

## НЕЛОКАЛЬНАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ИНВАРИАНТЫ

**Н.И. Юрасов**

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация  
e-mail: nikyurasov@yandex.ru

*Рассмотрена связь релятивистских инвариантов и корреляции между заряженными частицами, когда они являются носителями тока. Такая корреляция имеет место при аномальном скин-эффекте и сверхпроводимости. Получена зависимость проводимости от частоты, волнового вектора и параметров функции влияния. В качестве параметров функции влияния, зависящей от разности координат пары мировых точек, рассмотрены характеристические волновые векторы и характеристические частоты. Характеристические частоты и векторы заданы как функции параметров носителей тока: времени и длины свободного пробега; циклотронной частоты и циклотронного радиуса, спиновой циклотронной частоты и спинового циклотронного радиуса. Результат обобщен на случай произвольного числа электронных групп. Показано, что рассмотренные парные корреляции носителей тока соответствуют описанию сверхпроводимости и аномального скин-эффекта.*

**Ключевые слова:** электроны, нелокальное взаимодействие, релятивистский инвариант, пропагатор, интерференция, характеристические параметры, граничные условия.

## NONLOCAL ELECTRODYNAMICS AND RELATIVISTIC INVARIANTS

**N.I. Yurasov**

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation  
e-mail: nikyurasov@yandex.ru

*The article considers communication relativistic invariants and correlations between the charged particles when they are current carriers. Such correlation takes place at abnormal skin effect and superconductivity. Dependence conductivity from frequency, wave vector and parameters of the influence function was obtained. The author have examined the characteristic wave vectors and characteristic frequencies as parameters of the influence function depending on the difference of the world coordinates for pair of points. Characteristic frequencies and vectors are set as function of parameters of current carriers, namely: the time and length of free path, a cyclotron frequency and a cyclotron radius, the spin cyclotron frequency and spin cyclotron radius. The result has generalized on a case of any number of electronic groups. It has been shown that the considered pair correlations of current carriers correspond to the description of superconductivity and abnormal skin effect.*

**Keywords:** electrons, nonlocal interaction, relativistic invariant, propagator, interference, characteristic parameters, boundary conditions.

**Введение.** При разработке теорий типа аномального скин-эффекта имеет место задача учета нелокального взаимодействия, т.е. математического описания того факта, что плотность тока определяется не только значением напряженности электрического поля в этой точке,

но и в соседних точках. Обычно предполагается, что плотность тока в этой точке определяется интегралом вида [1, 2]

$$j_l = \int K |r_i - r'_i| E_l(r'_i) d^3 r', \quad (1)$$

где  $K |r_i - r'_i|$  — функция влияния, зависящая от модуля расстояния выделенной точки пространства и соседних точек пространства;  $E_l(r'_i)$  — напряженность электрического поля в соседней точке пространства;  $l, i = x, y, z$ . В указанных теориях используется электродинамика, которая представляет собой релятивистскую теорию. Однако в формуле (1) зависимость функции влияния от координат и времени не является релятивистским инвариантом.

В теориях аномального скин-эффекта и сверхпроводимости влияние релятивистских инвариантов на электронные корреляции не было исследовано [1–3].

В связи с продолжением развития этих теорий такое исследование необходимо, оно и является целью настоящей работы.

**Выбор аргумента функции влияния.** Аргументом функции влияния должна быть релятивистски инвариантная функция разности координат и времени  $K(r'_i - r_i, t' - t)$ . Аргументом такой функции может быть интервал между событиями или фаза плоской волны [4]. Для этих функций легко сформулировать условие причинности, согласно которому они эквивалентны. В квантовой электродинамике переносчик взаимодействия имеет структуру плоской волны [5]. С учетом его структуры в качестве аргумента функции влияния была выбрана фаза плоской волны, а в качестве функции влияния — функция в виде суперпозиции плоских волн.

**Геометрия задачи.** Задача анализа учета функции влияния сильно упрощается при рассмотрении проводящего полупространства в случае распространения электромагнитной волны вдоль нормали к граничной плоской поверхности (на рисунке показаны волновые элементы функции влияния).

