

УДК 532.59: 534.1

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СВЯЗАННЫХ КОЛЕБАНИЙ СОСУДА С ЖИДКОСТЬЮ

В.А. Калиниченко^{1,2}, А.Н. Со¹

¹МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

²Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Российская Федерация
e-mail: kalin@ipmnet.ru

Впервые экспериментально исследованы горизонтальные колебания прямоугольного сосуда с жидкостью, вызванные первой модой стоячих поверхностных гравитационных волн Фарадея. Проведено сравнение экспериментальных данных по связанным горизонтальным колебаниям в неподвижном в горизонтальном направлении сосуде в случае параметрического возбуждения волн Фарадея. Полученные экспериментальные данные сопоставлены с результатами имеющихся теоретических моделей.

Ключевые слова: волны Фарадея, связанные колебания, параметрический резонанс, резонансная зависимость, частотный сдвиг.

AN EXPERIMENTAL STUDY OF COUPLED VIBRATIONS OF THE TANK WITH LIQUID

V.A. Kalinichenko^{1,2}, A.N. Soe¹

¹Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

²Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation
e-mail: kalin@ipmnet.ru

Novel experiments on horizontal vibrations caused by the first mode of standing surface gravity Faraday waves inside rectangular tank with liquid are studied. Comparison of the experimental data is made by using the coupling horizontal vibrations inside the stationary horizontally constrained tank in the case of parametric excitation of Faraday waves. The obtained experimental data are compared with the results of existing theoretical models.

Keywords: Faraday waves, coupling vibrations, parametric resonance, resonance dependence, frequency shift.

Исследования динамики жидкости в неподвижном или колеблющемся сосуде имеют большое значение для решения как фундаментальных, так и многих прикладных задач [1–4].

В инженерной практике широко используются конструкции, в которых имеются объемы жидкости со свободной поверхностью, например, топливные баки объектов авиационной и ракетно-космической техники, резервуары для транспортировки жидкостей, а также для хранения нефтепродуктов и сжиженных газов, водонапорные башни

и т.д. Жидкость, частично заполняющая полости, значительно влияет на движение всей системы, особенно, когда масса жидкости сравнима с массой системы. Взаимное влияние движений жидкости и твердого тела может существенно изменить форму движения системы.

Одним из примеров сложного динамического взаимодействия в системе тело – жидкость является задача о горизонтальных перемещениях сосуда с жидкостью при возбуждении волн Фарадея [5]. Под волнами Фарадея понимаются стоячие гравитационные волны, возбуждаемые в однородной или двухслойной жидкости в жестком сосуде, который совершает периодическое движение в направлении силы тяжести [6].

В экспериментальной гидродинамике горизонтальные колебания сосуда с жидкостью обычно используются для возбуждения стоячих волн [7, 8]. В этом случае имеем вынужденные волновые движения жидкости, частота которых равна частоте колебаний сосуда, а высота волны может быть рассчитана в рамках линейной модели [9]. Отметим, что при горизонтальных перемещениях сосуда на свободной поверхности жидкости возбуждаются только нечетные волновые моды. Решение нелинейной задачи может потребоваться только при описании волн большой высоты вблизи резонанса.

Теоретически горизонтальные поступательные колебания прямоугольного сосуда с жидкостью исследованы в работах [9, 10], где вычислено суммарное давление стоячих поверхностных волн на стенке сосуда и составлено уравнение его движения.

До настоящего времени отсутствовали экспериментальные результаты о динамике сосуда с жидкостью, на свободной поверхности которой есть волны стационарной амплитуды. Авторам известна лишь работа [11]. В указанной работе приведены данные о связанных колебаниях сосуда с жидкостью, стоячие волны на свободной поверхности которой возбуждались вручную с последующим измерением характеристик задачи на стадии затухающих волновых движений жидкости. Дефицит лабораторных исследований в этом направлении объясняется сложностью постановки самого эксперимента, поскольку необходимо обеспечить возбуждение стоячих волн стационарной амплитуды в сосуде, имеющем горизонтальную степень свободы.

В настоящей работе впервые в условиях лабораторного эксперимента реализовано параметрическое возбуждение стационарных гравитационных поверхностных волн в прямоугольном сосуде при сохранении его горизонтальной степени свободы.

