

О МЕТРИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ ПРОСТРАНСТВА – ВРЕМЕНИ

М.Ю. Константинов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: konst@bmstu.ru

С использованием соотношения, связывающего псевдориманову метрику лоренцевой сигнатуры и произвольное времениподобное векторное поле с некоторой евклидовой метрикой, проанализирована гипотеза Хокинга о евклидовой природе пространства – времени. В рамках этой гипотезы указанное соотношение может быть рассмотрено как нарушение локальной симметрии евклидова пространства и естественным образом может привести к полиметрическим моделям пространства – времени. Следствие таких моделей – появление экзотической темной материи и возможное существование частиц (и полей), которые могут перемещаться со сверхсветовыми скоростями.

Ключевые слова: псевдориманова метрика, гипотеза Хокинга, структура пространство – время, темная материя.

ON THE METRIC STRUCTURE OF SPACE–TIME

M.Yu. Konstantinov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: konst@bmstu.ru

The Hawking's hypothesis about Euclidean nature of space-time is analyzed using correspondence pseudo-Riemannian metric of Lorentz signature and arbitrary timelike vector field with a Euclidean metric. It has been shown that in the framework of the Hawking's hypothesis this correspondence can be considered as a local symmetry breaking of Euclidean space and leads naturally to polymetric models of space–time. The appearance of exotic dark matter and the possible existence of particles (and fields) which can propagates with superlight velocities are the consequence of such models.

Keywords: pseudo-Riemannian metric, Hawking hypothesis, structure space–time, dark matter.

В общей теории относительности гравитационное поле описывается псевдоримановой метрикой $g_{\alpha\beta}$ лоренцевой сигнатуры $(+, -, -, -)$ на четырехмерном гладком многообразии M^4 , являющейся решением уравнений Эйнштейна [1, 2]. Известно, что на любом гладком многообразии можно ввести положительно определенную метрику $G_{\alpha\beta}$ ¹, которая определяет на гладком многообразии M^4 структуру риманова пространства [3, 4]. Возникает вопрос: какая из этих структур — псевдориманова (лоренцева) или риманова — является более фундаментальной, поскольку любой положительно определенной метрике $G_{\alpha\beta}$ с сигнатурой $(+, +, +, +)$ на многообразии M^4 можно сопоставить, по крайней мере, локально, лоренцеву метрику $g_{\alpha\beta}$ с сигнатурой $(+, -, -, -)$, и наоборот.

¹Здесь и далее малые греческие индексы принимают значения от 0 до 4.

Переход от положительно определенной метрики $G_{\alpha\beta}$ к лоренцевой метрике $g_{\alpha\beta}$ может быть осуществлен двумя способами.

Первый способ, называемый поворотом Вика и используемый в квантовой гравитации и квантовой теории поля, заключается в замене $t \rightarrow it$ ($x^0 \rightarrow ix^0$). После такой замены метрика $g_{\alpha\beta} = -G_{\alpha\beta}|_{x^0 \rightarrow ix^0}$ будет иметь лоренцеву сигнатуру $(+, -, -, -)$. Это дало основание С. Хокингу в 1978 г. предположить, что “Можно даже принять точку зрения, согласно которой квантовая теория (а в действительности вся физика) реально определена в евклидовой области и лишь особенности нашего восприятия приводят нас к ее интерпретации в лоренцевом режиме” [5].

Второй способ, использовавшийся при обсуждении ограничений на глобальную топологическую структуру пространства – времени, при исследовании отображений псевдоримановых пространств на римановы [6], а также классических моделей топологических переходов, состоит в представлении лоренцевой метрики $g_{\alpha\beta}$ в виде

$$g_{\alpha\beta} = 2u_\alpha u_\beta - G_{\alpha\beta},$$

где $G_{\alpha\beta}$ – некоторая положительно определенная метрика; u_α – единичное векторное поле ($g^{\alpha\beta}u_\alpha u_\beta = G^{\alpha\beta}u_\alpha u_\beta = 1$). Отметим, что с геометрической точки зрения на римановом многообразии $(M^4, G_{\alpha\beta})$ векторное поле u_α ничем не выделено по сравнению с другими единичными векторными полями. Это позволило автору настоящей статьи в 1985 г. высказать предположение [7] о возможности сосуществования на одном и том же многообразии нескольких лоренцевых структур $(M^4, g_{\alpha\beta}^{(i)})$, порождаемых одной и той же положительной метрикой $G_{\alpha\beta}$ и разными векторными полями $w_\alpha^i, i = 1, 2, \dots, n$.

