УДК 536.2

ВЛИЯНИЕ ВЗАИМНОГО РАСПОЛОЖЕНИЯ ШАРОВЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ НА ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ КОМПОЗИТА

В.С. Зарубин, **Г.Н. Кувыркин**, **И.Ю. Савельева**

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: fn2@bmstu.ru

Композиты с шаровыми включениями находят широкое применение в качестве конструкционных и функциональных материалов. Эффективный коэффициент теплопроводности такого композита зависит от расположения и объемной концентрации включений. Получены расчетные зависимости, позволяющие вычислить двусторонние оценки эффективного коэффициента теплопроводности композита матричной структуры с шаровыми включениями. Эти зависимости учитывают влияние взаимного расположения включений. Рассмотрены варианты их расположения, соответствующие повторяющимся ячейкам простой кубической, объемноцентрированной и гранецентрированной кристаллическим решеткам. Расчетным путем установлено, что для первого из этих вариантов разность двусторонних оценок является наименьшей. Проведено сравнение указанных оценок с двусторонними оценками, которые определены из теории смесей и вариационного подхода, а также с оценкой, полученной методом самосогласования. Представленные зависимости могут быть использованы для прогноза эффективного коэффициента теплопроводности композита матричной структуры.

***Ключевые слова*:** композит с шаровыми включениями, матричная структура, представительный элемент структуры.

INFLUENCE OF THE MUTUAL ARRANGEMENT OF SPHERICAL INCLUSIONS ON THE THERMAL CONDUCTIVITY OF THE COMPOSITE

V.S. Zarubin, **G.N. Kuvyrkin**, **I.Yu. Savel'eva**

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: fn2@bmstu.ru

Composites with spherical inclusions are widely used as constructional and functional materials. Effective thermal conductivity coefficient of this composite depends on location and volume concentration of inclusions. The calculated dependencies which allowed to determine bilateral estimates of the effective thermal conductivity coefficient of matrix structure composite with spherical inclusions are obtained. These dependences take into account the influence of mutual arrangement of inclusions. Options of such locations corresponding repeating cells of simple cubic, body-centered and facet-centered crystal lattices are considered. It was determined by means of calculation that the difference of bilateral estimates is the lowest for the first option of the above. The comparison of these estimates with bilateral estimates defined from the theory of mixes and variation approach and also with the assessment obtained by a method of self-consistency is carried out. Submitted dependencies can be used for prediction of the effective thermal conductivity coefficient of the matrix structure composite.

***Keywords*:** composite with spherical inclusions, matrix structure, representative structure element.

Введение. Существуют различные подходы к построению математической модели теплопереноса в композите с шаровыми включениями, на основе которой можно получить оценки эффективного коэффициента теплопроводности такого композита [1–8]. Однако большинство подходов учитывает лишь объемную концентрацию включений и не принимает во внимание их взаимное расположение. Обычно предполагают, что шаровые включения распределены по объему композита равномерно, но их взаимное расположение является случайным (хаотическим). Сравнительный анализ подходов проведен в работах [9, 10].

В работах [11, 12] приведена методика построения двусторонних оценок эффективного коэффициента теплопроводности, основанная на рассмотрении процесса теплопереноса в представительном элементе изотропного композита матричной структуры. В случае шаровых включений обычно выделяют представительный элемент в виде куба, в центр которого помещают включение [12]. Такая конфигурация представительного элемента эквивалентна простой кубической (ПК) кристаллической решетке, повторяющаяся ячейка которой показана на рис. 1, *а*. Для однонаправленного трансверсально изотропного волокнистого композита представительным элементом его структуры служит квадрат с расположенным в нем поперечным сечением волокна [12–14].

Для получения верхней оценки эффективного коэффициента теплопроводности принимают предположение о равномерном расположении в представительном элементе изотермических плоскостей параллельно одной из граней куба (в плоском представительном элементе предполагают, что изотермы параллельны одной из сторон квадрата). Указанное распределение температуры допустимо для минимизируемого функционала, входящего в вариационную формулировку задачи стационарной теплопроводности [15, 16] в рассматриваемом представительном элементе структуры композита, но не совпадает с истинным распределением, на котором этот функционал достигает минимума. Поэтому вычисленная по такому распределению

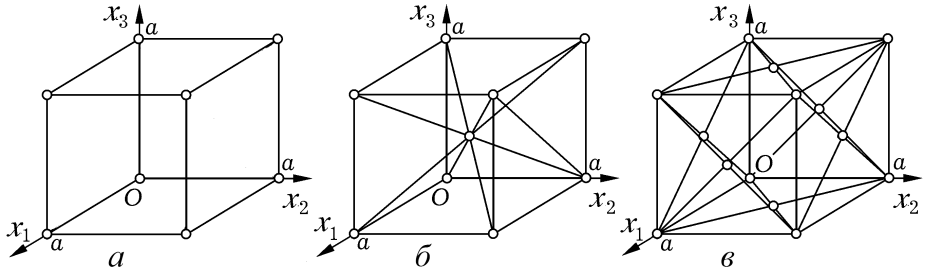


Рис. 1. Повторяющиеся ячейки простой кубической (*а*), объемноцентрированной (*б*) и гранецентрированной (*в*) кристаллических решеток

температуры тепловая проводимость представительного элемента будет выше истинной, что и обеспечивает получение верхней оценки эффективного коэффициента теплопроводности композита.

Нижняя оценка этого коэффициента соответствует предположению о перпендикулярности линий тока теплового потока той же грани куба (в плоском представительном элементе предполагают перпендикулярность этих линий той же стороне квадрата). Такое распределение плотности теплового потока допустимо для максимизируемого функционала, но отличается от истинного распределения, на котором этот функционал достигает максимума. Следовательно, вычисленная по указанному распределению плотности теплового потока тепловая проводимость представительного элемента будет ниже истинной, что позволяет получить нижнюю оценку эффективного коэффициента теплопроводности композита.