Постановка эксперимента. Для генерации волн Фарадея на свободной поверхности жидкости использован прецизионный вибростенд, описанный в работе [12]. Исследована первая волновая мода

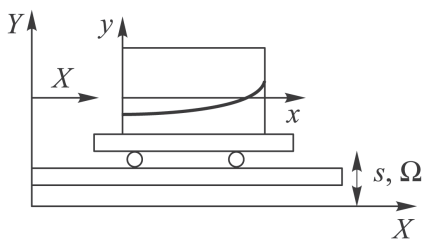


Рис. 1. Схема эксперимента с волнами Фарадея

2,25 см, а угловые отклонения от вертикали не превышали 8.

Отметим, что длина волны первой моды $\lambda = 2L = 100$ см, т.е. реализуемые в эксперименте волновые режимы соответствуют случаю длинных волн или мелкой воды: $h/\lambda \approx 0,05 \dots 0,20$.

Для регистрации колебаний жидкости применена цифровая видеосъемка (15...30 кадр/с) с последующей компьютерной обработкой материалов в программном комплексе ImageJ-1.46г. Точность измерения высоты волновых профилей составила 0,1 см. Среднее значение высоты H в каждом режиме рассчитано по 8–10 последовательным значениям разности высот ее гребня и впадины, измеренным в моменты максимального развития волны.

Для обеспечения исследуемых в экспериментах горизонтальных перемещений сосуда с жидкостью использована рельсовая тележка с пятью подшипниками качения. Прямоугольный сосуд длиной $L = 50$ см, шириной $W = 4$ см и массой $7,6 \cdot 10^3$ г устанавливали на тележку массой $1,3 \cdot 10^3$ г (рис. 1), свободно перемещающуюся по двум горизонтальным стальным рельсам. Плавность хода тележки обеспечивалась подшипниками качения. При указанной массе тележки измеренный динамометрическим методом коэффициент трения качения покоя не превышал 0,02.

Результаты и обсуждение. Рассматривая плоское движение жидкости в вертикально колеблющемся и подвижном в горизонтальном направлении сосуде и используя абсолютную (X, Y) и подвижную (x, y) системы координат, потенциал скоростей частиц жидкости может быть представлен как

$$\Phi = \varphi + \varphi_1 + \varphi_2.$$

Здесь потенциальная функция φ описывает волновое движение жидкости, а функции φ_1 и φ_2 определяют ее твердотельное поступательное движение в вертикальном и горизонтальном направлениях вместе с сосудом, соответственно. Такое представление используется для интерпретации экспериментальных данных.

$n=1$ в прямоугольном сосуде размерами $50 \times 4 \times 50$ см на свободной поверхности воды (глубина $h = 5 \dots 20$ см) в условиях основного резонанса Фарадея, когда частота возбуждаемых волн в 2 раза меньше частоты Ω колебаний сосуда. Амплитуда вертикальных колебаний сосуда оставалась неизменной $s = 1,3$ или

Волны Фарадея. Пусть сосуд колеблется в вертикальном направлении и зафиксирован горизонтально: $\varphi_1 \neq 0$, $\varphi_2 = 0$. Смещение свободной поверхности жидкости может быть задано в виде

$$y(x, t) = 0,5H(t) \cos kx,$$

где $H(t)$ — высота стоячей волны; $k = \pi n/L$ — волновое число; n — номер волновой моды, равный числу узлов стоячей волны; L — длина сосуда; x и y — координаты точек свободной поверхности жидкости в системе координат, жестко связанной с сосудом. Согласно работам [13–15], уравнение, определяющее функцию $H(t)$, имеет вид

$$H''(t) + 2bH'(t) + (\omega^2 - \Omega^2 ks \cos \Omega t)H(t) = 0.$$

Здесь действующая между частицами жидкости сила трения пропорциональна их скорости с коэффициентом b ; $\omega = \sqrt{gk \operatorname{th} kh}$ — линейная частота волны; g — ускорение силы тяжести.

Если ввести безразмерную переменную $\tau = \Omega t/2$ и выполнить преобразование $H(\tau) = e^{-\delta\tau} H_1(\tau)$, то функция $H_1(\tau)$ удовлетворяет уравнению Матье в канонической форме $H_1'' + [p - 2q \cos 2\tau]H_1 = 0$, где $\delta = 2b/\Omega$; $q = 2sk$; $p = (2\omega/\Omega)^2 - \delta^2$.

