УДК 530.12:531.51

О МЕТРИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ ПРОСТРАНСТВА – ВРЕМЕНИ

М.Ю. Константинов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: konst@bmstu.ru

С использованием соотношения, связывающего псевдориманову метрику лоренцевой сигнатуры и произвольное времениподобное векторное поле с некоторой евклидовой метрикой, проанализирована гипотеза Хокинга о евклидовой природе пространства – времени. В рамках этой гипотезы указанное соотношение может быть рассмотрено как нарушение локальной симметрии евклидова пространства и естественным образом может привести к полиметрическим моделям пространства – времени. Следствие таких моделей — появление экзотической темной материи и возможное существование частиц (и полей), которые могут перемещаться со сверхсветовыми скоростями.

***Ключевые слова*: псевдориманова метрика, гипотеза Хокинга, структура пространство – время, темная материя.

ON THE METRIC STRUCTURE OF SPACE–TIME

M.Yu. Konstantinov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: konst@bmstu.ru

The Hawking's hypothesis about Euclidean nature of space-time is analyzed using correspondence pseudo-Riemannian metric of Lorentz signature and arbitrary timelike vector field with a Euclidean metric. It has been shown that in the framework of the Hawking's hypothesis this correspondence can be considered as a local symmetry breaking of Euclidean space and leads naturally to polymetric models of space – time. The appearance of exotic dark matter and the possible existence of particles (and fields) which can propagates with superlight velocities are the consequence of such models.

***Keywords*:** pseudo-Riemannian metric, Hawking hypothesis, structure space – time, dark matter.

В общей теории относительности гравитационное поле описывается псевдоримановой метрикой $g_{\alpha\beta}$ лоренцевой сигнатуры $(+,-,-,-)$ на четырехмерном гладком многообразии M^4, являющейся решением уравнений Эйнштейна [1, 2]. Известно, что на любом гладком многообразии можно ввести положительно определенную метрику $G_{\alpha\beta}$[1], которая определяет на гладком многообразии M^4 структуру риманова пространства [3, 4]. Возникает вопрос: какая из этих структур — псевдориманова (лоренцева) или риманова — является более фундаментальной, поскольку любой положительно определенной метрике $G_{\alpha\beta}$ с сигнатурой $(+,+,+,+)$ на многообразии M^4 можно сопоставить, по крайней мере, локально, лоренцеву метрику $g_{\alpha\beta}$ с сигнатурой $(+,-,-,-)$, и наоборот.

[1]Здесь и далее малые греческие индексы принимают значения от 0 до 4 .

Переход от положительно определенной метрики $G_{\alpha\beta}$ к лоренцевой метрике $g_{\alpha\beta}$ может быть осуществлен двумя способами.

Первый способ, называемый поворотом Вика и используемый в квантовой гравитации и квантовой теории поля, заключается в замене $t \to it$ ($x^0 \to ix^0$). После такой замены метрика $g_{\alpha\beta} = -G_{\alpha\beta}|_{x^0 \to ix^0}$ будет иметь лоренцеву сигнатуру $(+,-,-,-)$. Это дало основание С. Хокингу в 1978 г. предположить, что "Можно даже принять точку зрения, согласно которой квантовая теория (а в действительности вся физика) реально определена в евклидовой области и лишь особенности нашего восприятия приводят нас к ее интерпретации в лоренцевом режиме" [5].

Второй способ, использовавшийся при обсуждении ограничений на глобальную топологическую структуру пространства – времени, при исследовании отображений псевдоримановых пространств на римановы [6], а также классических моделей топологических переходов, состоит в представлении лоренцевой метрики $g_{\alpha\beta}$ в виде

$$g_{\alpha\beta} = 2u_\alpha u_\beta - G_{\alpha\beta},$$

где $G_{\alpha\beta}$ — некоторая положительно определенная метрика; u_α — единичное векторное поле ($g^{\alpha\beta}u_\alpha u_\beta = G^{\alpha\beta}u_\alpha u_\beta = 1$). Отметим, что с геометрической точки зрения на римановом многообразии $(M^4, G_{\alpha\beta})$ векторное поле u_α ничем не выделено по сравнению с другими единичными векторными полями. Это позволило автору настоящей статьи в 1985 г. высказать предположение [7] о возможности сосуществования на одном и том же многообразии нескольких лоренцевых структур $\left(M^4, g^{(i)}_{\alpha\beta}\right)$, порождаемых одной и той же положительной метрикой $G_{\alpha\beta}$ и разными векторными полями w^i_α, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Аналогичное предположение о возможности сосуществования на одном и том же многообразии нескольких причинных, хотя и необязательно лоренцевых, структур было сделано недавно Р. Героком [8].