Наряду с матричной структурой композита, армированного шаровыми включениями, изотропию по отношению к свойству теплопроводности обеспечивают еще два варианта их расположения, которым соответствуют представительные элементы в виде ячеек объемноцентрированной (ОЦК) и гранецентрированной (ГЦК) кубических решеток кристаллов [17] (рис. 1, *б* и *в*). Для анализа влияния взаимного расположения шаровых включений на эффективный коэффициент теплопроводности композита матричной структуры сравним верхние и нижние оценки коэффициента для трех вариантов конфигурации кубического представительного элемента.

Основные соотношения. Поскольку все повторяющиеся ячейки (см. рис. 1) имеют три плоскости симметрии с уравнениями $x_1 = a/2$, $x_2 = a/2$ и $x_3 = a/2$, в качестве представительного элемента для каждой структуры можно рассматривать куб с ребром, равным $a/2$. Одну из вершин такого куба поместим в начале прямоугольной системы координат $Ox_1x_2x_3$, приняв безразмерную длину его ребра равной единице и направив координатные оси вдоль ребер куба, выходящих из этой вершины. Куб соответствует 1/8 части повторяющейся ячейки ПК-решетки (см. рис. 1, *а*). В нем будет расположена 1/8 часть шарового включения с безразмерным радиусом $r \leqslant 1$ и центром в точке O. При этом наибольшая возможная объемная концентрация включений составляет $C_V^{\square} = \pi/6 \approx 0{,}5236$.

Коэффициент теплопроводности λ среды в представительном элементе может принимать значения λ_m или λ°, соответствующие значениям коэффициентов теплопроводности матрицы или включения. Таким образом, величина $\lambda(x_1, x_2, x_3)$ является функцией координат точки $M(x_1, x_2, x_3)$, принадлежащей в представительном элементе либо матрице, либо фрагменту включения. Тогда верхнюю оценку эф-

фективного коэффициента теплопроводности этого элемента, отождествляемую с таким же коэффициентом композита соответствующей структуры, можно представить в виде [6, 11, 12]

$$\lambda^{+} = \left(\int\limits_0^1 dx_3 \left(\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \lambda(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 \right)^{-1} \right)^{-1}, \tag{1}$$

а нижнюю оценку — в виде

$$\lambda^{-} = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 dx_1 dx_2 \Big/ \int\limits_0^1 \frac{dx_3}{\lambda(x_1, x_2, x_3)}. \tag{2}$$

После применения формул (1) и (2) к рассматриваемому представительному элементу ПК матричной структуры находим

$$\widetilde{\lambda}_1^{+} = \frac{\lambda_1^{+}}{\lambda_m} = \left(1 - r + \frac{1}{b} \int\limits_0^r \frac{dx_3}{a_1 - x_3^2} \right)^{-1} = \left(1 - r + \frac{1}{2b\sqrt{a}_1} \ln \frac{\sqrt{a}_1 + r}{\sqrt{a}_1 - r} \right)^{-1}, \tag{3}$$

где $b = (\bar{\lambda} - 1)\pi/4$; $\bar{\lambda} = \lambda^{\circ}/\lambda_m$; $a_1 = 1/b + r^2$; при $b_1 = 1/\bar{\lambda} - 1$

$$\widetilde{\lambda}_1^{-} = \frac{\lambda_1^{-}}{\lambda_m} =$$

$$= 1 - \pi \frac{r^2}{4} + \frac{\pi}{4} \int\limits_0^r \frac{\rho d\rho}{1 + b_1 \sqrt{r^2 - \rho^2}} = 1 - \pi \frac{r^2}{4} + \frac{\pi}{2b_1} \left(r - \frac{\ln(1 + b_1 r)}{b_1} \right). \tag{4}$$

Если $\bar{\lambda} < 1$, то $b < 0$ и вместо формулы (3) получим

$$\frac{1}{\widetilde{\lambda}_1^{+}} = 1 - r + \int\limits_0^r \frac{dx_3}{1 + br^2 + |b| x_3^2} = 1 - r + \frac{1}{\sqrt{(1 + br^2)|b|}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{|b|} r}{\sqrt{1 + br^2}}. \tag{5}$$

Формулы (3)–(5) могут быть преобразованы к виду, представленному в работах [6, 12].

Оценки для ОЦК матричной структуры. Представительный элемент ОЦК матричной структуры выберем в виде куба со стороной, равной единице, являющегося 1/8 частью повторяющейся ячейки ОЦК-решетки (см. рис. 1, *б*). В таком элементе будут расположены два фрагмента одинаковых шаровых включений с безразмерным радиусом $r \leqslant \sqrt{3}/2$ и центрами на концах диагонали куба, выходящей из начала координат. Наибольшая возможная объемная концентрация включений составляет $C_V^{\boxdot} = (\pi\sqrt{3})/8 \approx 0{,}6802$.

Процедура построения оценок для указанного представительного элемента зависит от радиуса r. В случае $r \leqslant 1/2$ можно модифицировать формулы (3) и (5) для получения верхней оценки λ_2^+ этого элемента, представив их в виде:
при $\bar{\lambda} > 1$

$$\frac{1}{\widetilde{\lambda}_2^+} = \frac{\lambda_m}{\lambda_2^+} = 1 - 2r + \frac{2}{b}\int\limits_0^r \frac{dx_3}{a_1 - x_3^2} = 1 - 2r + \frac{1}{b\sqrt{a}_1} \ln \frac{\sqrt{a}_1 + r}{\sqrt{a}_1 - r}, \quad (6)$$

при $\bar{\lambda} < 1$

$$\frac{1}{\widetilde{\lambda}_2^+} = 1-2r+2\int\limits_0^r \frac{dx_3}{1 + br^2 + |b|x_3^2} = 1-2r+\frac{2}{\sqrt{(1+br^2)|b|}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{|b|}r}{\sqrt{1+br^2}}. \quad (7)$$