Предполагается, что в начальный момент времени амплитуда волнового возмущения мала: $H_1(\tau) \ll 1$. Тогда из анализа уравнения Матье следует, что если частота колебаний Ω сосуда принадлежит зоне неустойчивости, описываемой неравенством [16, 17]

$$1 - \sqrt{(2sk)^2 - 4b^2/\omega^2} < 2\omega/\Omega < 1 + \sqrt{(2sk)^2 - 4b^2/\omega^2},$$

то тривиальное решение теряет устойчивость и колебания нарастают по экспоненциальному закону.

С учетом теоретической модели [17], в которой асимптотическое решение нелинейной задачи о поверхностных волнах Фарадея построено в переменных Лагранжа методом Крылова–Боголюбова, резонансные зависимости высоты стационарной волны от частоты параметрического воздействия определяются по соотношению

$$k^2\omega\beta H_{\pm}^2 = 4 \left[\omega - \Omega/2 \pm \sqrt{(s\omega^2\Omega/2g)^2 - b^2} \right], \quad (1)$$

где $\beta = \operatorname{th}^{-4} kh(2 \operatorname{th}^6 kh + 3 \operatorname{th}^4 kh + 12 \operatorname{th}^2 kh - 9)/64$; H_+ и H_- — величины, соответствующие реализуемой в эксперименте устойчивой и неустойчивой ветвям резонансной зависимости.

Экспериментальные (кривые 1, 3) и расчетная (кривая 5) резонансные зависимости для первой волновой моды в неподвижном сосуде ($X = 0$ или $\varphi_2 = 0$) приведены на рис. 2. При глубине жидкости $h = 10$ см зависимости $H(\Omega)$ соответствуют случаю жесткой восстанавливающей силы ($\beta = -0,801$): высота волны возрастает с

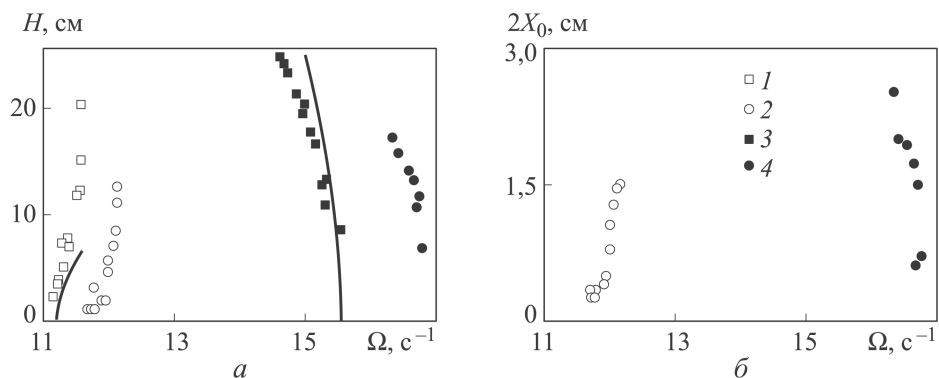


Рис. 2. Резонансная зависимость $H(\Omega)$ первой волновой моды (а) и зависимость размаха $2X_0$ колебаний тележки от частоты Ω (б) для неподвижного в горизонтальном направлении сосуда, $h = 10, 20$ см (1, 3), сосуда на тележке, $h = 10, 20$ см (2, 4), устойчивая ветвь (5), рассчитанная по (1), модель [17]

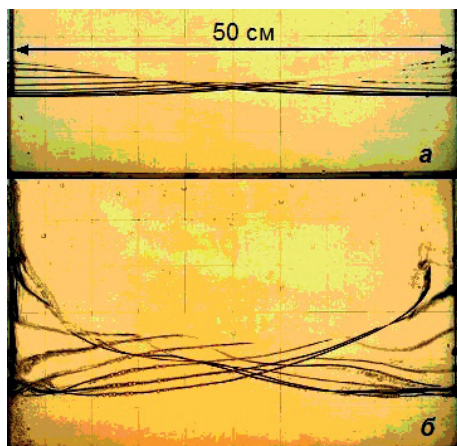
увеличением частоты колебаний сосуда (кривая 1). При $h = 20$ см величина $\beta = 0,060$ положительна, наклон резонансной зависимости изменяется (кривая 3) и реализуется параметрическое возбуждение с мягкой восстанавливающей силой. Отметим, что в двух случаях модель неплохо описывает экспериментальные данные до крутизны волны $H/\lambda \approx 0,15$, причем отсутствует смещение измеренных и рассчитанных зависимостей по частоте. Некоторое различие измеренных и рассчитанных значений высоты H связано с нелинейностью наблюдаемых в эксперименте волн, для которых узла стоячей волны как неподвижной точки свободной поверхности не существует. Профили, приведенные на рис. 3, соответствуют двум режимам стационарных колебаний свободной поверхности жидкости, построенным при наложении 8 и 9 видеок кадров (отвечают полупериоду волны) при частоте вертикальных колебаний сосуда $\Omega = 11,26$ и $11,53 \text{ c}^{-1}$. Если в первом случае (рис. 3, а) волна имеет крутизну $H/\lambda \approx 0,04$ и близка к линейной, то при $H/\lambda \approx 0,22$ (рис. 3, б) в значительной степени проявляются нелинейные эффекты: интенсивные колебания узла стоячей волны, асимметрия профиля и отрывы небольших фрагментов жидкости.