**Релятивистски инвариантная формула для плотности тока.** В случае одного типа нелокального взаимодействия, распространяющегося вдоль оси  $x$ , запишем следующую формулу для плотности

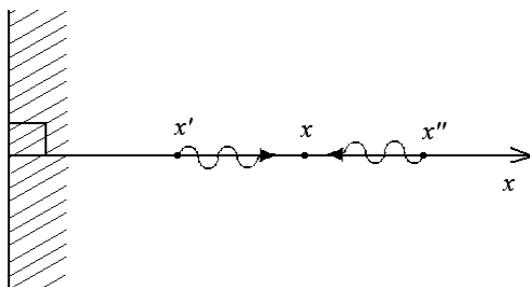


Схема интерференции компонент функции влияния

тока:

$$j_l = \iint K_0(\exp(-i\omega_L(t' - t))F(k_L, x', x)E_{0l}(\exp(-i(\omega t' - kx'))icdt'dx', \quad (2)$$

где  $F(k_L, x', x) = (0, x' < x; \exp(-ik_L(x' - x)), x' > x)$ ;  $K_0$  — постоянная;  $\omega_L, k_L$  — параметры корреляции, имеющие размерности частоты и волнового вектора соответственно;  $E_{0l}, \omega, k$  — амплитуда напряженности электрического поля, круговая частота и волновой вектор плоской электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси  $x$ ;  $icdt'dx'$  — элементарный релятивистски инвариантный объем в двухмерном пространственно-временном континууме;  $c$  — скорость света;  $i = \sqrt{-1}$ . При записи формулы (2) предполагалось, что пространственные переменные ( $x$  и  $x'$ ) находятся в одной области:  $[0, \infty]$ . Область интегрирования по координате в формуле (2) содержит две части  $x' \in [0, x]$  и  $x' \in [x, \infty]$ , а область интегрирования по времени  $t'$  — одну подобласть  $t' \in [-\infty, t]$ .

После интегрирования в формуле (2) получим

$$j_l = K_0 \frac{\tau}{1 - i\omega\tau} \left[ \frac{1}{k_L - k} \right] E_{0l},$$

где  $\tau = i/\omega_L$ .

**Формула для проводимости.** Если представить пока неизвестную постоянную  $K_0$  в форме

$$K_0 = \frac{\omega_{PL}^2}{8\pi} k_L,$$

где  $\omega_{PL}$  — плазменная частота, то искомая формула для проводимости примет вид

$$\sigma(\omega, k) = \frac{\omega_{PL}^2 \tau}{8\pi} \frac{1}{1 - i\omega\tau} \left[ \frac{1}{1 - (k/k_L)} \right]. \quad (3)$$

Более общая формула получается при использовании преобразований

$$\omega_L = \sum_K \alpha_K \omega_{LK}; \quad k_L = \sum_K \beta_K k_{LK}, \quad (4)$$

$\alpha_K, \beta_K \in \{1, i, -1 - i\}$ . Применяя формулы (3) и (4) и учитывая движение электрона в магнитном поле, ориентированном вдоль оси  $x'$ , определяем цилиндрические компоненты тензора проводимости

$$\sigma_{\pm}(\omega, k) = \frac{\omega_{PL}^2 \tau}{4\pi} \frac{1}{1 - i\omega\tau \pm i\omega_C \tau} \left[ \frac{1}{1 - (k/k_{L\pm})} \right], \quad (5)$$

где  $\omega_C$  — циклотронная частота;  $k_{L\pm} = -\frac{i}{\langle l \rangle} \mp \frac{1}{2\pi R_C}$ ;  $\langle l \rangle$  — длина свободного пробега электрона;  $R_C$  — циклотронный радиус. Если

электроны формируют спонтанный магнитный момент, то имеем

$$\omega_C \Rightarrow \omega_C + \omega_S, \quad k_{L\pm} = -\frac{i}{\langle l \rangle} \mp \frac{1}{2\pi R_C} \mp \frac{1}{2\pi R_{CM}}. \quad (6)$$

Здесь  $\omega_S, R_{CM}$  — спиновая циклотронная частота и спиновый циклотронный радиус, которые пропорциональны спонтанному магнитному моменту и намагниченности. Когда существует несколько электронных групп, тогда формулу (6) можно обобщить, так как плотность тока является аддитивной величиной.

**Анализ формулы для проводимости.** В формуле (3) первый множитель — это проводимость на постоянном токе в модели Друде. Второй множитель определяет частотную зависимость в той же модели, а множитель в квадратных скобках — зависимость проводимости от волнового вектора или пространственную дисперсию.

Для анализа полученных результатов рассмотрим проводимость на постоянном токе. В случае сверхпроводника имеем  $k = k_L$  и  $k_L = \xi^{-1}$ , где  $\xi$  — длина когерентности. Плотность тока в сверхпроводнике не равна нулю, а напряженность электрического поля равна нулю.

Аномальному скин-эффекту соответствует сильное неравенство

$$\left| \frac{k}{k_L} \right| \gg 1. \quad (7)$$

Условие (7) описывает предельно аномальный скин-эффект для сферической поверхности Ферми.