Пусть $G_{\alpha\beta}$ — некоторая положительно определенная метрика на многообразии M^4, u_α — некоторое единичное векторное поле ($G^{\alpha\beta}u_\alpha u_\beta = 1$) и $g_{\alpha\beta}$ — псевдориманова метрика лоренцевой сигнатуры $(+,-,-,-)$ на этом же многообразии, связанная с метрикой $G_{\alpha\beta}$ и векторным полем u_α записанным выше соотношением. Легко убедиться, что $G = \det\|G_{\alpha\beta}\| = -g = \det\|g_{\alpha\beta}\|$ [6], а поле u_α является единичным в двух метриках [6, 7].

Рассмотрим на многообразии M^4 наряду с полем u_α систему векторным полей w^i_α, $i = 1, 2, \ldots, n$. С помощью аналогичных записанному выше соотношению получим систему псевдоримановых метрик $g^{(i)}_{\alpha\beta}$ лоренцевой сигнатуры $(+,-,-,-)$:

$$g^{(i)}_{\alpha\beta} = \left(c_i^2 + 1\right) w^i_\alpha w^i_\beta - G_{\alpha\beta},$$

где величины $c_i > 0$ имеют смысл максимальной скорости распространения сигнала в пространстве – времени с метрикой $g^{(i)}_{\alpha\beta}$ и должны удовлетворять следующим условиям, исключающим совпадение метрик $g_{\alpha\beta}$, $g^{(i)}_{\alpha\beta}$ и $g^{(j)}_{\alpha\beta}$: $c_{(i)} \neq 1$, если $w^i_\alpha = u_\alpha$ и $c_{(i)} \neq c_{(j)}$, если $w^i_\alpha = w^j_\alpha$.

Для контравариантных компонент метрики $g^{(i)}_{\alpha\beta}$ получим

$$g^{\alpha\beta}_{(i)} = \frac{c_i^2 + 1}{c_i^2} w_i^\alpha w_i^\beta - G^{\alpha\beta},$$

где $w_i^\alpha = G^{\alpha\beta} w^i_\beta$. Исключая тензор $G_{\alpha\beta}$, находим связь между ковариантными и контравариантными компонентами метрик $g_{\alpha\beta}$ и $g^{(i)}_{\alpha\beta}$:

$$g^{(i)}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - 2u_\alpha u_\beta + \left(c_i^2 + 1\right) w^i_\alpha w^i_\beta; \quad g^{\alpha\beta}_{(i)} = g^{\alpha\beta} - 2u^\alpha u^\beta + \frac{1 + c_i^2}{c_i^2} k^{\alpha\beta}_{(i)}.$$

Здесь

$$k_i^{\alpha\beta} \ = \ 4u^\alpha u^\beta \left(u^\rho w^i_\rho\right)^2 - 2\left(u^\alpha w^\beta_{(i)g} + w^\alpha_{(i)g} u^\beta\right)\left(u^\rho w_\rho\right) + w^\alpha_{(i)g} w^\beta_{(i)g},$$

где $w^\alpha_{(i)g} = g^{\alpha\beta} w^i_\beta$.

