательно, отображение v является сжимающим. Таким образом, при выполнении условий теоремы отображение v — сжимающее и имеет неподвижную точку c_*. При $c_1 = c_{1*}$, …, $c_\rho = c_{\rho*}$, $c_{\rho+1} = 0$, …, $c_m = 0$ решение $\eta(t)$ задачи Коши (5) удовлетворяет условию $\eta(t_*) = \eta_*$. Функции

$$B_1(t) = b_1(t) + c_{1*}d_1(t), \ldots, B_\rho(t) = b_\rho(t) + c_{\rho*}d_\rho(t),$$
$$B_{\rho+1} = b_{\rho+1}(t), \ldots, B_m(t) = b_m(t)$$

удовлетворяют всем условиям теоремы 2, поэтому терминальная задача (3), (4) для системы (2) имеет решение. ►

Численная процедура. Из доказательства теоремы 3 следует метод построения решения терминальной задачи (3), (4) для системы (2). Выберем произвольное число $c^{(0)} \in R^\rho$ и построим последовательность приближений $\{c^{(j)}\}$ по правилу

$$c^{(j+1)} = c^{(j)} - M^{-1}(\Psi(c^{(j)}) - \eta_*), \quad j = 0, 1, \ldots \tag{25}$$

Чтобы определить значение $\Psi(c^{(j)})$, необходимо найти решение $\eta(t, c^{(j)})$ задачи Коши

$$\dot{\eta} = q(\overline{b}_1(t) + c_1^{(j)}\overline{d}_1(t), \ldots, \overline{b}_\rho(t) + c_\rho^{(j)}\overline{d}_\rho(t), \overline{b}_{\rho+1}(t), \ldots, \overline{b}_m(t), \eta);$$
$$\eta(0) = \eta_0.$$

Тогда $\Psi(c^{(j)}) = \eta(t_*, c^{(j)})$.

Поскольку отображение v — сжимающее, последовательность $\{c^{(j)}\}$ сходится к неподвижной точке c_* отображения v. При этом справедлива оценка

$$\|c^{(j)} - c_*\| \leqslant \frac{\gamma^j}{1-\gamma}\|c^{(1)} - c^{(0)}\|. \tag{26}$$

Из (25) следует, что

$$\Psi(c^{(j)}) - \eta_* = M(c^{(j+1)} - c^{(j)}),$$

поэтому, используя неравенство треугольника и оценку (26), получаем

$$\|\Psi(c^{(j)}) - \eta_*\| \leqslant \|M\|\|c^{(j+1)} - c^{(j)}\| = \|M\|\|c^{(j+1)} - c_* + c_* - c^{(j)}\| \leqslant$$
$$\leqslant \|M\|\|c^{(j+1)} - c_*\| + \|M\|\|c_* - c^{(j)}\| \leqslant \frac{\|M\|}{1-\gamma}\left(\gamma^{j+1} + \gamma^j\right)\|c^{(1)} - c^{(0)}\| =$$
$$= \frac{(1+\gamma)\gamma^j}{1-\gamma}\|M\|\|c^{(1)} - c^{(0)}\|.$$

Выбрав номер J из условия

$$\frac{(1+\gamma)\gamma^J}{1-\gamma}\|M\|\|c^{(1)} - c^{(0)}\| \leqslant \sigma,$$

где $\sigma > 0$ — заданная точность, добьемся выполнения неравенства

$$\|\Psi(c^{(J)}) - \eta_*\| \leqslant \sigma. \tag{27}$$

Вектор-функции

$$z^1=\overline{b}_1(t)+c_1^{(J)}\overline{d}_1(t),\ldots,z^\rho=\overline{b}_\rho(t)+c_\rho^{(J)}\overline{d}_\rho(t),$$
$$z^{\rho+1}=\overline{b}_{\rho+1}(t),\ldots,z^m=\overline{b}_m(t);\quad \eta=\eta(t,c^{(J)}),\quad t\in[0,t_*],$$