Более сложной задачей является построение верхней оценки λ_2^+, если $1/2 < r \leqslant \sqrt{3}/2$. Выделим в представительном элементе три слоя: два слоя, одинаковых по высоте с промежутками изменения координаты x_3 $(0; 1-r)$ и $(r; 1)$, и один промежуточный слой при $x_3 \in (1-r; r)$. Нижняя оценка безразмерного термического сопротивления одного из одинаковых слоев согласно формуле (1) равна
при $\bar{\lambda} > 1$

$$R_2' = \frac{1}{b}\int\limits_0^{1-r} \frac{dx_3}{a_1 - x_3^2} = \frac{1}{2b\sqrt{a}_1} \ln \frac{\sqrt{a}_1 + 1 - r}{\sqrt{a}_1 - 1 + r},$$

при $\bar{\lambda} < 1$

$$R_2' = \int\limits_0^{1-r} \frac{dx_3}{1 + br^2 + |b|x_3^2} = \frac{1}{\sqrt{(1+br^2)|b|}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{|b|}(1-r)}{\sqrt{1+br^2}}.$$

Такая же оценка для промежуточного слоя имеет вид [18]
при $\bar{\lambda} > 1$

$$R_2'' = \int\limits_{1-r}^{r} \frac{dx_3}{1 + b(2r^2 - x_3^2 - (1-x_3)^2)} = \frac{1}{b\sqrt{\Delta}} \ln \frac{2r - 1 + \sqrt{\Delta}}{2r - 1 - \sqrt{\Delta}},$$

где $\Delta = 4r^2 - 1 + 2/b > 0$,
при $\bar{\lambda} < 1$, $\Delta < 0$

$$R_2'' = \frac{2}{\sqrt{b^2|\Delta|}} \operatorname{arctg} \frac{2r-1}{\sqrt{|\Delta|}}.$$

В итоге для искомой оценки при $1/2 < r \leqslant \sqrt{3}/2$ запишем

$$\widehat{\lambda}_2^+ = 1/(2R_2' + R_2'').$$

При построении для рассматриваемого представительного элемента нижней оценки λ_2^-, модифицировав формулу (4) при $r \in (0; 1/\sqrt{2}]$, получим

$$\widetilde{\lambda}_2^- = \frac{\lambda_2^-}{\lambda_m} = 1 - \pi\frac{r^2}{2} + \frac{\pi}{b_1}\left(r - \frac{\ln(1+b_1 r)}{b_1}\right).$$

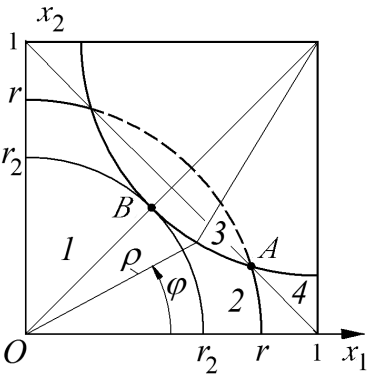


Рис. 2. Разбиение ячейки ОЦК-решетки на подобласти (*1–4*)

а в случае $r \in (1/\sqrt{2}; \sqrt{3}/2)$ для вычисления интеграла в формуле (2) выделим несколько подобластей интегрирования (рис. 2). Подобласть *1* — сектор окружности радиусом $r_2 = \sqrt{2} - r$ и углом $\pi/2$ при вершине. Составляющая относительной тепловой проводимости элемента, соответствующая этой подобласти, после модификации формулы (4) может быть представлена в виде

$$Y_1 = \frac{\pi/2}{b_1}\left(r_2 - \frac{\ln(1+b_1 r_2)}{b_1}\right).$$

Подобласть *2* ограничена дугами окружностей радиусами r_2 и r, координатной осью Ox_1 и дугой AB радиусом r окружности с центром в точке с координатами $x_1 = x_2 = 1$ (см. рис. 2). Если перейти к полярной системе координат с началом при $x_1 = x_2 = 0$, радиальной координатой ρ и отсчетом полярного угла φ от оси Ox_1, то согласно теореме косинусов запишем $r^2 = 2 + \rho^2 - 2\sqrt{2}\rho\cos(\pi/4 - \varphi)$. Откуда получим уравнение дуги AB:

$$\varphi(r, \rho) = \frac{\pi}{4} - \arccos\frac{2 + \rho^2 - r^2}{2\sqrt{2}\rho}.$$

Тогда составляющую проводимости рассматриваемого элемента, соответствующую подобласти *2*, можно представить интегралом

$$Y_2 = \int\limits_{r_2}^{r} \frac{\varphi(r, \rho)\rho d\rho}{1 + b_1\sqrt{r^2 - \rho^2}}.$$

Подобласть *3* ограничена дугами радиусом r окружностей с центрами в точках с координатами $x_1 = x_2 = 0$ и $x_1 = x_2 = 1$ (см. рис. 2), при этом $\varphi_2 = \pi/4 - \arccos(\sqrt{2}/(2r)) \leq \varphi \leq \pi/4$. Для этой подобласти составляющая проводимости рассматриваемого представительного

элемента равна

$$Y_3 = 2\int\limits_{r_2}^{r} \rho d\rho \int\limits_{\varphi(r,\rho)}^{\pi/4} \frac{d\varphi'}{1 + b_1(\sqrt{r^2-\rho^2} + \sqrt{r^2-\rho^2-2+2\sqrt{2}\rho\cos\varphi'})}.$$

