

УДК 519.6

Ю. И. Димитриенко, М. Н. Коряков,
А. А. Захаров, Е. К. Сыздыков

РАЗВИТИЕ МЕТОДА ЛЕНТОЧНО-АДАПТИВНЫХ СЕТОК НА ОСНОВЕ СХЕМ TVD ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Предложен вариант метода ленточно-адаптивных сеток, основанный на схеме TVD 2-го порядка точности. Представлены результаты тестирования численного метода на основе решения задач распада разрыва, обтекания клина и ступеньки. Показано, что разработанный метод на основе схемы TVD обеспечивает более высокую точность численного моделирования, чем метод ленточно-адаптивных сеток на основе схемы Мак-Кормака, однако время расчета этими методами примерно одинаково.

E-mail: dimit.bmstu@gmail.com

Ключевые слова: газовая динамика, численные методы, схемы TVD, ленточно-адаптивные сетки.

Схемы TVD в последнее время стали достаточно популярны при решении задач газовой динамики благодаря повышенной точности численного решения, получаемой с их помощью, особенно для задач с наличием сильных разрывов [1, 2]. Однако их, как правило, используют в ортогональных системах координат, поэтому опыт применения этих схем для задач с областями сложной формы пока не велик. Цель настоящей работы — развитие алгоритма построения схем TVD по методу Хартена для численного решения системы уравнений газовой динамики в произвольных неортогональных системах координат, которые применяются при использовании метода ленточно-адаптивных сеток [1].

Система уравнений газовой динамики. Рассмотрим систему уравнений динамики идеального газа, которая в адаптивных криволинейных координатах X^i может быть записана в виде [1]

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{V}^i}{\partial X^i} = 0, \quad (1)$$

где

$$\mathbf{U} = \sqrt{g} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho Q_j^1 v^j \\ \rho Q_j^2 v^j \\ \rho Q_j^3 v^j \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}^i = \sqrt{g} \begin{pmatrix} \rho v^i \\ Q_j^1 (\rho v^i v^j + p g^{ij}) \\ Q_j^2 (\rho v^i v^j + p g^{ij}) \\ Q_j^3 (\rho v^i v^j + p g^{ij}) \\ v^i (\rho E + p) \end{pmatrix} \quad (2)$$

— координатные столбцы; ρ — плотность газа; $E = c_v \theta + \frac{|v|^2}{2}$ — полная энергия газа; c_v — теплоемкость при постоянном объеме; θ — температура газа; $|v|^2 = v^i v_i$ — квадрат модуля скорости; $p = \rho \frac{R}{\mu} \theta$ — давление, R — универсальная газовая постоянная; μ — молекулярная масса газа; $g = \det g_{ij}$ — детерминант метрической матрицы $g_{ij} = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j = Q_i^k Q_j^l \delta_{kl}$; v^i — компоненты вектора скорости в базисе \mathbf{r}_i адаптивной системы координат X^i ; $Q_i^j = \frac{\partial x^j}{\partial X^i}$ — компоненты якобиевой матрицы преобразования декартовых координат в адаптивные; \mathbf{E} — метрический тензор; $\nabla = \mathbf{r}^i \frac{\partial}{\partial X^i}$ — набла-оператор в криволинейных координатах X^i ; $\gamma = c_p/c_v$ — коэффициент Пуассона.

Кроме системы (1), имеющей дивергентный вид, рассмотрим также систему уравнений газовой динамики недивергентного вида [1]

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{U}}}{\partial t} + P_j^i \frac{\partial \bar{\mathbf{V}}^j}{\partial X^i} = 0, \quad (3)$$

где

$$\bar{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \bar{v}^1 \\ \rho \bar{v}^2 \\ \rho \bar{v}^3 \\ \rho E \end{pmatrix}; \quad \bar{\mathbf{V}}^i = \begin{pmatrix} \rho \bar{v}^i \\ \rho \bar{v}^i \bar{v}^1 + p \delta^{i1} \\ \rho \bar{v}^i \bar{v}^2 + p \delta^{i2} \\ \rho \bar{v}^i \bar{v}^3 + p \delta^{i3} \\ \bar{v}^i (\rho E + p) \end{pmatrix}, \quad (4)$$

а \bar{v}^i — компоненты в декартовой системе координат.