**О граничных условиях.** Для получения дисперсионного уравнения формулу (5) необходимо подставить в уравнения Максвелла, записанные для фурье-компонент полевых векторов. Если магнитная проницаемость  $\mu$  не зависит от волнового вектора, то дисперсионное уравнение для волн, поляризованных по кругу, имеет вид

$$c^2 k^2 - 4\pi i \sigma_{\pm}(\omega, k) \mu_{\pm}(\omega) = 0. \quad (8)$$

При подстановке (5) в (8) и выполнении условия необращения в нуль знаменателя в формуле (5), получаем неполное кубическое уравнение относительно волнового вектора:

$$(ck)^2 \left( \left( \frac{k}{k_{L\pm}} \right) - 1 \right) + \frac{i\omega_{PL}^2 \tau}{1 - i\omega\tau \pm i\omega_C\tau} \mu_{\pm}(\omega) = 0. \quad (9)$$

В отличие от стандартного дисперсионного уравнения для нормального скин-эффекта, которое имеет два решения, уравнение (9) имеет три решения. Однако их качественный анализ показывает, что одно решение, как и в случае нормального скин-эффекта, является посторонним, а другое дает экспоненциальный рост тока и фактически также является посторонним. Поэтому двух обычных электродинамических граничных условий для непрерывности тангенциальных составляющих

векторов напряженностей электрического и магнитного полей вполне достаточно. Анализ на основе метода Пиппарда, использовавшего предположение об эффективной проводимости, т.е. условие

$$\sigma_{eff} = \gamma \frac{\sigma_0}{k''l}, \quad (10)$$

где  $\sigma_0$  — проводимость на постоянном токе;  $\gamma$  — безразмерный множитель ( $\gamma \approx 10$ ), который зависит от качества граничной поверхности проводника; параметр  $k'' = \text{Im}(k)$  был использован для оценки параметра  $k_L$  через глубину скин-слоя. В введенных обозначениях глубина скин-слоя, взятая из работы [1], составляет

$$\frac{1}{k''} = \left( \frac{c^2 l}{2\pi\gamma\sigma_0\omega} \right)^{1/3}. \quad (11)$$

Из уравнения (9) в случае предельно аномального скин-эффекта для немагнитного металла ( $\mu = 1$ ) имеем

$$\frac{1}{k''} = \left( \frac{c^2 l}{2\pi\gamma\sigma_0\omega} \frac{4}{lk_L} \right)^{1/3}. \quad (12)$$

Тогда формулы (11) и (12) должны давать один и тот же результат. Следовательно, запишем равенство  $k_L = 4/l$ . Поскольку величина  $k_L$  — это волновое число пропагатора, корреляционная длина волны равна  $\lambda_L = (\pi l)/2$ .

Используем формулу (10) для распространения предположения Пиппарда на случай произвольной аномальности скин-эффекта с помощью безразмерного параметра  $\Lambda = \gamma/(k''l)$ , который примем в качестве аргумента функции  $f = 1 - \exp(-\Lambda)$ .

Обобщенная формула для эффективной проводимости на случай произвольной аномальности скин-эффекта имеет вид

$$\sigma_{eff} = \sigma_0 f(\Lambda). \quad (13)$$

Использование формулы (13) совместно с (11) позволяет вычислить скин-глубину при произвольном скин-эффекте.

**Анализ результатов.** Рассмотренный метод построения и использования релятивистски инвариантных функций влияния может быть эффективным для получения таких кинетических коэффициентов, как проводимость и диэлектрическая функция. В результате получена формула для проводимости без решения кинетического уравнения. Поскольку в методе не рассматриваются межзонные переходы, его высокочастотная граница находится в инфракрасной области спектра. С помощью этого метода можно изучать такие эффекты, как подповерхностные волны [6] в области формирования спектрального кроссовера [7–10], если отражение носителей от границы является зеркальным.

Предполагалось, что характеристические параметры явно не зависят от постоянной Планка. Указанное ограничение не является принципиальным и может быть снято в рамках использования формул (4). Это и другие расширения возможностей метода выходят за рамки настоящей работы.