задают t-параметрическую кривую в пространстве состояний системы (2), соединяющую состояния (3) и (4). Управление, реализующее эту траекторию в качестве траектории системы (2), можно определить по формуле (7), если принять

$$\overline{B}_1(t)=\overline{b}_1(t)+c_1^{(J)}\overline{d}_1(t),\ldots,\overline{B}_\rho(t)=\overline{b}_\rho(t)+c_\rho^{(J)}\overline{d}_\rho(t),$$
$$\overline{B}_{\rho+1}=\overline{b}_{\rho+1}(t),\ldots,\overline{B}_m(t)=\overline{b}_m(t);\quad \eta(t)=\eta(t,c^{(J)}).$$

Пример. Рассмотрим систему

$$\begin{array}{l}\dot z_1^i=z_2^i;\\ \dot z_2^i=u_i,\qquad i=1,2;\\ \dot\eta_1=-0{,}1\eta_2+z_1^1+z_2^2+0{,}08\cos z_2^1;\\ \dot\eta_2=0{,}1\eta_1+z_1^2+z_2^1-0{,}08\sin z_2^2\end{array}\tag{28}$$

со следующими граничными условиями:

$$\begin{array}{l}z_1^1(0)=0,\quad z_2^1(0)=0,\ z_1^2(0)=0,\ z_2^2(0)=0,\ \eta_1(0)=0,\ \eta_2(0)=0,\\ z_1^1(2)=-4,\ z_2^1(2)=-8,\ z_1^2(2)=0,\ z_2^2(2)=4,\ \eta_1(2)=-5,\ \eta_2(2)=4.\end{array}$$

Для этой задачи $t_*=2$, $m=2$, $\rho=2$, $r_1=r_2=2$, $z_1=(z_1^1,z_1^2)^{\text{т}}$, $z_2=(z_2^1,z_2^2)^{\text{т}}$,

$$A_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad K=\begin{pmatrix}0&-0,1\\0,1&0\end{pmatrix},$$

$$p(z^1,z^2)=\begin{pmatrix}0{,}08\cos z_2^1\\-0{,}08\sin z_2^2\end{pmatrix},\quad M=A_1+KA_2=\begin{pmatrix}0,9&0\\0&1,1\end{pmatrix},$$

$$M^{-1}=\begin{pmatrix}10/9&0\\0&10/11\end{pmatrix},\quad P=M^{-1}KM=\begin{pmatrix}0&-11/90\\9/110&0\end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial p}{\partial z_1}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\quad \frac{\partial p}{\partial z_2}=\begin{pmatrix}-0{,}08\sin z_2^1&0\\0&-0{,}08\cos z_2^2\end{pmatrix}.$$

Поскольку $\|\partial p/\partial z_1\|=0$, а $\|\partial p/\partial z_2\|\leqslant 0{,}08\sqrt{2}$, в качестве числа ε из условия 3 теоремы 3 можно принять $\varepsilon=0{,}08\sqrt{2}$. Матрица $(P+P^{\text{т}})/2$ имеет вид

$$\frac{1}{2}(P+P^{\text{т}})=\begin{pmatrix}0&-2/99\\-2/99&0\end{pmatrix},$$

ее наибольшее собственное число $\lambda=2/99$.

Проверим выполнение условия теоремы 3. Функция $d(t)$, построенная по формуле (9), имеет вид $d(t) = \dfrac{15}{16}t^2(2-t)^2$, поэтому

$$d'(t) = \frac{15}{4}t(t-1)(t-2); \quad L = \max_{[0,2]}\{d(t) + |d'(t)|\} \leqslant 1{,}95.$$

В связи с тем, что $\gamma = (\|M^{-1}\|\varepsilon L + \|P\|)\dfrac{e^{\lambda t_*}-1}{\lambda} \approx 0{,}947 < 1$, условие теоремы 3 выполнено и рассматриваемая терминальная задача имеет решение.