Аналогичное предположение о возможности сосуществования на одном и том же многообразии нескольких причинных, хотя и необязательно лоренцевых, структур было сделано недавно Р. Героком [8].

Пусть $G_{\alpha\beta}$ – некоторая положительно определенная метрика на многообразии M^4 , u_α – некоторое единичное векторное поле ($G^{\alpha\beta}u_\alpha u_\beta = 1$) и $g_{\alpha\beta}$ – псевдориманова метрика лоренцевой сигнатуры $(+, -, -, -)$ на этом же многообразии, связанная с метрикой $G_{\alpha\beta}$ и векторным полем u_α записанным выше соотношением. Легко убедиться, что $G = \det \|G_{\alpha\beta}\| = -g = \det \|g_{\alpha\beta}\|$ [6], а поле u_α является единичным в двух метриках [6, 7].

Рассмотрим на многообразии M^4 наряду с полем u_α систему векторных полей $w_\alpha^i, i = 1, 2, \dots, n$. С помощью аналогичных записанному выше соотношению получим систему псевдоримановых метрик $g_{\alpha\beta}^{(i)}$ лоренцевой сигнатуры $(+, -, -, -)$:

$$g_{\alpha\beta}^{(i)} = (c_i^2 + 1) w_\alpha^i w_\beta^i - G_{\alpha\beta},$$

где величины $c_i > 0$ имеют смысл максимальной скорости распространения сигнала в пространстве – времени с метрикой $g_{\alpha\beta}^{(i)}$ и должны удовлетворять следующим условиям, исключающим совпадение метрик $g_{\alpha\beta}$, $g_{\alpha\beta}^{(i)}$ и $g_{\alpha\beta}^{(j)}$: $c_{(i)} \neq 1$, если $w_\alpha^i = u_\alpha$ и $c_{(i)} \neq c_{(j)}$, если $w_\alpha^i = w_\alpha^j$.

Для контравариантных компонент метрики $g_{\alpha\beta}^{(i)}$ получим

$$g_{(i)}^{\alpha\beta} = \frac{c_i^2 + 1}{c_i^2} w_\alpha^i w_\beta^i - G^{\alpha\beta},$$

где $w_\alpha^i = G^{\alpha\beta} w_\beta^i$. Исключая тензор $G_{\alpha\beta}$, находим связь между ковариантными и контравариантными компонентами метрик $g_{\alpha\beta}$ и $g_{\alpha\beta}^{(i)}$:

$$g_{\alpha\beta}^{(i)} = g_{\alpha\beta} - 2u_\alpha u_\beta + (c_i^2 + 1) w_\alpha^i w_\beta^i; \quad g_{(i)}^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} - 2u^\alpha u^\beta + \frac{1 + c_i^2}{c_i^2} k_{(i)}^{\alpha\beta}.$$

Здесь

$$k_i^{\alpha\beta} = 4u^\alpha u^\beta (u^\rho w_\rho^i)^2 - 2 \left(u^\alpha w_{(i)g}^\beta + w_{(i)g}^\alpha u^\beta \right) (u^\rho w_\rho) + w_{(i)g}^\alpha w_{(i)g}^\beta,$$

где $w_{(i)g}^\alpha = g^{\alpha\beta} w_\beta^i$.