**Выводы.** С использованием суперпозиции релятивистски инвариантных функций влияния получена формула для плотности тока в широком диапазоне частот и волновых векторов. На основе формулы для плотности тока найдена формула для проводимости как зависимости от частоты и волнового вектора. В ходе анализа формулы для проводимости выявлены условия аномального скин-эффекта и сверхпроводимости. Доказана эффективность применения в нелокальной электродинамике релятивистских инвариантов при построении релятивистских функций влияния для исследования корреляции носителей электрического тока.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Лифшиц И.М., Азбель М.Я., Каганов М.И.* Электронная теория металлов. М.: Наука, 1971. 209 с.
2. *Де Жен П.* Сверхпроводимость металлов и сплавов; пер с англ. М.: Мир, 1968. (De Gennes P.G. Superconductivity of metals and alloys. N.Y. – Amsterdam: W.A. Benjamin, Inc., 1966. 274 p.)
3. *Effects of dissipation on nonlocal microwave fields / J.D. Berger, H. Gieben, P. Meystre, T. Nelson, D. Haycock, S. Hamann // Phys. Rev. A. 1995. Vol. 51. No. 3. P. 2482–2490. DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.51.2482>*
4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. Теоретическая физика. Т. II. М.: Физматлит, 2006. 534 с.
5. *Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б.* Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1981. 437 с.
6. *Mamica S., Puzkarski H., Lévy J.C.S.* The Role of Next-Nearest Neighbours for the Existence Conditions of Subsurface Spin Waves in Magnetic Films // *Phys. Stat. Sol. (b)*. 2000. Vol. 218. Iss. 2. P. 561–569. DOI: 10.1002/1521-3951(200004)218:2<561::AID-PSSB561>3.0.CO;2-Q
7. *Юрасов Н.И.* Зеркальный спектральный кроссовер в намагниченном проводнике // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки.* 2004. № 4 (15). С. 124–126.
8. *Юрасов Н.И.* Условия образования динамических сверхструктур на спиновых волнах в намагниченном ферромагнитном проводнике // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки.* 2005. № 4 (19). С. 26–32.
9. *Юрасов Н.И.* Отрицательный показатель преломления в магнитных полупроводниках // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки.* 2011. № 2 (41). С. 121–124.
10. *Юрасов Н.И., Юрасова И.И.* Влияние углеродной пленочной наноструктуры на коэффициент отражения от фотонного кристалла из искусственного опала // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки.* 2012. № 1 (44). С. 31–35.

## REFERENCES

- [1] Lifshits I.M., Azbel' M.Ya., Kaganov M.I. Elektronnaya teoriya metallov [Electron theory of metals]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 209 p.
- [2] De Gennes P.G. Superconductivity of metals and alloys. N.Y.–Amsterdam, W.A. Benjamin, Inc., 1966. 274 p. (Russ. ed.: De Zhen P. Sverkhprovodimost' metallov i splavov. Per s angl. Moscow, Mir Publ., 1968. 280 p.).
- [3] Berger J.D., Gieben H., Meystre P., Nelson T., Haycock D., Hamann S. Effects of dissipation on nonlocal microwave fields. *Phys. Rev. A*, 1995, vol. 51, no. 3, pp. 2482–2490. DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.51.2482>
- [4] Landau L.D., Lifshits E.M. Teoreticheskaya fizika v 10 t. T. 2. Teoriya polya [Theoretical physics. In 10 volumes. Vol. 2. The theory of field]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006. 534 p. (Eng. ed.: Landau L.D., Lifshitz E.M. Course of theoretical physics. Vol. 2. The Classical Theory of Fields. 4th ed. Butterworth-Heinemann.1975.).
- [5] Akhiezer A.I., Berestetskiy V.B. Kvantovaya elektrodinamika [Quantum electrodynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 437 p.
- [6] Mamica S., Puzkarski H., Lévy J.C.S. The role of next-nearest neighbours for the existence conditions of subsurface spin waves in magnetic films. *Phys. Stat. Sol. (b)*, 2000, vol. 218, iss. 2, pp. 561–569. DOI: 10.1002/1521-3951(200004)218:2<561::AID-PSSB561>3.0.CO;2-Q
- [7] Yurasov N.I. Mirror spectral crossover in magnetized conductor. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2004, no. 4 (15), pp. 124–126 (in Russ.).
- [8] Yurasov N.I. The conditions for the formation of dynamic superstructures on spin waves in a magnetized ferromagnetic conductor. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2005, no. 4 (19), pp. 26–32 (in Russ.).
- [9] Yurasov N.I. Negative refractive index in magnetic semiconductors. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2011, no. 2 (41), pp. 121–124 (in Russ.).
- [10] Yurasov N.I., Yurasova I.I. Influence of the carbon film nanostructures on the reflection coefficient of the photonic crystal made of artificial opal. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2012, no. 1 (44), pp. 30–35 (in Russ.).

Статья поступила в редакцию 27.05.2014

Юрасов Николай Ильич — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры “Физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 70 научных работ в области физики конденсированного состояния (магнитных и кинетических явлений, интерференционных эффектов, квантовой гравитации и устойчивости тяжелых ядер).

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Yurasov N.I. — Cand. Sci. (Phys.-Math.), assoc. professor of “Physics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 70 publications in the field of condensed physics (magnetic and kinetic phenomena, interference effects, quantum gravity and the stability of heavy nuclei).

Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.