Схема TVD для дивергентной системы. Рассмотрим способ получения TVD-схемы 2-го порядка аппроксимации, основанный на методе Хартена [3] (методе модифицированного потока), который заключается в применении TVD-схемы 1-го порядка аппроксимации к соответствующим образом модифицированным потокам функций: $\tilde{f} = \left(f + \frac{1}{\lambda} g \right)$, где $\lambda = \frac{\Delta X}{\Delta t}$, а g — модифицирующая добавка (будет введена ниже). Тогда конечно-разностные соотношения, аппроксимирующие уравнения Эйлера (1), можно представить в виде явной схемы

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_k^{n+1} &= \mathbf{U}_k^n - \lambda^1 (\tilde{\mathbf{V}}_{k+1/2}^{1,n} - \tilde{\mathbf{V}}_{k-1/2}^{1,n}) - \\ &- \lambda^2 (\tilde{\mathbf{V}}_{k+1/2}^{2,n} - \tilde{\mathbf{V}}_{k-1/2}^{2,n}) - \lambda^3 (\tilde{\mathbf{V}}_{k+1/2}^{3,n} - \tilde{\mathbf{V}}_{k-1/2}^{3,n}) = \\ &= \mathbf{U}_k^n - \sum_{i=1}^3 [\lambda^i (\tilde{\mathbf{V}}_{k+1/2}^{i,n} - \tilde{\mathbf{V}}_{k-1/2}^{i,n})], \quad (5) \end{aligned}$$

ВИД:

$$\mathbf{R}_k^i = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \bar{v}^1 - as_1 & \bar{v}^1 & s_2 & -s_3 & \bar{v}^1 + as_1 \\ \bar{v}^2 - as_2 & \bar{v}^2 & -s_1 & 0 & \bar{v}^2 + as_2 \\ \bar{v}^3 - as_3 & \bar{v}^3 & 0 & s_1 & \bar{v}^3 + as_3 \\ H - a \frac{v^i}{g^{ii}} & \frac{|v|^2}{2} & \bar{v}^1 s_2 - \bar{v}^2 s_1 & \bar{v}^3 s_1 - \bar{v}^1 s_3 & H + a \frac{v^i}{\sqrt{g^{ii}}} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

если $s_1 \neq 0$;

$$\mathbf{R}_k^i = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \bar{v}^1 - as_1 & \bar{v}^1 & s_2 & 0 & \bar{v}^1 + as_1 \\ \bar{v}^2 - as_2 & \bar{v}^2 & -s_1 & s_3 & \bar{v}^2 + as_2 \\ \bar{v}^3 - as_3 & \bar{v}^3 & 0 & -s_2 & \bar{v}^3 + as_3 \\ H - a \frac{v^i}{\sqrt{g^{ii}}} & \frac{|v|^2}{2} & \bar{v}^1 s_2 - \bar{v}^2 s_1 & \bar{v}^2 s_3 - \bar{v}^3 s_2 & H + a \frac{v^i}{\sqrt{g^{ii}}} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

если $s_2 \neq 0$;

$$\mathbf{R}_k^i = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \bar{v}^1 - as_1 & \bar{v}^1 & -s_3 & 0 & \bar{v}^1 + as_1 \\ \bar{v}^2 - as_2 & \bar{v}^2 & 0 & s_3 & \bar{v}^2 + as_2 \\ \bar{v}^3 - as_3 & \bar{v}^3 & s_1 & -s_2 & \bar{v}^3 + as_3 \\ H - a \frac{v^i}{\sqrt{g^{ii}}} & \frac{|v|^2}{2} & \bar{v}^3 s_1 - \bar{v}^1 s_3 & \bar{v}^2 s_3 - \bar{v}^3 s_2 & H + a \frac{v^i}{\sqrt{g^{ii}}} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

если $s_3 \neq 0$. Здесь $s_j = P_j^i / \sqrt{g^{ii}}$.

Столбец $\Phi_{k+1/2}^{i,n}$ численной диссипации имеет следующие компоненты:

$$\Phi_{k+1/2}^{i,n} = (\phi_{1,k+1/2}^{i,n}, \dots, \phi_{5,k+1/2}^{i,n})^T; \quad (10)$$

$$\phi_{j,k+1/2}^{i,n} = g_{j,k}^{i,n} + g_{j,k+1/2}^{i,n} - \psi(\lambda^i a_{j,k+1/2}^{i,n} + \gamma_{j,k+1/2}^{i,n}) \alpha_{j,k+1/2}^{i,n};$$

$$g_{j,k}^{i,n} = s_{j,k+1/2}^{i,n} \max[0, \min(|\tilde{g}_{j,k+1/2}^{i,n}|, \tilde{g}_{j,k+1/2}^{i,n} s_{j,k+1/2}^{i,n})];$$

$$s_{j,k+1/2}^{i,n} = \text{sign}(\tilde{g}_{j,k+1/2}^{i,n});$$

$$\tilde{g}_{j,k+1/2}^{i,n} = \frac{1}{2} [\psi(\lambda^i a_{j,k+1/2}^{i,n}) - (\lambda^i a_{j,k+1/2}^{i,n})^2] \alpha_{j,k+1/2}^{i,n};$$

$$\gamma_{j,k+1/2}^{i,n} = \begin{cases} (g_{j,k+}^{i,n} - g_{j,k}^{i,n}) / \alpha_{j,k+1/2}^{i,n}, & \alpha_{j,k+1/2}^{i,n} \neq 0; \\ 0, & \alpha_{j,k+1/2}^{i,n} = 0. \end{cases}$$