В случае пустого пространства метрики $g_{\alpha\beta}$ и $g_{\alpha\beta}^{(i)}$ должны определяться интегралами действия

$$S_g = \int R_g \sqrt{-g} d^4x; \quad S_i = \int R_i \sqrt{-g^{(i)}} d^4x,$$

где R_g и R_i — тензоры Риччи метрик $g_{\alpha\beta}$ и $g_{\alpha\beta}^{(i)}$; g и $g^{(i)}$ — определители этих метрик, причем $g = g^{(i)}/c_{(i)}^2 = -G$ [6]. Последнее равенство позволяет объединить интегралы действия для метрик $g_{\alpha\beta}$ и $g_{\alpha\beta}^{(i)}$ в один интеграл

$$S_\Sigma = \int \left\{ R_g + \sum_{i=1}^n \sigma_i R_i \right\} \sqrt{-g} d^4x.$$

Наконец, учитывая связь между метриками $g_{\alpha\beta}$ и $g_{\alpha\beta}^{(i)}$ и используя хорошо известные формулы биметрического формализма, получаем

$$S_\Sigma = \int \left\{ \kappa R_g + \sum_{i=0}^n L_i(u_\alpha, w_\alpha^{(i)}) \right\} \sqrt{-g} d^4x,$$

где κ — некоторая константа; $L_i(u_\alpha, w_\alpha^{(i)})$ — функции, зависящие от полей u_α , w_α^i и их первых производных, $w_\alpha^0 = u_\alpha$.

Если учесть, что у метрик $g_{\alpha\beta}$ и $g_{\alpha\beta}^{(i)}$ могут быть источники, то окончательно получим

$$S_{\Sigma} = \int \left\{ \kappa R_g + \sum_{i=0}^n [L_i(u_{\alpha}, w_{\alpha}^{(i)}) + L_{migi}] \right\} \sqrt{-g} d^4 x,$$

где L_{migi} — лагранжианы полей источников метрик $g_{\alpha\beta}$ и $g_{\alpha\beta}^{(i)}$.

Используя формулы биметрического формализма, последнее равенство может быть переписано с учетом связи метрик $g_{\alpha\beta}$ и $g_{\alpha\beta}^{(i)}$ в виде

$$S_{\Sigma} = \int \left\{ \kappa_i R_{gi} + \sum_{j=0}^n [\tilde{L}_j(w_{\alpha}^{(i)}, w_{\alpha}^{(j)}) + \tilde{L}_{mjgj}] \right\} \sqrt{-g^{(i)}} d^4 x,$$

где $\tilde{L}_j(w_{\alpha}^{(i)}, w_{\alpha}^{(j)})$ и \tilde{L}_{mjgj} получены из функций $L_i(u_{\alpha}, w_{\alpha}^{(i)})$ и L_{migi} заменой метрики $g_{\alpha\beta}$ метрикой $g_{\alpha\beta}^{(i)}$.

Аналогично, выражая лоренцевы метрики $g_{\alpha\beta}$ и $g_{\alpha\beta}^{(i)}$ через евклидову метрику $G_{\alpha\beta}$, определяем

$$S_{\Sigma} = \int \left\{ \kappa_G R_G + \sum_{j=0}^n [\tilde{\tilde{L}}_j(w_{\alpha}^{(i)}, w_{\alpha}^{(j)}) + \tilde{\tilde{L}}_{mjG}] \right\} \sqrt{G} d^4 x.$$

Последнее равенство подтверждает, предположение Хокинга [5] о том, что евклидова (риманова) структура пространства – времени является более фундаментальной, чем лоренцева (псевдориманова) структура. При этом переход от римановой структуры к псевдоримановой может рассматриваться как аналог спонтанного нарушения симметрии. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим функционал действия для римановой метрики $G_{\alpha\beta}$ в пустом пространстве:

$$S = \int \kappa R_G \sqrt{G} d^4 x.$$

Выражая риманову метрику $G_{\alpha\beta}$ через псевдориманову метрику $g_{\alpha\beta}$ и векторное поле u_{α} , получаем

$$S = \int (\kappa R_g + F) \sqrt{-g} d^4 x,$$

где F — некоторое выражение, зависящее от метрики $g_{\alpha\beta}$, векторного поля u_{α} и его ковариантных производных. Таким образом, поле u_{α} может рассматриваться как один из источников метрики $g_{\alpha\beta}$. Когда функционал действия для метрики $G_{\alpha\beta}$ включает источники, тогда функционал действия для метрики $g_{\alpha\beta}$ кроме поля u_{α} будет содержать и другие источники.