В случае пустого пространства метрики $g_{\alpha\beta}$ и $g^{(i)}_{\alpha\beta}$ должны определяться интегралами действия

$$S_g = \int R_g \sqrt{-g} d^4x; \quad S_i = \int R_i \sqrt{-g^{(i)}} d^4x,$$

где R_g и R_i — тензоры Риччи метрик $g_{\alpha\beta}$ и $g^{(i)}_{\alpha\beta}$; g и $g^{(i)}$ — определители этих метрик, причем $g = g^{(i)}/c^2_{(i)} = -G$ [6]. Последнее равенство позволяет объединить интегралы действия для метрик $g_{\alpha\beta}$ и $g^{(i)}_{\alpha\beta}$ в один интеграл

$$S_\Sigma = \int \left\{ R_g + \sum_{i=1}^{n} \sigma_i R_i \right\} \sqrt{-g} d^4x.$$

Наконец, учитывая связь между метриками $g_{\alpha\beta}$ и $g^{(i)}_{\alpha\beta}$ и используя хорошо известные формулы биметрического формализма, получаем

$$S_\Sigma = \int \left\{ \kappa R_g + \sum_{i=0}^{n} L_i \left(u_\alpha, w^{(i)}_\alpha\right) \right\} \sqrt{-g} d^4x,$$

где κ — некоторая константа; $L_i\left(u_\alpha, w^{(i)}_\alpha\right)$ — функции, зависящие от полей u_α, w^i_α и их первых производных, $w^0_\alpha = u_\alpha$.

Если учесть, что у метрик $g_{\alpha\beta}$ и $g^{(i)}_{\alpha\beta}$ могут быть источники, то окончательно получим

$$S_\Sigma = \int \left\{ \kappa R_g + \sum_{i=0}^{n} \left[L_i \left(u_\alpha, w_\alpha^{(i)} \right) + L_{migi} \right] \right\} \sqrt{-g} d^4 x,$$

где L_{migi} — лагранжианы полей источников метрик $g_{\alpha\beta}$ и $g_{\alpha\beta}^{(i)}$.

Используя формулы биметрического формализма, последнее равенство может быть переписано с учетом связи метрик $g_{\alpha\beta}$ и $g_{\alpha\beta}^{(i)}$ в виде

$$S_\Sigma = \int \left\{ \kappa_i R_{gi} + \sum_{j=0}^{n} \left[\tilde{L}_j \left(w_\alpha^{(i)}, w_\alpha^{(j)} \right) + \tilde{L}_{mjgj} \right] \right\} \sqrt{-g^{(i)}} d^4 x,$$

где $\tilde{L}_j \left(w_\alpha^{(i)}, w_\alpha^{(j)} \right)$ и $\tilde{L}_{mjgj}$ получены из функций $L_i \left(u_\alpha, w_\alpha^{(i)} \right)$ и L_{migi} заменой метрики $g_{\alpha\beta}$ метрикой $g_{\alpha\beta}^{(i)}$.

Аналогично, выражая лоренцевы метрики $g_{\alpha\beta}$ и $g_{\alpha\beta}^{(i)}$ через евклидову метрику $G_{\alpha\beta}$, определяем

$$S_\Sigma = \int \left\{ \kappa_G R_G + \sum_{j=0}^{n} \left[\tilde{\tilde{L}}_j \left(w_\alpha^{(i)}, w_\alpha^{(j)} \right) + \tilde{\tilde{L}}_{mjG} \right] \right\} \sqrt{G}\, d^4 x.$$

Последнее равенство подтверждает, предположение Хокинга [5] о том, что евклидова (риманова) структура пространства – времени является более фундаментальной, чем лоренцева (псевдориманова) структура. При этом переход от римановой структуры к псевдоримановой может рассматриваться как аналог спонтанного нарушения симметрии. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим функционал действия для римановой метрики $G_{\alpha\beta}$ в пустом пространстве:

$$S = \int \kappa R_G \sqrt{G} d^4 x.$$

Выражая риманову метрику $G_{\alpha\beta}$ через псевдориманову метрику $g_{\alpha\beta}$ и векторное поле u_α, получаем

$$S = \int \left(\kappa R_g + F \right) \sqrt{-g} d^4 x,$$

где F — некоторое выражение, зависящее от метрики $g_{\alpha\beta}$, векторного поля u_α и его ковариантных производных. Таким образом, поле u_α может рассматриваться как один из источников метрики $g_{\alpha\beta}$. Когда функционал действия для метрики $G_{\alpha\beta}$ включает источники, тогда функционал действия для метрики $g_{\alpha\beta}$ кроме поля u_α будет содержать и другие источники.