Выберем в качестве функции $b_1(t)$, удовлетворяющей условиям

$$b_1(0) = 0, \ \ b_1'(0) = 0, \ \ b_1(2) = -4, \ \ b_1'(2) = -8,$$

функцию $b_1(t) = -t^3 + t^2$, а в качестве функции $b_2(t)$, удовлетворяющей условиям

$$b_2(0) = 0, \ \ b_2'(0) = 0, \ \ b_2(2) = 0, \ \ b_2'(2) = 4,$$

функцию $b_2(t) = t^3 - 2t^2$. Зададим начальное приближение для вектора параметров $c^{(0)} = (0;0)^{\text{т}}$ и точность $\sigma = 0{,}001$. Построим последовательность приближений $\{c^{(j)}\}$ по формуле (25), полагая, что $\eta_* = (-5;4)^{\text{т}}$, $\Psi(c^{(j)}) = \eta(t_*, c^{(j)})$, где $\eta(t, c^{(j)}) = (\eta_1(t, c^{(j)}), \eta_2(t, c^{(j)}))^{\text{т}}$ — решение задачи Коши:

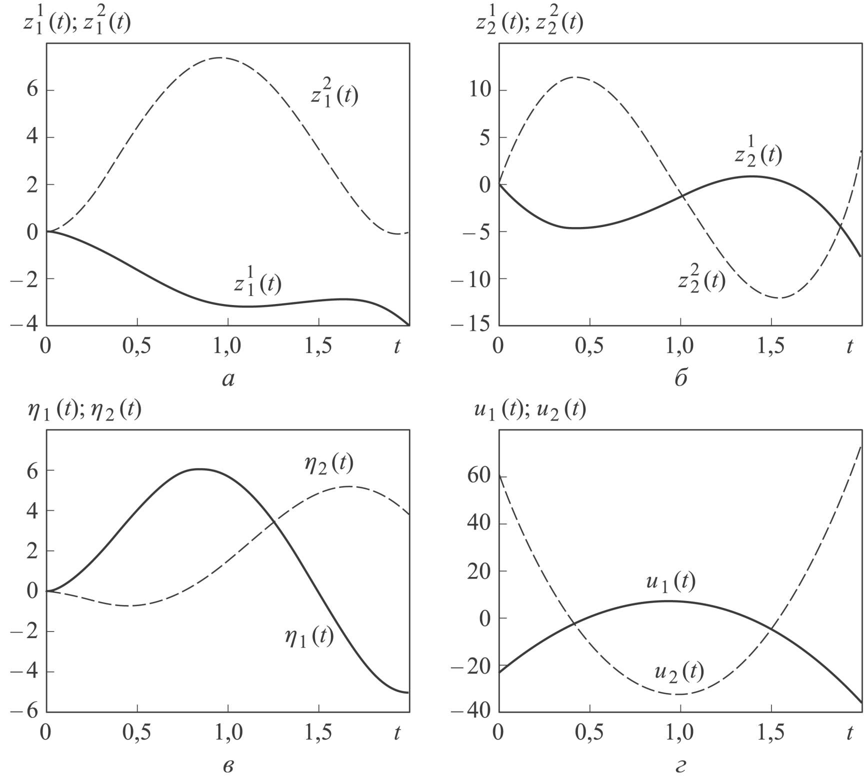
$$\begin{aligned}
\dot\eta_1 &= -0{,}1\eta_2 + b_1(t) + c_1^{(j)}d(t) + b_2'(t) + \\
&\qquad\qquad + c_2^{(j)}d'(t) + 0{,}08\cos(b_1'(t) + c_1^{(j)}d'(t)); \\
\dot\eta_2 &= 0{,}1\eta_1 + b_2(t) + c_2^{(j)}d(t) + b_1'(t) + \\
&\qquad\qquad + c_1^{(j)}d'(t) - 0{,}08\sin(b_2'(t) + c_2^{(j)}d'(t)); \\
\eta_1(0) &= 0, \ \ \eta_2(0) = 0,
\end{aligned}$$