Волны Фарадея в подвижном сосуде. Рассмотрим случай подвижного в горизонтальном направлении сосуда с жидкостью: $\varphi_1 \neq 0$, $\varphi_2 \neq 0$.

Оценим воздействие колеблющейся жидкости на сосуд. При отсутствии волн гидростатическое давление на торцевые стенки сосуда дает горизонтальную нулевую силу. При наличии на поверхности воды свободных стоячих двумерных волн амплитуда силы, действующей в горизонтальном направлении, оценивается в первом приближении по интегралу Коши – Лагранжа как $Q_X = HL^2W\rho\omega^2/\pi^2$. Например,

Рис. 3. Форма свободной поверхности ($h = 10$ см, $s = 1,3$ см) при возбуждении первой моды волн Фарадея в неподвижном сосуде в течение полупериода волны:

а – $\Omega = 11,26 \text{ с}^{-1}$, $H = 3,7$ см (шаг по времени $T/16$); *б* – $\Omega = 11,53 \text{ с}^{-1}$, $H = 22,2$ см (шаг по времени $T/18$)



для первой волновой моды $n = 1$ высотой $H = 10$ см и частотой $\omega = 5,04 \text{ с}^{-1}$ на свободной поверхности воды глубиной $h = 7$ см максимальное значение силы составляет $Q_X = 2,6 \cdot 10^5$ дин. Именно эта сила приводит к колебаниям сосуда в горизонтальном направлении.

Если поместить сосуд с водой на тележку и возбудить первую моду волн Фарадея, то под воздействием сил реакции со стороны колеблющейся жидкости на торцевые стенки сосуда вся система совершает периодические перемещения в горизонтальном направлении. Соответствующие резонансные зависимости (кривые 2, 4) для первой волновой моды, возбуждаемой в сосуде на тележке при параметрическом резонансе, приведены на рис. 2. Аналогично неподвижному сосуду при глубине жидкости $h = 10$ см имеем случай жесткой восстанавливающей силы (кривая 2, см. рис. 2), а при $h = 20$ см наклон резонансной зависимости изменяется (кривая 4, см. рис. 2).

Сравнение частотного диапазона наблюдаемых в неподвижном и подвижном сосудах нелинейных волн Фарадея показывает сдвиг резонансных зависимостей в высокочастотную область (см. рис. 2). При $h = 10$ см это смещение оценивается как $\Delta\Omega \approx 0,69 \text{ с}^{-1}$, тогда как для глубины 20 см частотный сдвиг увеличивается в 2 раза: $\Delta\Omega \approx 1,41 \text{ с}^{-1}$.

Характеризующая связанные колебания зависимость размаха $2X_0$ горизонтальных перемещений тележки от частоты Ω вертикальных колебаний сосуда H приведена на рис. 2, б. Увеличение размаха с возрастанием ($h = 10$ см) или уменьшением ($h = 20$ см) частоты определяется соответствующим наклоном резонансных зависимостей (см. рис. 2, а), причем значение $2X_0$ больше при глубокой жидкости для одинаковой высоты.

Детальный анализ характера горизонтальных колебаний сосуда при параметрическом возбуждении волн и частотного сдвига резонансных зависимостей проведен в серии экспериментов при амплитуде вертикальных колебаний сосуда $s = 2,25$ см и глубине жидкости $h = 5; 7; 8,5; 10; 12$ см.