Возможное сосуществование нескольких лоренцевых (псевдоримановых) структур может проявляться в виде эффекта “темной материи” и “темной энергии”.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л.Д.*, *Лифшиц Е.М.* Теория поля. Теоретическая физика. Т. II. М.: Физматлит, 2006. 534 с.
2. *Мизнер Ч.*, *Торн К.*, *Уилер Дж.А.* Гравитация; пер. с англ. Т. 1–3, М.: Мир, 1977. 525 с.
3. *Постников М.М.* Введение в теорию Морса. М.: Наука, 1971. 567 с.
4. *Бишоп Р.*, *Криттенден Р.* Геометрия многообразий; пер с англ. М.: Мир, 1967. 335 с.
5. *Hawking S.* Euclidian Quantum Gravity. In Recent Developments in Gravitation; ed. S. Deser, M. Levy. N.Y.: Plenum Press, 1978.
6. *Мицкевич Н.В.* Отображение псевдоримановых пространств на римановы в общей теории относительности. Кн.: Гравитация и теория относительности. Казань, 1982.
7. *Константинов М.Ю.* Топологические переходы в классической теории гравитации: скалярно-тензорный формализм. Кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц; под ред. К.П. Станюковича, В.Н. Мельникова. Вып. 16. М.: Энергоатомиздат, 1985. С. 148–157.
8. *Geroch R.* Faster Than Light? // General Relativity and Quantum Cosmology. 13 c. arXiv: 1005.1614v1 [gr-qc].

REFERENCES

[1] Landau L.D., Lifshits E.M. Teoreticheskaya fizika v 10 t. T. 2. Teoriya polya [Theoretical physics. In 10 volums. Vol. 2. The theory of field]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006. 534 p. (Eng. ed.: Landau L.D., Lifshitz E.M. Course of theoretical physics. Vol. 2. The Classical Theory of Fields. 4th ed. Butterworth-Heinemann. 1975.).

[2] Misner C.W., Thorne K.S., Wheeler J.A. Gravitation. Vol. 1–3. San Francisco, W.H. Freeman and Company Limited, 1973. 1279 p. (Russ. ed.: Mizner Ch., Torn K., Uiler Dzh. A. Gravitatsiya. Per. s angl. Moscow, Mir Publ., 1977. 525 p.).

[3] Postnikov M.M. Vvedenie v teoriyu Morsa [Introduction to Morse theory]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 567 p.

[4] Bishop R.L., Crittenden R. Geometry of manifolds. N.Y., Academic Press, 1964. 265 p. (Russ. ed.: Bishop R., Krittenden R. Geometriya mnogoobraziy. Per s angl. Moscow, Mir Publ., 1967. 335 p.

[5] Hawking S.W. Euclidian quantum gravity. In Cargese 1978 lectures: Recent Developments in Gravitation. Ed. Deser S., Levy M. N.Y., Plenum Press, 1978.

[6] Mitskevich N.V. Otobrazhenie psevdorimanovykh prostranstv na rimanovy v obshchey teorii otnositel’nosti. Kn.: Gravitatsiya i teoriya otnositel’nosti. [The mapping of pseudo-Riemannian spaces on Riemannian in general relativity theory. In book: Gravitation and the theory of relativity]. Kazan’, Kazanskiy Gosudarstvennyy Uni. Publ., 1982, pp. 115–119.

[7] Konstantinov M.Yu. Topologicheskie perekhody v klassicheskoy teorii gravitatsii: skalyarno-tenzornyy formalizm. Kn.: Problemy teorii gravitatsii i elementarnykh chastits; pod. red. K.P. Stanyukovich, V.N. Mel’nikov [Topological changes in the classical theory of gravitation: scalar-tensor formalism. In book: Problems of the theory of gravitation and elementary particles. Ed. Stanyukovitch K.P., Melnikov V.N.]. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1985, iss. 16, pp. 148–157.

[8] Geroch R. Faster Than Light? *General Relativity and Quantum Cosmology*, 2010, pp. 1–13. Available at: http:// arxiv.org/pdf/1005.1614.pdf (accessed 27.09.2014).

Статья поступила в редакцию 27.05.2014

Константинов Михаил Юрьевич — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры “Физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор ряда научных работ в области физики.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Konstantinov M.Yu. — Cand. Sci. (Phys.-Math.), assoc. professor of “Physics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of a number publications in the field of physics.
Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.