Величины $a_{j,k}^{i,n} = a_j^i(X_k, t^n)$ — это значения собственных чисел a_j^i матриц \mathbf{G}^i в точке k в момент времени t^n , которые определяются по формулам

$$a_1^i = v^i - a\sqrt{g^{ii}}; \quad a_2^i = v^i; \quad a_3^i = v^i; \quad a_4^i = v^i; \quad a_5^i = v^i + a\sqrt{g^{ii}}. \quad (11)$$

Величины $\alpha_{j,k+1/2}^{i,n}$, представляющие собой перепады вектора газодинамических переменных \mathbf{U}_k^n в характеристической форме, находятся из соотношений

$$\alpha_{k+1/2}^{i,n} = (\alpha_{1,k+1/2}^{i,n}, \dots, \alpha_{5,k+1/2}^{i,n})^T = (\mathbf{R}_{k+1/2}^{i,n})^{-1}(\mathbf{U}_{k+}^n - \mathbf{U}_k^n). \quad (12)$$

Здесь $(\mathbf{R}_{k+1/2}^{i,n})^{-1} = ((\mathbf{R}_{k+}^{i,n})^{-1} + (\mathbf{R}_k^{i,n})^{-1})/2$, а $(\mathbf{R}_k^{i,n})^{-1} = (\mathbf{R}^i)^{-1}(X_k, t^n)$ — матрицы левых собственных векторов матрицы \mathbf{G}^i , которые имеют следующий вид [4]:

$$(\mathbf{R}_k^i)^{-1} = \begin{bmatrix} (\gamma-1)|v|^2 + 2a\frac{\bar{v}^i}{\sqrt{g^{ii}}} & (1-\gamma)\bar{v}^1 - as_1 & (1-\gamma)\bar{v}^2 - as_2 & (1-\gamma)\bar{v}^3 - as_3 & \gamma-1 \\ \frac{4a^2}{2a^2 - (\gamma-1)|v|^2} & \frac{2a^2}{(\gamma-1)\bar{v}^1} & \frac{2a^2}{(\gamma-1)\bar{v}^2} & \frac{2a^2}{(\gamma-1)\bar{v}^3} & \frac{2a^2}{\gamma-1} \\ \frac{4a^2}{\bar{v}^2 - \frac{\bar{v}^i}{\sqrt{g^{ii}}}s_2} & a^2 & a^2 & a^2 & a^2 \\ s_1 & s_2 & \frac{s_2^2 - 1}{s_1} & \frac{s_2s_3}{s_1} & 0 \\ \frac{\bar{v}^i}{\sqrt{g^{ii}}}s_3 - \bar{v}^3 & -s_3 & -\frac{s_2s_3}{s_1} & \frac{1 - s_3^2}{s_1} & 0 \\ s_1 & & s_1 & s_1 & 0 \\ \frac{(\gamma-1)|v|^2 - 2a\frac{\bar{v}^i}{\sqrt{g^{ii}}} & (1-\gamma)\bar{v}^1 + as_1 & (1-\gamma)\bar{v}^2 + as_2 & (1-\gamma)\bar{v}^3 + as_3 & \gamma-1 \\ 4a^2 & 2a^2 & 2a^2 & 2a^2 & 2a^2 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

если $s_1 \neq 0$;