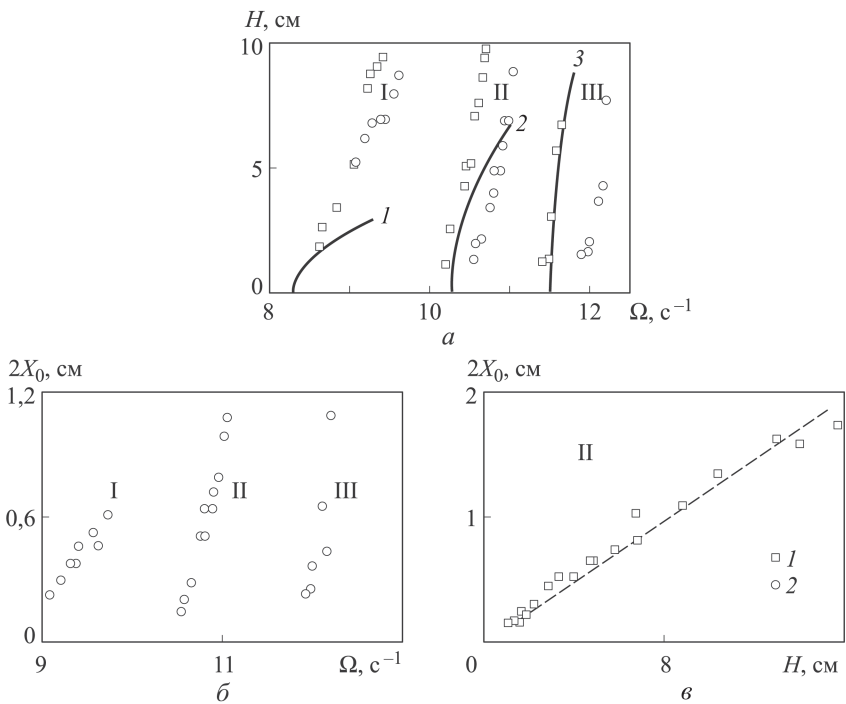


Рис. 4. Резонансные зависимости $H(\Omega)$ первой волновой моды (а), зависимости размаха $2X_0$ колебаний тележки от частоты Ω (б) и высоты волны H (в) при $s = 2,25$ см:

I–III – $h = 5, 8,5$ и 12 см; 1, 2 – неподвижный и подвижный в горизонтальном направлении сосуд; 3 – устойчивая ветвь $H(\Omega)$, рассчитанная по (1), модель [17] (интерполирующая функция $2X_0 = 0,12H$)

Зависимости $H(\Omega)$ для трех значений глубины жидкости показаны на рис. 4, а. Если при $h = 5$ см (I) дополнительная степень свободы сосуда в горизонтальном направлении практически не влияет на резонансную зависимость, то в случае больших глубин (II и III) наблюдается существенный сдвиг зависимости $H(\Omega)$ в высокочастотную область.

Данные о зависимости размаха $2X_0$ колебаний тележки от частоты Ω (рис. 4, б) также свидетельствуют об усилении осцилляций сосуда с увеличением глубины жидкости.

Можно дать следующую интерпретацию полученным результатам эксперимента. С возрастанием глубины жидкости увеличивается амплитуда силы, действующей в горизонтальном направлении на торцевые стенки сосуда со стороны колеблющейся жидкости. Силовое воздействие со стороны жидкости также усиливается с увеличением высоты волны, причем размах колебаний сосуда является линейной функцией H (рис. 4, в). Дополнительная горизонтальная степень свободы сосуда с колеблющейся жидкостью приводит к увеличению собственной частоты ω^* рассматриваемой механической системы. Таким

образом, при анализе связанных колебаний системы сосуд – жидкость вместо линейной волновой частоты $\omega = \sqrt{gk \operatorname{th} kh}$ следует использовать частоту ω^* , зависящую от глубины или массы жидкости.

Оценка частотного сдвига. Проведем анализ экспериментальных данных, используя результаты Л.Н. Сретенского о плоских горизонтальных колебаниях прямоугольного сосуда с идеальной жидкостью при наличии на поверхности свободной стоячей волны [10]. Указанная задача соответствует случаю $\varphi_1 = 0, \varphi_2 \neq 0$.

Движение сосуда с жидкостью на тележке (см. рис. 1) описывается уравнением $m\ddot{X} = Q_x$, где $m = m_1 + m_2$; $m_1 = \rho LWh$ и ρ – масса и плотность жидкости; m_2 – масса сосуда на тележке.