Наконец, для составляющей проводимости, соответствующей подобласти *4*, получим $Y_4 = r\sin\varphi_2 - r^2\varphi_2$. Квадрат, представленный на рис. 2, включает в себя по две подобласти *1* и *4*, четыре подобласти *2* и подобласть *3*. Поэтому для искомой оценки при $r \in (1/\sqrt{2}; \sqrt{3}/2)$, равной суммарной относительной тепловой проводимости представительного элемента, имеем

$$\widetilde{\lambda}_2^- = 2(Y_1 + 2Y_2 + Y_4) + Y_3.$$

Оценки для ГЦК матричной структуры. Третий вариант представительного элемента матричной структуры композита образует 1/8 часть ячейки ГЦК-решетки (см. рис. 1, *в*) в виде куба со стороной, равной единице. Этот элемент содержит четыре фрагмента шаровых включений с центрами на концах непараллельных диагоналей параллельных граней куба. Центр одного из фрагментов поместим в начале координат, а центры остальных фрагментов — в точки с координатами $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$; $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ и $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$. В рассматриваемом случае наибольшее значение безразмерного радиуса равно $1/\sqrt{2}$, а наибольшее возможное значение объемной концентрации включений — $C_V^{\boxtimes} = \pi/(3\sqrt{2}) \approx 0{,}7405$.

Построение оценок для указанного представительного элемента также зависит от радиуса r. Модифицируя формулы (6) и (7), в случае $r \leqslant 1/2$ для верхней оценки λ_3^+ запишем
при $\bar{\lambda} > 1$

$$\frac{1}{\widetilde{\lambda}_3^+} = \frac{\lambda_m}{\lambda_3^+} = 1 - 2r + \frac{1}{b}\int\limits_0^r \frac{dx_3}{a_3 - x_3^2} = 1 - 2r + \frac{1}{2b\sqrt{a_3}} \ln\frac{\sqrt{a_3}+r}{\sqrt{a_3}-r},$$

где $a_3 = 1/(2b) + r^2$,
при $\bar{\lambda} < 1$

$$\frac{1}{\widetilde{\lambda}_3^+} = 1 - 2r + 2\int\limits_0^r \frac{dx_3}{1 + 2br^2 + 2|b|x_3^2} = 1 - 2r + \sqrt{\frac{2/|b|}{1+2br^2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{2|b|}r}{\sqrt{1+2br^2}}.$$

Если $1/2 < r \leqslant 1/\sqrt{2}$, то в представительном элементе выделим три слоя: два слоя, одинаковых по высоте с промежутками изменения координаты x_3 $(0; 1-r)$ и $(r; 1)$, и один промежуточный слой при $x_3 \in (1-r; r)$. Нижняя оценка безразмерного термического сопротивления одного из одинаковых слоев имеет вид

при $\bar{\lambda} > 1$

$$R_3' = \frac{1}{2b}\int\limits_0^{1-r} \frac{dx_3}{a_3 - x_3^2} = \frac{1}{2b\sqrt{a}_3}\ln\frac{\sqrt{a}_3 + 1 - r}{\sqrt{a}_3 - 1 + r},$$

при $\bar{\lambda} < 0$

$$R_3' = \int\limits_0^{1-r} \frac{dx_3}{1 + 2br^2 + 2|b|x_3^2} = \sqrt{\frac{|b|/2}{1+2br^2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2|b|}(1-r)}{\sqrt{1+2br^2}}.$$

Для промежуточного слоя такая же оценка равна
при $\bar{\lambda} > 1$

$$R_3'' = \int\limits_{1-r}^{r} \frac{dx_3}{1 + 2b(2r^2 - x_3^2 - (1-x_3)^2)} = \frac{1}{2b\sqrt{\Delta}_3}\ln\frac{2r - 1 + \sqrt{\Delta}_3}{2r - 1 - \sqrt{\Delta}_3},$$

где $\Delta_3 = 4r^2 - 1 + 1/b > 0$,
при $\bar{\lambda} < 1$, $\Delta_3 < 0$

$$R_2'' = \frac{1}{\sqrt{b^2|\Delta_3|}}\operatorname{arctg}\frac{2r-1}{\sqrt{|\Delta_3|}}.$$

В итоге для искомой оценки при $1/2 < r \leqslant \sqrt{3}/2$ запишем

$$\widehat{\lambda}_3^+ = 1/(2R_3' + R_3'').$$

При построении нижней оценки λ_3^- для рассматриваемого представительного элемента в случае $r \in (0; 1/2]$ после модификации формулы (4) получим

$$\widetilde{\lambda}_3^- = \frac{\lambda_3^-}{\lambda_m} = 1 - \pi r^2 + \frac{2\pi}{b_1}\left(r - \frac{\ln(1 + b_1 r)}{b_1}\right).$$

Для вычисления интеграла в формуле (2) в случае $r \in (1/2; 1/\sqrt{2})$ выделим четыре подобласти интегрирования (рис. 3). Подобласть *1′* — сектор окружности радиусом $r_3 = 1 - r$ с углом $\pi/2$ при вершине. Составляющая относительной тепловой проводимости элемента, соответствующая этой подобласти, после модификации формулы (4) примет вид

$$Y_1' = \frac{\pi/2}{b_1}\left(r - \frac{\ln(1 + b_1 r)}{b_1}\right).$$

Подобласть *2′* ограничена дугами окружностей радиусами r_3 и r, дугой $A'B'$ радиусом r окружности с центром в точке с координатами $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ и биссектрисой координатного угла (см. рис. 3). Перейдем к полярной системе координат и в соответствии с теоремой

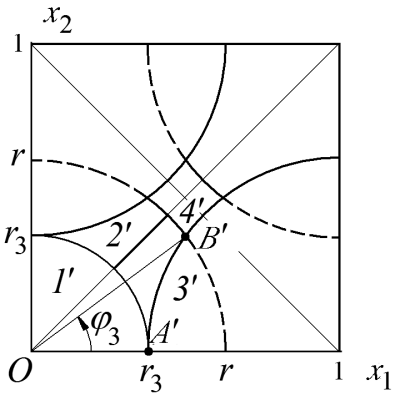


Рис. 3. Разбиение ячейки ГЦК-решетки на подобласти (*1′–4′*)