определяемое на каждой итерации методом Рунге – Кутты четвертого порядка. Расчеты показали, что неравенство (27) выполняется при $J = 6$, поэтому с точностью σ неподвижной точкой отображения v является точка $c^{(6)} = (-3{,}287; 8{,}933)^{\text{т}}$. Функции

$$z_1^1 = b_1(t) + c_1^{(6)}d(t), \ \ z_2^1 = b_1'(t) + c_1^{(6)}d'(t), \ \ z_1^2 = b_2(t) + c_2^{(6)}d(t),$$

$$z_2^2 = b_2'(t) + c_2^{(6)}d'(t); \ \ \eta_1 = \eta_1(t, c^{(6)}), \ \ \eta_2 = \eta_2(t, c^{(6)})$$

задают t-параметрическую кривую в пространстве состояний системы (28), соединяющую начальное и конечное состояния системы. Управления $u_1 = b_1''(t) + c_1^{(6)}d''(t)$, $u_2 = b_2''(t) + c_2^{(6)}d''(t)$ реализуют эту кривую в качестве траектории системы (28) и являются решением рассматриваемой терминальной задачи. Зависимости функций $z_1^1(t)$, $z_1^2(t)$, $z_2^1(t)$, $z_2^2(t)$, $\eta_1(t)$, $\eta_2(t)$, $u_1(t)$, $u_2(t)$ приведены на рисунке.



Функции $z_1^1(t)$, $z_1^2(t)$ (*а*), $z_2^1(t)$, $z_2^2(t)$ (*б*), $\eta_1(t)$, $\eta_2(t)$ (*в*) и $u_1(t)$, $u_2(t)$ (*г*)

Заключение. Рассмотрена терминальная задача для аффинных систем, не линеаризуемых обратной связью. Предполагалось, что гладкой невырожденной заменой переменных в пространстве состояний система может быть преобразована к регулярному квазиканоническому виду. При этом терминальная задача для исходной системы переходит в эквивалентную терминальную задачу для системы квазиканонического вида. Для системы квазиканонического вида доказано достаточное условие существования решения терминальной задачи. На его основе предложен метод решения терминальных задач. Приведен пример построения решения терминальной задачи предложенным методом для системы шестого порядка.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 14-07-00813, 13-07-00736).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Краснощеченко В.И.*, *Крищенко А.П.* Нелинейные системы: геометрические методы анализа и синтеза. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. 520 с.
2. *Елкин В.И.* Редукция нелинейных управляемых систем: дифференциально-геометрический подход. М.: Наука, 1997. 320 с.

3. *Аграчев А.А.*, *Сачков Ю.Л.* Геометрическая теория управления. М.: Физматлит, 2005. 392 с.
4. *Жевнин А.А.*, *Крищенко А.П.* Управляемость нелинейных систем и синтез алгоритмов управления // ДАН СССР. 1981. Т. 258. № 4. С. 805–809.
5. *Сачкова Е.Ф.* Приближенное решение двухточечных граничных задач для систем с линейными управлениями // Автоматика и телемеханика. 2009. № 4. С. 179–189.
6. *Емельянов С.В.*, *Крищенко А.П.*, *Фетисов Д.А.* Исследование управляемости аффинных систем // ДАН. 2013. Т. 449. № 1. С. 15–18.
7. *Крищенко А.П.*, *Фетисов Д.А.* Преобразование аффинных систем и решение задач терминального управления // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. 2013. № 2. С. 3–16.
8. *Крищенко А.П.*, *Фетисов Д.А.* Терминальная задача для многомерных аффинных систем // ДАН. 2013. Т. 452. № 2. С. 144–149.
9. *Фетисов Д.А.* Об одном методе решения терминальных задач для аффинных систем // Электронное научно-техническое издание: Наука и образование. 2013. № 11. [Электронный ресурс] URL: http://technomag.bmstu.ru/doc/622543.html (дата обращения: 20.11.2013).
10. *Крутько П.Д.* Обратные задачи динамики управляемых систем. Нелинейные модели. М.: Наука, 1988. 328 с.
11. *Крищенко А.П.*, *Клинковский М.Г.* Преобразование аффинных систем с управлением и задача стабилизации // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28. № 11. С. 1945–1952.
12. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
13. *Филиппов А.Ф.* Введение в теорию дифференциальных уравнений. М.: Едиториал УРСС, 2004. 240 с.