Полагая, что горизонтальные колебания системы происходят с частотой ω^* и амплитудой X_0 , а сила Q_X в линейном приближении определяется как

$$Q_X = \left(\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \rho \frac{16L^2W X_0 \omega^{*4} (-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^3 \pi^3 (gk_n \operatorname{th} k_n h - \omega^{*2})} \operatorname{th} k_n h + 2LWh X_0 \omega^{*2} \right) \cos \omega^* t,$$

получаем следующее уравнение для частоты ω^* :

$$-\frac{M+1}{M\omega^{*2}} = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{8L}{n^3 \pi^3 h (gk_n - \omega^{*2} \operatorname{ch} k_n h)}, \quad (2)$$

где $M = m_1/m$.

Представив левую и правую части (2) функциями $F_1(\omega^{*2})$ и $F_2(\omega^{*2})$, найдем графически решение этого уравнения. Для первой волновой моды при глубине жидкости 20 см частота связанных колебаний определяется пересечением кривых 1 и 2, приведенных на рис. 5, а. Частота ω^{*2} смещена вправо относительно собственной частоты первой волно-

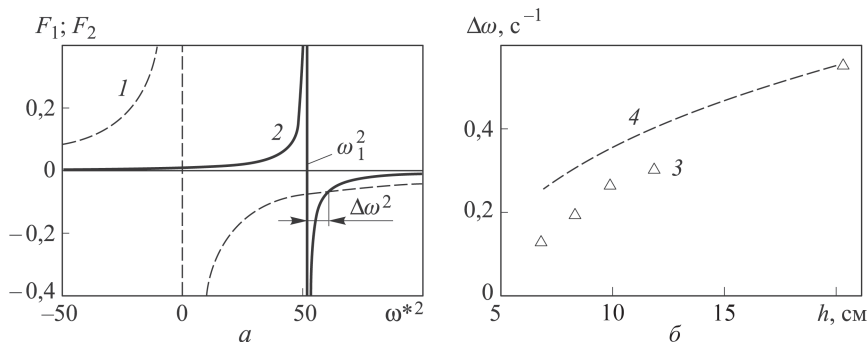


Рис. 5. Графическое решение уравнения (2) и оценка частотного сдвига $\Delta\omega$ по точке пересечения кривых функций F_1 (1) и F_2 (2) для первой моды стоячих волн на свободной поверхности жидкости глубиной $h = 20$ см (а), экспериментальная (3) и расчетная (4) зависимости частотного сдвига от глубины жидкости (б)

вой моды $\omega_1^2 = gk_1 \operatorname{th} k_1 h$. Оценки показывают, что если собственная частота первой волновой моды составляет $\omega_1 = 7,24 \text{ с}^{-1}$, то частота связанных колебаний равна $\omega^* = 7,76 \text{ с}^{-1}$, т.е. имеем частотный сдвиг $\Delta\omega = 0,53 \text{ с}^{-1}$.

Этот метод оценки частотного сдвига можно использовать для интерпретации экспериментальных данных по связанным колебаниям сосуда на тележке при возбуждении первой моды волн Фарадея.

Частотный сдвиг $\Delta\Omega$ резонансных зависимостей (см. рис. 2, а и рис. 4, а) связан со смещением собственной частоты следующим образом: $\Delta\omega = \Delta\Omega/2$. Тогда величина $\Delta\omega$ может быть оценена из эксперимента и решения (2). Для всех исследованных в условиях эксперимента глубин жидкости h экспериментальные и рассчитанные значения сдвига $\Delta\omega$ приведены ниже:

h , см.....	7	8,5	10	12	20
$\Delta\omega$, с^{-1} :					
экспериментальные данные	0,14	0,20	0,27	0,31	0,56
расчетные данные, полученные по (2).....	0,24	0,31	0,36	0,42	0,53

Соответствующая зависимость частотного сдвига $\Delta\omega$ от глубины жидкости h приведена на рис. 5, б. Несмотря на неплохое соответствие экспериментальных (кривая 3) и расчетных данных (кривая 4), модель дает несколько завышенные значения $\Delta\omega$ [10]. Возможная причина — диссипативные эффекты в механических узлах системы (трения на осях подшипников, трение качение и т.п.).