косинусов запишем $r^2 = 1 + \rho^2 - 2\rho\cos(\pi/4 - \varphi)$. Откуда следует уравнение дуги $A'B'$

$$\varphi'(r,\rho) = \pi/4 - \arccos((1+\rho^2-r^2)/(2\rho)).$$

Тогда составляющую проводимости рассматриваемого элемента, соответствующую подобласти *2′*, можно представить интегралом

$$Y_2' = 2\int\limits_{r_3}^{r} \frac{\pi/4 - \varphi'(r,\rho)}{1 + b_1\sqrt{r^2-\rho^2}}\rho d\rho.$$

Подобласть *3′* ограничена дугой радиусом r окружности с центром в начале полярной системы координат (см. рис. 3), координатной осью Ox_1 и дугой $A'B'$, при этом $\varphi \in [0;\varphi_3]$, где $\varphi_3 = \arccos(1/(2r))$. Для этой подобласти составляющая проводимости указанного представительного элемента равна

$$Y_3' = \int\limits_{r_3}^{r} \rho d\rho \int\limits_{0}^{\varphi'(r,\rho)} \frac{d\varphi}{1 + b_1(\sqrt{r^2-\rho^2} + \sqrt{r^2-\rho^2-1+2\rho\cos\varphi})}.$$

Наконец, для составляющей проводимости, соответствующей подобласти *4′*, имеем $Y_4' = 1 - \sqrt{4r^2-1} - (\pi - 4\varphi_3)r^2$.

Квадрат, представленный на рис. 3, включает в себя по четыре подобласти *1′*, *2′* и *3′* и подобласть *4′*. В итоге для искомой нижней оценки при $r \in (1/2; 1/\sqrt{2})$, равной суммарной относительной тепловой проводимости представительного элемента, находим

$$\widetilde{\lambda}_2^- = 4(Y_1' + Y_2' + Y_3') + Y_4'.$$

Результаты расчетов. Сравнительный количественный анализ полученных выше расчетных зависимостей для верхних ($\widetilde{\lambda}^+$) и нижних ($\widetilde{\lambda}^-$) безразмерных оценок эффективного коэффициента теплопроводности композита матричной структуры показал следующее: при $\bar{\lambda} = (\lambda^\circ/\lambda_m) \in [0{,}5; 2]$ взаимное расположение шаровых включений относительно слабо влияет на эти оценки. Для трех рассмотренных вариантов взаимного расположения включений такие оценки при изменении объемной концентрации C_V включений лежат внутри сравнительно узкой полосы, ограниченной двусторонними оценками

$$\widetilde{\lambda}_0^+ = 1 - C_V + C_V\bar{\lambda}; \quad \widetilde{\lambda}_0^- = 1/(1 - C_V + C_V/\bar{\lambda}), \tag{8}$$

которые следуют из смесевых моделей механики композитов [19] или из вариационной формулировки задачи стационарной теплопровод-

ности в неоднородном теле [8, 9] при произвольном расположении включений, но выходят за пределы полосы, ограниченной уточненными двусторонними оценками [6]

$$\widetilde{\lambda}_*^+ = \widetilde{\lambda}_0^+ - \frac{(1-C_V)C_V(1-\bar{\lambda})^2}{C_V + (1-C_V)\bar{\lambda} + 2\min\{\bar{\lambda},1\}};$$

$$\widetilde{\lambda}_*^- = \widetilde{\lambda}_0^+ - \frac{(1-C_V)C_V(1-\bar{\lambda})^2}{C_V + (1-C_V)\bar{\lambda} + 2\max\{\bar{\lambda},1\}}.$$

По мере отклонения параметра $\bar{\lambda}$ от единицы влияние взаимного расположения включений на значения $\widetilde{\lambda}^+$и $\widetilde{\lambda}^-$ возрастает. Зависимости оценок $\widetilde{\lambda}^+$ и $\widetilde{\lambda}^-$ при $\bar{\lambda} = 0{,}1$ от объемной концентрации C_V, построенные по полученным выше расчетным формулам для трех вариантов взаимного расположения включений, а также зависимости оценок $\widehat{\lambda}^+ = \widetilde{\lambda}^+/\bar{\lambda}$ и $\widehat{\lambda}^- = \widetilde{\lambda}^-/\bar{\lambda}$ от объемной концентрации C_V при $\bar{\lambda} = 10$ приведены на рис. 4, *а*. Все кривые для значения $\bar{\lambda} = 0,1$ при $C_V = 0$ выходят из точки с ординатой, равной 1, а для значения $\bar{\lambda} = 10$ при $C_V = 0$ — из точки с ординатой 0,1. Для рассмотренных вариантов расположения включений изменение концентрации C_V ограничено соответствующими предельными значениями $C_V^{\square} = \pi/6 \approx 0{,}5236$, $C_V^{\boxdot} = (\pi\sqrt{3})/8 \approx 0{,}6802$ и $C_V^{\boxtimes} = \pi/(3\sqrt{2}) \approx 0{,}7405$, показанными вертикальными штриховыми линиями на рис. 4. Эти линии позволяют отнести к конкретному варианту расположения включений зависимости нижней ($\widetilde{\lambda}^-$ или $\widehat{\lambda}^-$) или верхней ($\widetilde{\lambda}^+$ или $\widehat{\lambda}^+$) оценок, которым соответствуют штриховые или тонкие сплошные линии. Сплошные линии с квадратами и треугольниками построены по формулам (8),