$$(\mathbf{R}_k^i)^{-1} = \begin{bmatrix} (\gamma-1)|v|^2 + 2a\frac{\bar{v}^i}{\sqrt{g^{ii}}} & (1-\gamma)\bar{v}^1 - as_1 & (1-\gamma)\bar{v}^2 - as_2 & (1-\gamma)\bar{v}^3 - as_3 & \gamma-1 \\ \frac{4a^2}{2a^2 - (\gamma-1)|v|^2} & \frac{2a^2}{(\gamma-1)\bar{v}^1} & \frac{2a^2}{(\gamma-1)\bar{v}^2} & \frac{2a^2}{(\gamma-1)\bar{v}^3} & \frac{2a^2}{\gamma-1} \\ \frac{4a^2}{\frac{\bar{v}^i}{\sqrt{g^{ii}}}s_1 - \bar{v}^1} & \frac{1 - s_1^2}{s_2} & -s_1 & -\frac{s_1s_3}{s_2} & 0 \\ s_2 & s_2 & s_3 & \frac{s_3^2 - 1}{s_1} & 0 \\ \bar{v}^3 - \frac{\bar{v}^i}{\sqrt{g^{ii}}}s_3 & \frac{s_1s_3}{s_2} & s_3 & \frac{s_3^2 - 1}{s_1} & 0 \\ s_2 & s_2 & s_3 & s_3 & 0 \\ \frac{(\gamma-1)|v|^2 - 2a\frac{\bar{v}^i}{\sqrt{g^{ii}}} & (1-\gamma)\bar{v}^1 + as_1 & (1-\gamma)\bar{v}^2 + as_2 & (1-\gamma)\bar{v}^3 + as_3 & \gamma-1 \\ 4a^2 & 2a^2 & 2a^2 & 2a^2 & 2a^2 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

если $s_2 \neq 0$;

$$\begin{aligned}
 & (\mathbf{R}_k^i)^{-1} = \\
 & = \begin{bmatrix} \frac{(\gamma-1)|v|^2 + 2a\frac{\bar{v}^i}{\sqrt{g^{ii}}} (1-\gamma)\bar{v}^1 - as_1}{4a^2} \frac{(1-\gamma)\bar{v}^2 - as_2}{2a^2} \frac{(1-\gamma)\bar{v}^3 - as_3}{2a^2} \frac{\gamma-1}{2a^2} \\ \frac{2a^2 - (\gamma-1)|v|^2}{4a^2} \frac{(\gamma-1)\bar{v}^1}{a^2} \frac{(\gamma-1)\bar{v}^2}{a^2} \frac{(\gamma-1)\bar{v}^3}{a^2} \frac{\gamma-1}{a^2} \\ \frac{\bar{v}^1 - \frac{\bar{v}^i}{\sqrt{g^{ii}}}s_1}{s_3} \frac{s_1^2 - 1}{s_3} \frac{s_1s_2}{s_3} -s_1 \quad 0 \\ \frac{\frac{\bar{v}^i}{\sqrt{g^{ii}}}s_2 - \bar{v}^3}{s_3} -\frac{s_1s_2}{s_3} \frac{1-s_2^2}{s_1} -s_2 \quad 0 \\ \frac{(\gamma-1)|v|^2 - 2a\frac{\bar{v}^i}{\sqrt{g^{ii}}} (1-\gamma)\bar{v}^1 + as_1}{4a^2} \frac{(1-\gamma)\bar{v}^2 + as_2}{2a^2} \frac{(1-\gamma)\bar{v}^3 + as_3}{2a^2} \frac{\gamma-1}{2a^2} \end{bmatrix}, \quad (15)
 \end{aligned}$$

если $s_3 \neq 0$.

Функция численной вязкости ψ определяется по формуле

$$\psi(z) = \begin{cases} |z|, & z \geq \varepsilon; \\ (z^2 + \varepsilon^2)/2\varepsilon, & z < \varepsilon, \end{cases} \quad (16)$$

где ε — параметр диссипации. При $\varepsilon = 0$ диссипация будет наименьшей; чем больше ε , тем более диссипативной является разностная схема.

Для недивергентной системы (3) конечно-разностные соотношения схемы TVD 2-го порядка, примененной для ленточно-адаптивной сетки, имеют вид

$$\begin{aligned}
 & \bar{\mathbf{U}}_k^{n+1} = \bar{\mathbf{U}}_k^n - \\
 & - \Delta t \left(\frac{\tilde{\mathbf{V}}_{k+1/2}^{1,n} - \tilde{\mathbf{V}}_{k-1/2}^{1,n}}{X_{F_k}^{1,n} - X_k^{1,n}} - \frac{\tilde{\mathbf{V}}_{k+1/2}^{1,n} - \tilde{\mathbf{V}}_{k-1/2}^{1,n}}{X_{R_k}^{2,n} - X_k^{2,n}} - \frac{\tilde{\mathbf{V}}_{k+1/2}^{1,n} - \tilde{\mathbf{V}}_{k-1/2}^{1,n}}{X_{U_k}^{3,n} - X_k^{3,n}} \right) - \\
 & - \Delta t \left(\frac{\tilde{\mathbf{V}}_{k+1/2}^{2,n} - \tilde{\mathbf{V}}_{k-1/2}^{2,n}}{X_{F_k}^{1,n} - X_k^{1,n}} - \frac{\tilde{\mathbf{V}}_{k+1/2}^{2,n} - \tilde{\mathbf{V}}_{k-1/2}^{2,n}}{X_{R_k}^{2,n} - X_k^{2,n}} - \frac{\tilde{\mathbf{V}}_{k+1/2}^{2,n} - \tilde{\mathbf{V}}_{k-1/2}^{2,n}}{X_{U_k}^{3,n} - X_k^{3,n}} \right) - \\
 & - \Delta t \left(\frac{\tilde{\mathbf{V}}_{k+1/2}^{3,n} - \tilde{\mathbf{V}}_{k-1/2}^{3,n}}{X_{F_k}^{1,n} - X_k^{1,n}} - \frac{\tilde{\mathbf{V}}_{k+1/2}^{3,n} - \tilde{\mathbf{V}}_{k-1/2}^{3,n}}{X_{R_k}^{2,n} - X_k^{2,n}} - \frac{\tilde{\mathbf{V}}_{k+1/2}^{3,n} - \tilde{\mathbf{V}}_{k-1/2}^{3,n}}{X_{U_k}^{3,n} - X_k^{3,n}} \right), \quad (17)
 \end{aligned}$$