Заключение. Экспериментально реализовано параметрическое возбуждение гравитационных поверхностных волн в прямоугольном сосуде при сохранении его горизонтальной степени свободы. Исследованы горизонтальные колебания прямоугольного сосуда с жидкостью, вызванные первой модой стоячих поверхностных гравитационных волн Фарадея. Проведено сравнение экспериментальных данных по связанным горизонтальным колебаниям сосуда, находящегося в неподвижном состоянии в горизонтальном направлении, при параметрическом возбуждении волн Фарадея в нем.

Проведено сравнение экспериментальных данных с теоретической моделью связанных горизонтальных колебаний сосуда с жидкостью, на поверхности которой присутствуют свободные волны. Исследован частотный сдвиг при совместном волновом движении жидкости и горизонтальных колебаниях сосуда; полученные результаты сравниваются с экспериментальными данными.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (№ 14-01-00282) и Министерства образования и науки РФ (грант Президента РФ по поддержке научных исследований ведущих научных школ РФ, код НШ-4058.2014.8).

1. *Микишев Г.Н., Рабинович Б.И.* Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость. М.: Машиностроение, 1971. 563 с.
2. *Ibrahim R.A.* Liquid sloshing dynamics: theory and applications. Cambridge Univ. Press, 2005. 948 p.
3. *Колесников К.С.* Динамика ракет. М.: Машиностроение, 2003. 520 с.
4. *Домашенко А.М., Темнов А.Н.* Тепловые эффекты колебаний криогенных жидкостей // Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана. Сер. Машиностроение. 2012. Спец. вып. "Актуальные проблемы развития ракетно-космической техники и систем вооружения". С. 201–214.
5. *Акуленко Л.Д., Нестеров С.В.* Параметрическое возбуждение колебаний тела с полостью, заполненной стратифицированной жидкостью // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 53–60.
6. *Калиниченко В.А.* О разрушении волн Фарадея и формировании струйного всплеска // Изв. РАН. МЖГ. 2009. № 4. С. 112–122.
7. *Chester W., Bones J.A.* Resonant oscillations of water waves. II. Experiment // Proc. R. Soc. Lond. A. 1968. Vol. 306. P. 23–39.
8. *Experimental investigation and numerical modelling of steep forced water waves / H. Bredmose, M. Brocchini, D.H. Peregrine, L. Thais // J. Fluid Mech.* 2003. Vol. 490. P. 217–249.
9. *Сретенский Л.Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 815 с.
10. *Сретенский Л.Н.* Колебание жидкости в подвижном сосуде // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. 1951. № 10. С. 1483–1494.
11. *Herczyński A., Weidman P.D.* Experiments on the periodic oscillation of free containers driven by liquid sloshing // J. Fluid Mech. 2012. Vol. 693. P. 216–242.
12. *Экспериментальное исследование поверхностных волн, возбуждаемых при резонансе Фарадея / В.А. Калиниченко, С.В. Нестеров, С.Я. Секерж-Зенькович, А.А. Чайковский // Изв. РАН. МЖГ.* 1995. № 1. С. 122–129.
13. *Болотин В.В.* О движении жидкости в колеблющемся сосуде // ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 2. С. 293–294.
14. *Benjamin T.B., Ursell F.* The stability of the plane free surface of a liquid in vertical motion // Proc. Roy. Soc. 1954. Vol. A225. No. 1165. P. 505–515.
15. *Miles J.W., Henderson D.* Parametrically forced surface wave // Ann. Rev. Fluid Dyn. Annu. Revs Inc. 1990. Vol. 22. P. 143–165.
16. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.
17. *Нестеров С.В.* Параметрическое возбуждение волн на поверхности тяжелой жидкости // Морские гидрофиз. исследования. 1969. № 3(45). С. 87–97.

REFERENCES

- [1] Mikishev G.N., Rabinovich B.I. Dinamika tonkostennykh konstruktsiy s otknikami, sodержashchimi zhidkost' [Dynamics of thin-walled structures with compartments containing a liquid]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1971. 563 p.
- [2] Ibrahim R.A. Liquid sloshing dynamics: theory and applications. Cambridge Univ. Press, 2005. 970 p.
- [3] Kolesnikov K.S. Dinamika raket [Rocket dynamics]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 2003. 520 p.
- [4] Domashenko A.M., Temnov A.N. Thermal effects of vibrations of cryogenic liquids. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Bauman, Mashinostr., Spetsvyp.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Mech. Eng., Spec.], 2008, iss. 1, pp. 201–214 (in Russ.).