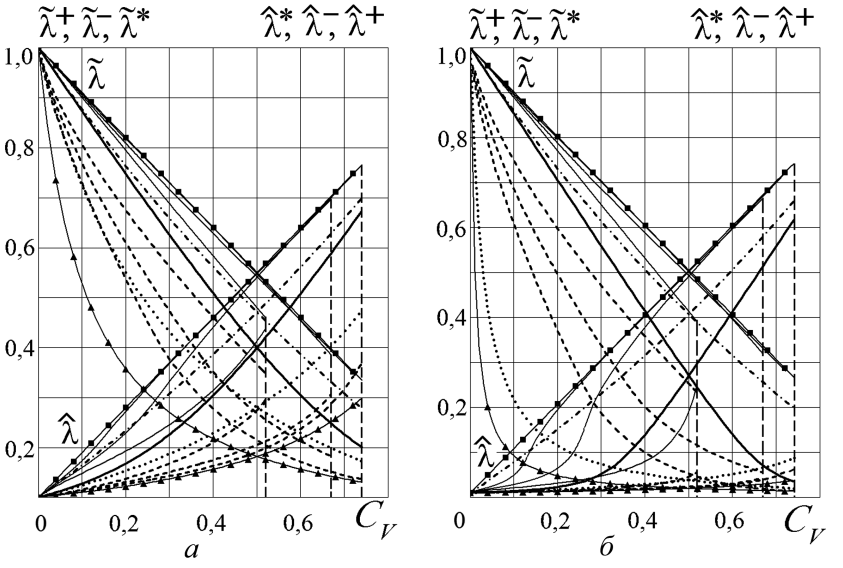


Рис. 4. Зависимости двусторонних оценок при $\bar{\lambda} = 0{,}1$ и $\bar{\lambda} = 10$ (*а*) и при $\bar{\lambda} = 0{,}01$ и $\bar{\lambda} = 1001$ (*б*) от объемной концентрации C_V

а штрихпунктирные и пунктирные линии соответствуют уточненным двусторонним оценкам. Две сплошные толстые кривые построены по формулам

$$\widetilde{\lambda}^* = \frac{\lambda^*}{\lambda_m} = \frac{2 - \bar{\lambda} + 3(\bar{\lambda} - 1)C_V + \sqrt{(2 - \bar{\lambda} + 3(\bar{\lambda} - 1)C_V)^2 + 8\bar{\lambda}}}{4};$$

$$\widehat{\lambda}^* = \frac{\lambda^*}{\lambda^\circ} = \frac{2 - \bar{\lambda} + 3(\bar{\lambda} - 1)C_V + \sqrt{(2 - \bar{\lambda} + 3(\bar{\lambda} - 1)C_V)^2 + 8\bar{\lambda}}}{4\bar{\lambda}},$$

где λ^* — оценка эффективного коэффициента теплопроводности композита с произвольным расположением шаровых включений, полученная методом самосогласования [20].

Согласно рис. 4, *а*, зависимости оценок $\widetilde{\lambda}^*$ и $\widehat{\lambda}^*$ не пересекают ни одной из кривых для соответствующих оценок, т.е. лежат внутри любой из полос, ограниченных каждой парой двусторонних оценок. Наиболее узкую полосу образуют оценки $\widetilde{\lambda}_1^+$ и $\widetilde{\lambda}_1^-$ ($\widehat{\lambda}_1^+$ и $\widehat{\lambda}_1^-$), соответствующие представительному элементу структуры композита с расположением шаровых включений в вершинах куба, т.е. в повторяющейся ячейке ПК-решетки. Более широкая полоса ограничена оценками $\widetilde{\lambda}_2^+$ и $\widetilde{\lambda}_2^-$ ($\widehat{\lambda}_2^+$ и $\widehat{\lambda}_2^-$), которые соответствуют ОЦК-решетке, а оценки $\widetilde{\lambda}_3^+$ и $\widetilde{\lambda}_3^-$ ($\widehat{\lambda}_3^+$ и $\widehat{\lambda}_3^-$), соответствующие ГЦК решетке, ограничивают наиболее широкую полосу. Необходимо отметить, что зависимости всех перечисленных оценок не выходят за пределы полос с границами, построенными по формулам (8), причем зависимости оценки $\widetilde{\lambda}_2^+$ и особенно оценки $\widetilde{\lambda}_3^+$ совпадают с зависимостью оценки $\widetilde{\lambda}_0^+$, а зависимости оценки $\widehat{\lambda}_3^+$ при $C_V > 3$ в масштабе рис. 4, *а* — с зависимостью оценки $\widehat{\lambda}_0^+ = \widetilde{\lambda}_0^+/\bar{\lambda}$.

Результаты расчетов при $\bar{\lambda} = 0{,}01$ и $\bar{\lambda} = 100$ представлены на рис. 4, *б* (с учетом тех же обозначений, что и на рис. 4, *а*). Расположение кривых совпадает с описанным выше за одним исключением: график для оценки $\widehat{\lambda}^*$ при $C_V \gtrapprox 0{,}3$ выходит за пределы полосы, ограниченной оценками $\widehat{\lambda}_1^+$ и $\widehat{\lambda}_1^-$.

Заключение. Полученные формулы для двусторонних оценок эффективного коэффициента теплопроводности при трех вариантах представительного элемента матричной структуры композита с шаровыми включениями позволили оценить влияние взаимного расположения этих включений. Расчетным путем установлено, что наименьшая разность верхней и нижней оценок соответствует варианту расположения включений в вершинах куба. С этим вариантом в приемлемом согласии находится оценка эффективного коэффициента теплопроводности композита с произвольным расположением включений, полученная методом самосогласования.