Возможное сосуществование нескольких лоренцевых (псевдоримановых) структур может проявляться в виде эффекта “темной материи” и “темной энергии”.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. Теоретическая физика. Т. II. М.: Физматлит, 2006. 534 с.
2. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж.А. Гравитация; пер. с англ. Т. 1–3, М.: Мир, 1977. 525 с.
3. Постников М.М. Введение в теорию Морса. М.: Наука, 1971. 567 с.
4. Бишон Р., Криттенден Р. Геометрия многообразий; пер с англ. М.: Мир, 1967. 335 с.
5. Hawking S. Euclidian Quantum Gravity. In *Recent Developments in Gravitation*; ed. S. Deser, M. Levy. N.Y.: Plenum Press, 1978.
6. Мицкевич Н.В. Отображение псевдоримановых пространств на римановы в общей теории относительности. Кн.: Гравитация и теория относительности. Казань, 1982.
7. Константинов М.Ю. Топологические переходы в классической теории гравитации: скалярно-тензорный формализм. Кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц; под ред. К.П. Станюковича, В.Н. Мельникова. Вып. 16. М.: Энергоатомиздат, 1985. С. 148–157.
8. Geroch R. Faster Than Light? // *General Relativity and Quantum Cosmology*. 13 с. arXiv: 1005.1614v1 [gr-qc].

REFERENCES

- [1] Landau L.D., Lifshits E.M. *Teoreticheskaya fizika v 10 t. T. 2. Teoriya polya* [Theoretical physics. In 10 vols. Vol. 2. The theory of field]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006. 534 p. (Eng. ed.: Landau L.D., Lifshitz E.M. *Course of theoretical physics. Vol. 2. The Classical Theory of Fields*. 4th ed. Butterworth-Heinemann. 1975.).
- [2] Misner C.W., Thorne K.S., Wheeler J.A. *Gravitation*. Vol. 1–3. San Francisco, W.H. Freeman and Company Limited, 1973. 1279 p. (Russ. ed.: Mizner Ch., Torn K., Uiler Dzh. A. *Gravitatsiya*. Per. s angl. Moscow, Mir Publ., 1977. 525 p.).
- [3] Postnikov M.M. *Vvedenie v teoriyu Morsa* [Introduction to Morse theory]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 567 p.
- [4] Bishop R.L., Crittenden R. *Geometry of manifolds*. N.Y., Academic Press, 1964. 265 p. (Russ. ed.: Bishop R., Krittenden R. *Geometriya mnogoobraziy*. Per s angl. Moscow, Mir Publ., 1967. 335 p.
- [5] Hawking S.W. *Euclidian quantum gravity*. In *Cargese 1978 lectures: Recent Developments in Gravitation*. Ed. Deser S., Levy M. N.Y., Plenum Press, 1978.
- [6] Mitskevich N.V. *Otobrazhenie psevdorimanovykh prostranstv na rimanovy v obshchey teorii otноситel'nosti*. Kn.: *Gravitatsiya i teoriya otноситel'nosti*. [The mapping of pseudo-Riemannian spaces on Riemannian in general relativity theory. In book: *Gravitation and the theory of relativity*]. Kazan', Kazanskiy Gosudarstvennyy Uni. Publ., 1982, pp. 115–119.
- [7] Konstantinov M.Yu. *Topologicheskie perekhody v klassicheskoy teorii gravitatsii: skalyarno-tenzornyy formalizm*. Kn.: *Problemy teorii gravitatsii i elementarnykh chastits*; pod. red. K.P. Stanyukovich, V.N. Mel'nikov [Topological changes in the classical theory of gravitation: scalar-tensor formalism. In book: *Problems of the theory of gravitation and elementary particles*. Ed. Stanyukovitch K.P., Melnikov V.N.]. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1985, iss. 16, pp. 148–157.
- [8] Geroch R. *Faster Than Light? General Relativity and Quantum Cosmology*, 2010, pp. 1–13. Available at: <http://arxiv.org/pdf/1005.1614.pdf> (accessed 27.09.2014).

Статья поступила в редакцию 27.05.2014

Константинов Михаил Юрьевич — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры “Физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор ряда научных работ в области физики.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Konstantinov M.Yu. — Cand. Sci. (Phys.-Math.), assoc. professor of “Physics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of a number publications in the field of physics.

Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.