где численные потоки представляются в виде

$$\tilde{\mathbf{V}}_{k+1/2}^{i,n} = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{V}}_k^{i,n} + \bar{\mathbf{V}}_{k+1}^{i,n})P_{i,k}^{j,n} + \frac{1}{2\lambda^j} \mathbf{R}_{k+1/2}^{i,n} \cdot \Phi_{k+1/2}^{i,n}; \quad (18)$$

$P_{i,k}^{j,n} = P_j^i(X_k, t^n)$ — компоненты обратной матрицы Якоби перехода из декартовых координат к адаптивным. Матрица $\mathbf{R}_{k+1/2}^{i,n}$ правых собственных векторов получается из (7)–(9) заменой P_j^i на δ_j^i , v^i на \bar{v}^i , g^{ii} на 1 для всех i .

Столбец $\Phi_{k+1/2}^{i,n}$ определяется по формулам (10), (11), в которых следует провести замену $a_{j,k+1/2}^{i,n} \rightarrow \tilde{a}_{j,k+1/2}^{i,n}$, где $\tilde{a}_{j,k+1/2}^{i,n} = \bar{a}_{j,k+1/2}^{i,n} P_{i,k+1/2}^{j,n}$, а $\bar{a}_{j,k}^{i,n} = \bar{a}_j^i(X_k, t^n)$ — собственные значения матрицы \mathbf{G}^i , в декартовой системе координат имеющие вид

$$a_1^i = \bar{v}^i - a; \quad a_2^i = \bar{v}^i; \quad a_3^i = \bar{v}^i; \quad a_4^i = \bar{v}^i; \quad a_5^i = \bar{v}^i + a. \quad (19)$$

Матрицы левых собственных векторов $(\mathbf{R}_{k+1/2}^i)^{-1}$ также получаются из соотношений (13)–(15) заменой P_j^i на δ_j^i , v^i на \bar{v}^i , $g^{ii} = 1$ для всех i .

Была проведена серия численных тестов для апробации разработанного метода TVD. В качестве сравнения использовались результаты задач, полученные по методу ленточно-адаптивных сеток на основе схем типа Мак-Кормака [1], а также численные расчеты на основе схемы RKDG, взятые из [5].

Задача о распаде произвольного разрыва. В этой классической задаче [1] в качестве начальных данных были заданы скачки безразмерной плотности и давления: при $x \leq 0,5$ $p = 1$, $\rho = 1$; при $x > 0,5$ $p = 0,1$, $\rho = 0,125$ (все параметры здесь и далее, в том числе геометрические размеры и время, — безразмерные). На рис. 1 показаны распределения плотности, давления и скорости газа в момент времени $t = 0,25$. Решение по методу TVD имеет значительно более высокую точность решения, в том числе для скачка плотности и давления на ударных волнах и на контактном разрыве. “Размазывание” решения на скачках для метода TVD происходит на одной-двух разностных ячейках, а для метода Мак-Кормака — на трех-четырех. Шаг расчетной сетки $\Delta x = 0,0025$.