Работа выполнена в рамках программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант НШ–1432.2014.8) и программы Президента РФ поддержки молодых кандидатов наук (грант МК-6618.2013.8).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Оделевский В.И.* Расчет обобщенной проводимости гетерогенных систем // ЖТФ. Т. 21. 1951. Вып. 6. С. 667–685.
2. *Чудновский А.Ф.* Теплофизические характеристики дисперсных материалов. М.: Физматгиз, 1962. 456 с.
3. *Карслоу Г.*, *Егер Д.* Теплопроводность твердых тел: пер. с англ. М.: Наука, 1964. 488 с.
4. *Миснар А.* Теплопроводность твердых тел, жидкостей, газов и их композиций: Пер. с франц. М.: Мир, 1968. 464 с.
5. *Дульнев Г.Н.*, *Заричняк Ю.П.* Теплопроводность смесей и композиционных материалов. Л.: Энергия, 1974. 264 с.
6. *Шермергор Т.Д.* Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 400 с.
7. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов: пер. с англ. М.: Мир, 1982. 336 с.
8. *Зарубин В.С.*, *Кувыркин Г.Н.*, *Савельева И.Ю.* Эффективный коэффициент теплопроводности композита с шаровыми включениями // Тепловые процессы в технике. 2012. № 10. С. 470–474.
9. *Зарубин В.С.*, *Кувыркин Г.Н.*, *Савельева И.Ю.* Сравнительный анализ оценок коэффициентов теплопроводности композита с шаровыми включениями // Наука и образование: электронное научно-техническое издание. 2013. № 7. DOI: 10.7463/0713.0569319 [Электронный ресурс] URL: http://technomag.edu.ru/doc/569319.html (дата обращения: 17.12.2013).
10. *Зарубин В.С.*, *Кувыркин Г.Н.*, *Савельева И.Ю.* Теплопроводность композитов с шаровыми включениями. Saarbrucken, Deutschland: LAP Lambert Academic Publishing, 2013. 77 s.
11. *Jackson J.L.*, *Coriell S.R.* Transport coefficients of composite materials // J. Appl. Phys. 1968. Vol. 39. No. 5. P. 2349–2354.
12. *Coriell S.R.*, *Jackson J.L.* Bounds on transport coefficients of two-phase materials // J. Appl. Phys. 1968. Vol. 39. No. 10. P. 4733–4736.
13. *Зарубин В.С.*, *Зарубин С.В.*, *Кувыркин Г.Н.* Математическое моделирование теплопереноса в однонаправленном волокнистом композите // Наука и образование: электронное научно-техническое издание. 2014. № 1. DOI: 10.7463/0114.0657262 [Электронный ресурс] URL: http://technomag.edu.ru/doc/657262.html (дата обращения: 05.01.2014).
14. *Зарубин В.С.*, *Кувыркин Г.Н.*, *Савельева И.Ю.* Влияние взаимного расположения волокон на теплопроводность однонаправленного волокнистого композита // Известия вузов. Машиностроение. 2014. № 2. С. 20–28.
15. *Зарубин В.С.* Инженерные методы решения задач теплопроводности. М.: Энергоатомиздат, 1983. 328 с.
16. *Зарубин В.С.*, *Кувыркин Г.Н.* Двусторонние оценки термического сопротивления неоднородного твердого тела // Теплофизика высоких температур. 2013. Т. 51. № 4. С. 578–585.
17. *Зарубин В.С.*, *Кувыркин Г.Н.* Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 512 с.
18. *Градштейн И.С.*, *Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.

19. *Головин Н.Н.*, *Зарубин В.С.*, *Кувыркин Г.Н.* Смесевые модели механики композитов. Ч. 1. Термомеханика и термоупругость многокомпонентной смеси // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2009. № 3. С. 36–49.
20. *Зарубин В.С.*, *Кувыркин Г.Н.*, *Савельева И.Ю.* Оценка эффективной теплопроводности композита с шаровыми включениями методом самосогласования // Наука и образование: электронное научно-техническое издание. 2013. № 9. DOI: 10.7463/0913.0601512 [Электронный ресурс] URL: http://technomag.edu.ru/doc/601512.html (дата обращения: 17.12.2013).

REFERENCES

[1] Odelevskiy V.I Calculation of generalized conductivity of heterogeneous systems. *Sov. Phys.: Techn. Phys.* [Tech. Phys.], 1951, vol. 21, iss. 6, pp. 667–685 (in Russ.).
[2] Chudnovskiy A.F. Teplofizicheskie kharakteristiki dispersnykh materialov [Thermal and physical properties of dispersed materials]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1962. 456 p.
[3] Carslaw H., Jaeger J. Conduction of heat in solids. 2nd ed. USA, Oxford University Press, 1959. 510 p. (Russ. ed.: Karslou G., Eger D. Teploprovodnost' tverdykh tel. Moscow, Nauka Publ., 1964. 488 p.).
[4] Missenard A. Conductivité thermique des solides, liquide, gaz et leurs mélanges. Front Cover. André Missenard. Éditions Eyrolles, 1965. 554 p. (Russ. Ed.: Misnar A. Teploprovodnost' tverdykh tel, zhidkostey, gazov i ikh kompozitsiy [The heat conductivity of solids, liquids, gases and their compositions]. Moscow, Mir Publ., 1968. 464 p.).
[5] Dul'nev G.N., Zarichnyak Yu.P. Teploprovodnost' smesey i kompozitsionnykh materialov [The thermal conductivity of composite materials and mixtures] Moscow, Energiya Publ., 1974. 264 p.
[6] Shermergor T.D. Teoriya uprugosti mikroneodnorodnykh sred [The theory of elasticity of micro-inhomogeneous media]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 400 p.
[7] Christensen R.M. Mechanics of composite materials. N.Y., Wiley-Interscience Publ., 1979. 348 p. (Russ. ed.: Kristensen R.M. Vvedenie v mekhaniku kompozitov. Moscow, Mir Publ., 1982. 334 p.).
[8] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Yu. The effective thermal conductivity of composite with spherical inclusions. *Tepl. prots. v tekh.* [Therm. process. in engineering], 2012, no. 10, pp. 470–474 (in Russ.).
[9] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Yu. [Comparative analysis of estimations of thermal conduction of a composite with spherical inclusions]. *Jelektr. Nauchno-Tehn. Izd. "Nauka i obrazovanie" MGTU im. N.E. Baumana* [El. Sc.-Tech. Publ. "Science and Education" of Bauman MSTU], 2013, no. 7 (in Russ.). Available at: http://technomag.edu.ru/doc/569319.html (accessed 17.12.2013) DOI: 10.7463/0713.0569319
[10] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Yu. Teploprovodnost' kompozitov s sharovymi vklyucheniyami [The thermal conductivity of composites with spherical inclusions]. Saarbrucken, Deutschland, LAP Publ., 2013. 77 p.
[11] Jackson J.L., Coriell S.R. Transport coefficients of composite materials. *J. Appl. Phys.*, 1968, vol. 39, no. 5, pp. 2349–2354.
[12] Coriell S.R., Jackson J.L. Bounds on transport coefficients of two-phase materials. *J. Appl. Phys.*, 1968, vol. 39, no. 10, pp. 4733–4736.
[13] Zarubin V.S., Zarubin S.V., Kuvyrkin G.N. Mathematical simulation of heat transfer in unidirectional fiber composite. *Jelektr. Nauchno-Tehn. Izd. "Nauka i obrazovanie" MGTU im. N.E. Baumana* [El. Sc.-Tech. Publ. "Science and Education" of Bauman MSTU], 2014, no. 1 (in Russ.). Available at: http://technomag.edu.ru/doc/657262.html (accessed 05.01.2014). DOI: 10.7463/0114.0657262