- [5] Akulenko L.D., Nesterov S.V. Parametric excitation of body vibrations with a cavity filled with a stratified fluid. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekh. Zhidk. Gaza* [Fluid Dynamics], 1994, no. 3, pp. 53–60 (in Russ.).
- [6] Kalinichenko V.A. Breaking Faraday waves and jet launch formation. *Izv. Akad. Nauk, Mekh. Zhidk. Gaza* [Fluid Dynamics], 2009, vol. 44, no. 4, pp. 112–122 (in Russ.).
- [7] Chester W., Bones J.A. Resonant oscillations of water waves. II. Experiment. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 1968, vol. 306, pp. 23–39.
- [8] Bredmose H., Brocchini M., Peregrine D.H., Thais L. Experimental investigation and numerical modelling of steep forced water waves. *J. Fluid Mech.*, 2003, vol. 490, pp. 217–249. DOI: 10.1017/S0022112003005238
- [9] Sretenskiy L.N. Teoriya volnovykh dvizheniy zhidkosti [Wave flow theory of the liquid]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 815 p.
- [10] Sretenskiy L.N. Liquid sloshing inside the moving tank. *Izv. Akad. Nauk SSSR. OTN* [Bul. Acad. Sci. USSR. DTS], 1951, no. 10, pp. 1483–1494 (in Russ.).
- [11] Herczyński A., Weidman P.D. Experiments on the periodic oscillation of free containers driven by liquid sloshing. *J. Fluid Mech.*, 2012, vol. 693, pp. 216–242. DOI: 10.1017/jfm.2011.515
- [12] Kalinichenko V.A., Nesterov S.V., Sekerzh-Zen'kovich S.Ya., Chaykovskiy A.A. Experimental study of surface waves excited at Faraday resonance. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekh. Zhidk. Gaza* [Fluid Dynamics], 1995, no. 1, pp. 122–129 (in Russ.).
- [13] Bolotin V.V. On the fluid motion inside the oscillating tank. *Prikl. Mat. i Mekh. (PMM)* [J. Appl. Math. Mech.], 1956, vol. 20, iss. 2, pp. 293–294 (in Russ.).
- [14] Benjamin T.B., Ursell F. The stability of the plane free surface of a liquid in vertical periodic motion. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 1954, vol. 225, no. 1163, pp. 505–515. DOI: 10.1098/rspa.1954.0218
- [15] Miles J.W., Henderson D. Parametrically forced surface wave. *Ann. Rev. Fluid Dyn.*, 1990, vol. 22, pp. 143–165. DOI: 10.1146/annurev.fl.22.010190.001043
- [16] Bogolyubov N.N., Mitropol'skiy Yu.A. Asimptoticheskie metody v teorii nelineynykh kolebaniy Moscow, Nauka Publ., 1974. 504 p. (Eng. ed.: Bogoliubov N.N., Mitropolsky Y.A. Asymptotic Methods in the Theory of Non-Linear Oscillations. 1st ed. New York–London–Paris–Montreux–Tokyo, Gordon & Breach Science Publisher, 1961. 537 p.).
- [17] Nesterov S.V. Wave parametric excitation on the surface of a heavy liquid. *Mor. Hidrofiz. Issl.* [Mar. hydrophys. Res.], 1969, no. 3(45), pp. 87–97 (in Russ.).

Статья поступила в редакцию 18.05.2014

Калиниченко Владимир Анатольевич — д-р. физ.-мат. наук, профессор кафедры “Теоретическая механика им. профессора Н.Е. Жуковского” МГТУ им. Н.Э. Баумана, ведущий научный сотрудник Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН. Автор более 30 статей в области гидродинамики.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Российская Федерация, 119526, Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1.

Kalinichenko V.A. — Dr. Sci. (Phys.-Math.), professor of “Theoretical Mechanics n.a. Professor N.E. Zhukovsky” department of the Bauman Moscow State Technical University, leading researcher at the Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences (IPMech RAS). Author of more than 30 publications in the field of hydrodynamics.

Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Ishlinsky IPMech RAS, pr. Vernadskogo 101 (korp. 1), Moscow, 119526 Russian Federation.

Со Аунг Наинг — аспирант кафедры “Теоретическая механика им. профессора Н.Е. Жуковского” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Специализируется в области гидродинамики.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Soe A.N. — post-graduate of “Theoretical Mechanics n.a. Professor N.E. Zhukovsky” department of the Bauman Moscow State Technical University. Specialist in the field of hydrodynamics.

Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.