Течение газа в канале со ступенькой. Сверхзвуковой поток идеального газа (число Маха $M = 3$, коэффициент Пуассона $\gamma = 7/5$) затекает в прямоугольный канал размером 3×1 , на расстоянии 0,6 от левой грани которого располагается ступенька высотой 0,2. Начальные условия: $p = 0,05$, $\rho = 0,5$, $v_x = v_y = 0$; граничные условия входа потока: $p = 1/\gamma$, $\rho = 1$, $v_x = 3$, $v_y = 0$. На рис. 2 показаны результаты решения этой задачи методом Мак-Кормака и по разработанной схеме TVD с разными значениями параметра диссипации ε , а также численные результаты, полученные в ИПМ им. М.В. Келдыша [5]. Решение по методу TVD при $\varepsilon = 0,01$ обладает более высокой четкостью линий уровня, чем по схеме Мак-Кормака, — “размазывание” ударных волн

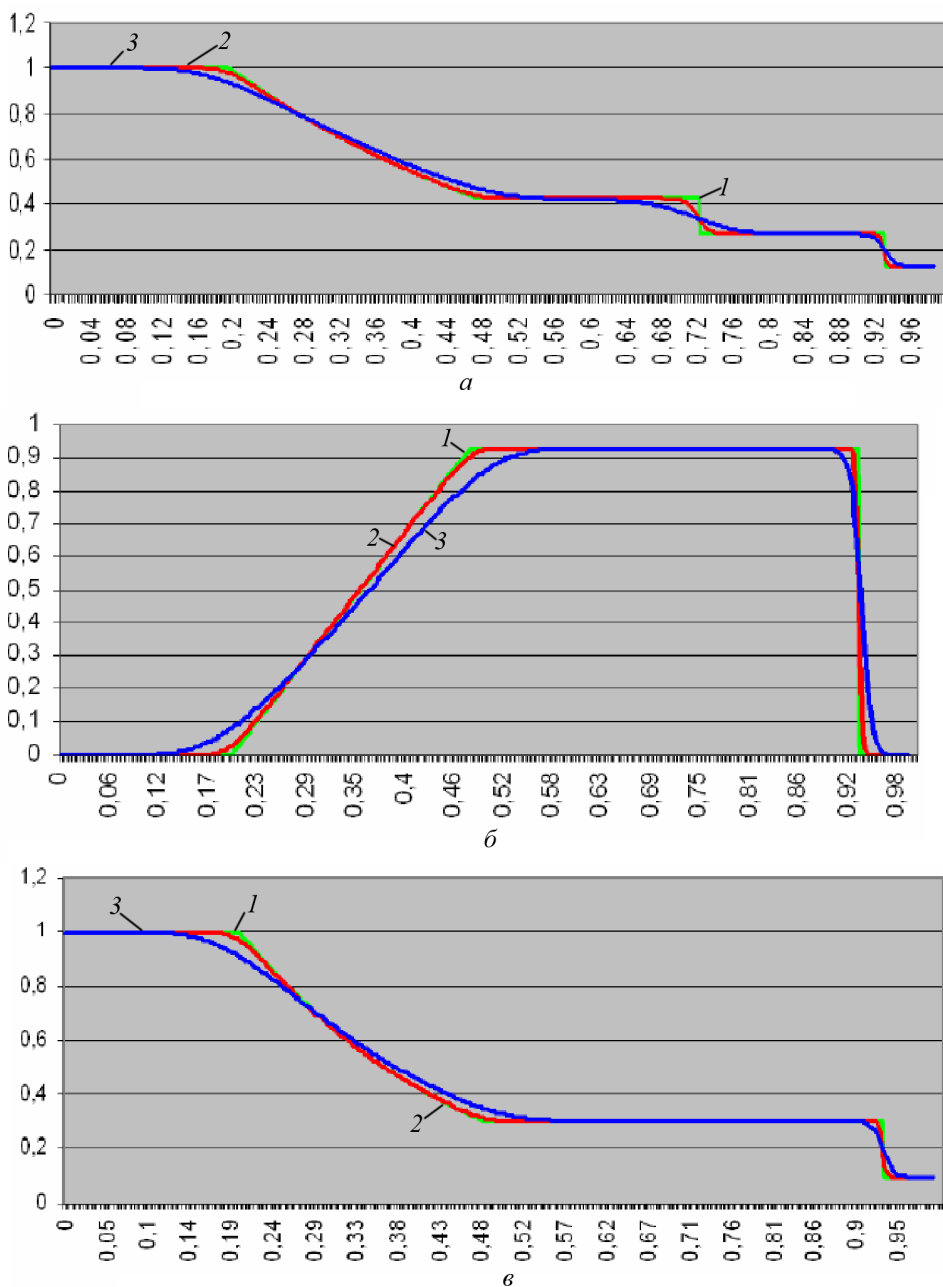


Рис. 1. Графики плотности (а), скорости (б) и давления (е), рассчитанные аналитическим методом (1) и численными методами TVD (2) и Мак-Кормака (3)

происходит на двух ячейках, в то время как для метода Мак-Кормака на трех-четырёх ячейках. Для схемы TVD с $\varepsilon = 0,02$ “размазывание” происходит на трех ячейках. Шаг расчетной сетки $\Delta x = \Delta y = 0,0125$.