[14] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Yu. The influence of relative position of fibers on the thermal conductivity of unidirectional fiber composites. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mashinostr.* [Proc. Univ., Mech. Eng.], 2014, no. 2, pp. 20–28 (in Russ.).

[15] Zarubin V.S. Inzhenernye metody resheniia zadachvteploprovodnosti [Engineering methods for solving problems of heat conduction]. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1983. 328 p.

[16] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Bilateral estimates of the thermal resistance of an inhomogeneous solid body. *Teplofiz. Vys. Temp.* [High Temp.], 2013, vol. 51, no. 4, pp. 578–585 (in Russ.).

[17] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Matematicheskie modeli mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoy sredy [Mathematical models of mechanics and electrodynamics of continuous media]. Moscow, MGTU im. N.E. Baumana Publ., 2008. 512 p.

[18] Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedeniy [Tables of integrals, sums, series and products]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1963. 1100 p. (Engl. Ed.: Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. Table of integrais, series, and products. Ed. by Alan Jeffrey. 4th ed. New York, Sydney, Academic Press, 1980. 1160 p.).

[19] Golovin N.N., Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Mixture models of composite mechanics. P. 1. Thermal mechanics and thermoelasticity of multicomponent mixture. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2009, no. 3, pp. 36–49 (in Russ.).

[20] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Yu. Evaluation of effective thermal conductivity of composites with ball inclusions by the method of self-consistency. *Jelektr. Nauchno-Tehn. Izd. "Nauka i obrazovanie" MGTU im. N.E. Baumana* [El. Sc.-Tech. Publ. "Science and Education" of Bauman MSTU], 2013, no. 9 (in Russ.). Available at: http://technomag.edu.ru/doc/601512.html (accessed 17.12.2013). DOI: 10.7463/0913.0601512

Статья поступила в редакцию 17.02.2014

Владимир Степанович Зарубин — д-р техн. наук, профессор кафедры "Прикладная математика" МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 300 научных работ в области термомеханики.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

V.S. Zarubin — Dr. Sci. (Eng.), professor of "Applied Mathematics" department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 300 publications in the field of thermal mechanics.
Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

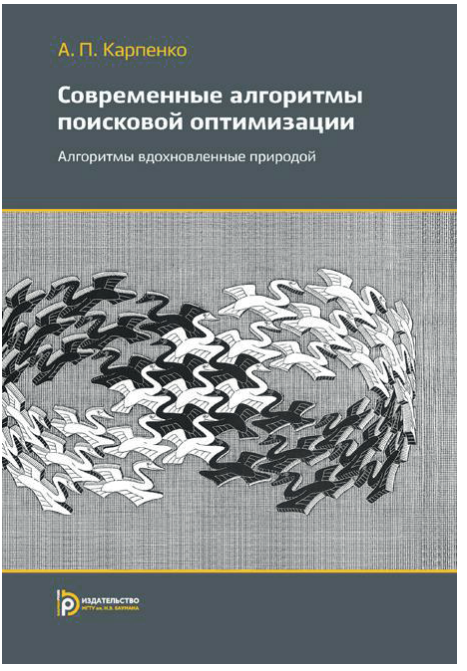
Георгий Николаевич Кувыркин — д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой "Прикладная математика" МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 200 научных работ в области прикладной математики и математического моделирования термомеханических процессов в материалах и элементах конструкций.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

G.N. Kuvyrkin — Dr. Sci. (Eng.), professor, head of "Applied Mathematics" department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 200 publications in the field of applied mathematics and mathematical modelling of thermal and mechanical processes in materials and constructions.
Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Инга Юрьевна Савельева — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 20 научных работ в области моделирования нестационарной теплопроводности.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

I.Yu. Savel’eva — Cand. Sci. (Phys.-Math.), assoc. professor of “Applied Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 20 publications in the field of non-stationary heat conduction modeling.
Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

В Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана вышла в свет книга “Современные алгоритмы поисковой оптимизации. Алгоритмы, вдохновленные природой”



Учебное пособие посвящено, преимущественно, рассмотрению современных стохастических популяционных алгоритмов решения однокритериальной задачи оптимизации. Рассмотрены методы повышения эффективности этих алгоритмов путем их гибридизации и метаоптимизации. Наряду с однокритериальной рассматривается задача многокритериальной оптимизации и популяционные алгоритмы ее решения. Представлены методы распараллеливания указанных алгоритмов. Содержит большое число примеров решения тестовых и практически значимых задач оптимизации.

Для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению 230100 “Информатика и вычислительная техника”. Может быть полезно для всех студентов, изучающих курс “Методы оптимизации” и близкие по тематике курсы. Материал пособия представляет интерес также для аспирантов и специалистов, использующих в своей работе методы, алгоритмы и программы оптимизации.