REFERENCES

[1] Krasnoshchechenko V.I., Krishchenko A.P. Nelineynye sistemy: geometricheskie metody analiza i sinteza [Nonlinear systems: geometric methods for analysis and synthesis]. Moscow, MGTU im. N.E. Baumana Publ., 2005. 520 p.

[2] Elkin V.I. Reduktsiya nelineynykh upravlyaemykh sistem: differentsial'no-geometricheskiy podkhod [Reduction of nonlinear controlled systems: a differential geometric approach]. Moscow, Nauka Publ., 1997. 320 p.

[3] Agrachev A.A., Sachkov Yu.L. Geometricheskaya teoriya upravleniya [Geometric control theory]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2005. 392 p.

[4] Zhevnin A.A., Krishchenko A.P. Controllability of nonlinear systems and synthesis of control algorithms. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* [Proc. Acad. Sci. USSR], 1981, vol. 258, no. 3, pp. 805–809 (in Russ.).

[5] Sachkova E.F. Approximative solution of two-point boundary value problems for systems with linear control. *Avtom. Telemekh.* [Automation and Remote Control], 2009, no. 4, pp. 179–189 (in Russ.).

[6] Emel'yanov S.V., Krishchenko A.P., Fetisov D.A. Research of controllability of affine systems. *Dokl. RAN* [Proc. Russ. Acad. Sci.], 2013, vol. 449, no. 1, pp. 15–18 (in Russ.).

[7] Krishchenko A.P., Fetisov D.A. Transformation of affine systems and solving problems of termination control. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N. E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2013, no. 2, pp. 3–16 (in Russ.).

[8] Krishchenko A.P., Fetisov D.A. Terminal problem for multidimensional affine systems. *Dokl. RAN* [Proc. Russ. Acad. Sci.], 2013, vol. 452, no. 2, pp. 144–149 (in Russ.).

[9] Fetisov D.A. On a method for solving terminal control problems for affine systems. *Jelektr. Nauchno-Tehn. Izd. "Nauka i obrazovanie" MGTU im. N.E. Baumana* [El. Sc.-Tech. Publ. "Science and Education" of Bauman MSTU], 2013, no. 11. Available at: http:// technomag.bmstu.ru/doc/622543.html (accessed 20.11.2013) (in Russ.). DOI: 10.7463/1113.0622543

[10] Krut'ko P.D. Obratnye zadachi dinamiki upravlyaemykh sistem. Nelineynye modeli [Inverse problems for dynamics controlled systems. Nonlinear models]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 328 p.

[11] Krishchenko A.P., Klinkovskiy M.G. Transformation of affine systems with control and the stabilization problem. *Differ. Uravn.* [Differ. Equations], 1992, vol. 28, no. 11, pp. 1945–1952 (in Russ.).

[12] Hartman Ph. Ordinary Differential Equations, 1st ed. N.Y., J. Wiley, 1964. (Russ. Ed.: Khartman F. Obyknovennye differentsial'nye uravneniya. Moscow, Mir Publ., 1970. 720 p.)

[13] Filippov A.F. Vvedenie v teoriyu differentsial'nykh uravneniy [Introduction to the differential equations theory]. Moscow, Editorial URSS Publ., 2004. 240 p.

Статья поступила в редакцию 18.04.2014

Дмитрий Анатольевич Фетисов — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры "Математическое моделирование" МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 15 научных работ в области математической теории управления.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

D.A. Fetisov — Cand. Sci. (Phys.-Math.), assoc. professor of "Mathematical Simulation" department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 15 publications in the field of mathematical control theory.

Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.