Обтекание клина. Клин размером $3,2 \times 2,2$ с углом 30° обтекается сверхзвуковым потоком. Начальные условия: $p = 1$, $\rho = 1,4$,

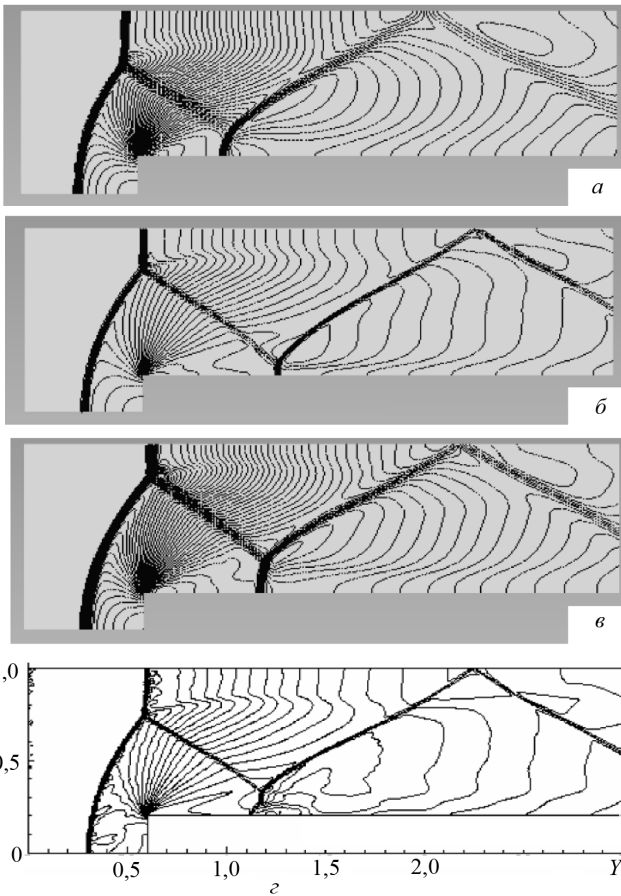


Рис. 2. Результаты численного решения (линии уровня для безразмерной плотности), полученного методами Мак-Кормака (а), TVD при $\varepsilon = 0,01$ (б), $\varepsilon = 0,02$ (в) и в ИПМ им. М.В. Келдыша (г) для задачи об обтекании сверхзвуковым потоком газа ступеньки в канале

$v_x = v_y = 0$; граничные условия: $p = 117$, $\rho = 8$, $v_x = 8,25$, $v_y = 0$. На рис. 3 показаны линии уровня плотности в момент времени $t = 0,2$ с. Как и в случае задачи об обтекании ступеньки, метод TVD обеспечивает более высокую четкость картины течения с меньшим “размазыванием” решения на ударных волнах. Шаг расчетной сетки по адаптивным координатам $\Delta X^1 = \Delta X^2 = 0,03$.

Метод на основе схемы TVD обеспечивает более высокую точность численного моделирования, чем метод ленточно-адаптивных сеток на основе схемы Мак-Кормака, но время расчета у этих методов оказалось примерно одинаковым вследствие значительно более сложного алгоритма вычислений у схемы TVD, несмотря на более крупный шаг по времени.

Выводы. Предложен алгоритм численного решения задач газовой динамики на основе схемы TVD 2-го порядка и метода ленточных адаптивных сеток. Проведенное тестирование для ряда классических

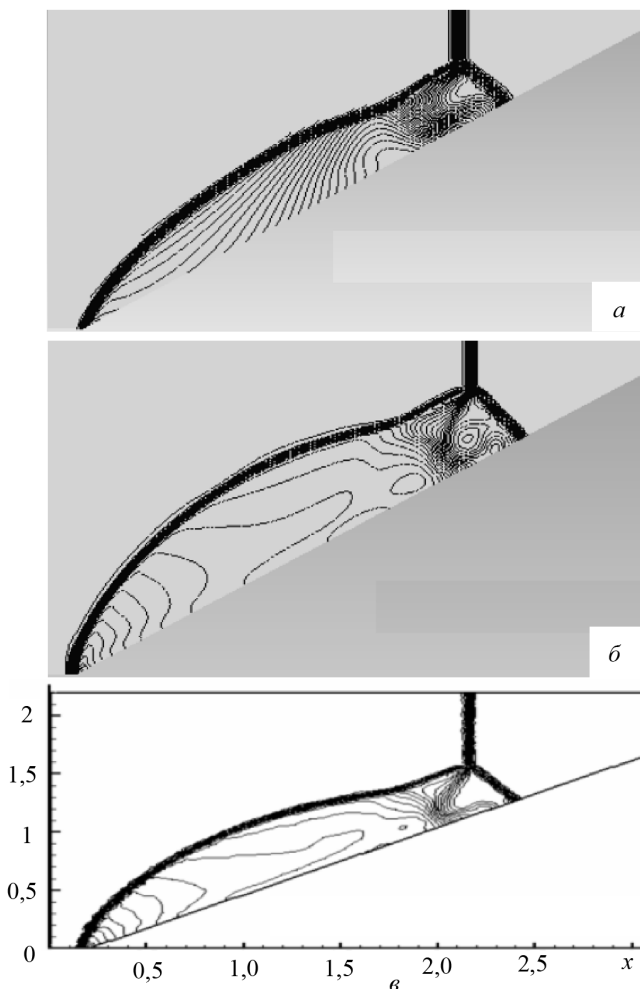


Рис. 3. Результаты численного решения (линии уровня для безразмерной плотности), полученного методами Мак-Кормака (*а*), TVD при $\varepsilon = 0,1$ (*б*) и в ИИМ им. М.В. Келдыша (*в*) [5] для задачи об обтекании клина сверхзвуковым потоком газа

задач показало, что алгоритм схемы TVD обеспечивает более высокую точность численного моделирования, чем метод ленточно-адаптивных сеток на основе схемы Мак-Кормака, однако машинное время расчета задач с помощью этих методов примерно одинаково вследствие существенно более сложного алгоритма вычислений для схемы TVD, несмотря на более крупный шаг по времени.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта Президента РФ МК-4234.2010.8.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Димитриенко Ю. И., Захаров А. А. Метод ленточных адаптивных сеток в газовой динамике. – М.: Изд-во НТЦ “Университетский”, 2008. – 180 с.

2. Г и л ь м а н о в А. Н. Методы адаптивных сеток в задачах газовой динамики. – М.: Наука. Физматлит, 2000. – 248 с.
3. H a r t e n A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. – 1982. – 72 p.
4. R o h d e A. A. Computational study of flow around a rotating disc in flight. – PhD thesis, Florida, 2000. – 169 p.
5. Г а л а н и н М. П., Г р и щ е н к о Е. В., С а в е н к о в Е. Б., Т о к а р е в а С. А. Применение RKDG метода для численного решения задач газовой динамики. – Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. № 52. – М., 2006. – 24 с.

Статья поступила в редакцию 20.01.11

Юрий Иванович Дмитриенко родился в 1962 г., окончил в 1984 г. МГУ им. М.В. Ломоносова. Д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой “Вычислительная математика и математическая физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана, действительный член Академии инженерных наук. Автор более 160 научных работ в области вычислительной механики, нелинейного тензорного анализа, термомеханики композитов, математического моделирования в материаловедении.

Yu.I. Dimitrienko (b.1962) graduated from the Lomonosov Moscow State University in 1984. D. Sc. (Phys.-Math.), professor, head of “Computational Mathematics and Mathematical Physics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Full member of the Russian Academy of Engineering Sciences. Author of more than 160 publications in the field of computational mechanics, nonlinear tensor analysis, thermomechanics of composite materials, mathematical simulation in science of materials.

Михаил Николаевич Коряков родился в 1987 г., в 2010 г. окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана. Аспирант кафедры “Вычислительная математика и математическая физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор ряда работ в области вычислительной газодинамики.

M.N. Koryakov (b. 1987) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 2010. Post-graduate of "Computational Mathematics and Mathematical Physics" department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of several publications in the field of computational gas dynamics.

Андрей Алексеевич Захаров родился в 1983 г., в 2005 г. окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана. Канд. техн. наук, доцент кафедры “Вычислительная математика и математическая физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 20 научных работ в области вычислительной газодинамики.

A.A. Zakharov (b. 1983) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 2005. Ph. D. (Phys.-Math.), assoc. professor of "Computational Mathematics and Mathematical Physics" department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 20 publications in the field of computational gas dynamics.

Елтуган Кимашевич Сыздыков родился в 1956 г., в 1979 г. окончил КГТУ им. А.Н. Туполева. Канд. техн. наук, заместитель генерального директора ОАО ГосМКБ “Радуга” им. А.Я. Березняка. Автор более 50 научных работ в области механики аэрокосмических конструкций.

Ye.K. Syzdykov (b. 1956) graduated from the Kazan State Technical University n.a. A.N. Tupolev in 1979. Ph. D. (Eng.), deputy general director of JSC GosMKB “Raduga”. Author of more than 50 publications in the field of mechanics of aerospace structures.