УДК 533.93

СТАТИСТИКА МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ СИСТЕМЫ КВАНТОВЫХ ЧАСТИЦ

Ю.В. Герасимов, **А.Г. Маслов**

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: Maslov_art@mail.ru

Приведено теоретическое решение задачи о создании статистики для многокомпонентной квантовой системы частиц в условиях дополнительных ограничений. Эта проблема возникает при решении прикладных задач, связанных с взаимодействием плазменных образований с другими телами, объектами и полями. Для решения задачи была предложена математическая формулировка статистического веса многокомпонентной квантовой системы частиц. Физическая постановка задачи потребовала введения дополнительных ограничений, используемых при определении рациональных параметров с помощью метода Лагранжа. Обобщенный подход в предельных случаях сведен к известным статистикам Бозе – Эйнштейна, Ферми – Дирака и Максвелла – Больцмана. В связи с дополнительным ограничением — по объему, занимаемому системой, — для определения множителей Лагранжа было использовано основное термодинамическое тождество в наиболее общем виде, что позволяет описывать плазменные образования, находящиеся в ограниченном объеме.

***Ключевые слова*:** статистика, плазма, функция распределения, статистический вес, метод множителей Лагранжа.

STATISTICS OF THE MULTI-COMPONENT SYSTEM OF QUANTUM PARTICLES

Yu.V. Gerasimov, **A.G. Maslov**

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: Maslov_art@mail.ru

This paper contains the theoretical solution of the problem of creating statistics for multi-component quantum system of particles in conditions of additional restrictions. This problem appears for solving applied problems that are related to the interaction of the plasma formations with other bodies, objects and fields. For the solving problem authors suggested mathematical formulation of statistical weight for multi-component quantum system. The physical formulation of the problem has demanded introduction of additional restrictions, used in rational parameters definition with help of the method of Lagrange multipliers. In the limiting cases the generalized approach turns to the well-known Fermi-Dirac, Bosa-Einstein and Maxwell – Boltzmann statistics. In view with the additional restriction on volume occupied by the system the main thermodynamics identify in the generalized form was used for the determination of the Lagrange multipliers that allows to describe the plasma formations located in a limited volume.

***Keywords*:** statistics, plasma, distribution function, statistical weight, method of Lagrange multipliers.

Введение. Плазменное образование состоит из набора различных ионов и элементарных частиц, которые ускоряются в электромагнитном поле и в результате совершают некоторую работу. Эта работа часто связана с воздействием потока частиц-носителей на некоторую поверхность. Эффективность такого воздействия максимальна в случае упругого взаимодействия частиц с поверхностью, при условии их нормального падения на поверхность воздействия. Одной из реальных практических задач по определению эффективности взаимодействия плазменного поршня с поверхностью является воздействие плазменного поршня на метаемый объект в рельсотроне. Для решения указанной задачи необходимо определить взаимодействие и найти распределение частиц многокомпонентного плазменного образования по энергетическим уровням для оценки интегральной энергии воздействия на метаемый объект [1].

Распределение частиц многокомпонентной плазмы по уровням энергии. Воздействие плазменного образования на поверхность объекта определяется составом и параметрами пакета частиц. Пакет состоит из различных типов частиц. Каждый пакет наиболее эффективен на отдельных этапах взаимодействия многокомпонентного плазменного поршня [2, 3] с объектом (на различных этапах разгона). Такая проблема возникает, например, при импульсном запуске наноспутника рельсотроном [4–6]. Для решения этой проблемы необходимо знать распределение частиц по энергетическим уровням. Известно, что наиболее вероятное состояние системы характеризуется максимальным статистическим весом. Статистический вес многокомпонентной квантовой системы может быть представлен в виде

$$\Omega = \prod_i \frac{(N_{\text{Б}_i} + Z_i - 1)!}{N_{\text{Б}_i}!\,(Z_i - 1)!} \frac{Z_i!}{(Z_i - N_{\Phi_i}) N_{\Phi_i}!},$$

где $N_i = N_{\text{Б}_i} + N_{\Phi_i}$ — число заполнения состояний; Z_i — число ячеек, соответствующее энергетическому уровню ε_i.

На систему наложены следующие ограничения: общее число частиц постоянно; постоянен объем занимаемый системой; ее энергия и число состояний, которые описываются соотношениями

$$N = \sum_i N_i; \quad E = \sum_i N_i E_i; \quad V = \frac{4\pi}{3} \sum_i N_i r_i^3.$$

Необходимые параметры определяются с помощью поиска экстремума по Лагранжу, для удобства в качестве исследуемой функции используется энтропия $S = k_{\text{Б}} \ln \Omega$:

$$S = k_{\text{Б}} \sum_i ((N_{\text{Б}i} + Z_i - 1) \ln(N_{\text{Б}_i} + Z_i - 1) - (Z_i - 1) \ln(Z_i - 1) -$$
$$- N_{\text{Б}_i} \ln N_{\text{Б}_i} + Z_i \ln(Z_i) - (Z_i - N_{\Phi_i}) \ln(Z_i - N_{\Phi_i}) - N_i \ln N_{\Phi_i}).$$

В соответствии с методом Лагранжа вводится функция

$$F = S + \lambda_1 N + \lambda_2 E + \lambda_3 V.$$

Была найдена частная производная функции F по N_i, которую приравняли нулю для нахождения максимума:

$$\frac{\partial F}{\partial N_i} = k_{\text{Б}} \left(\ln(N_{\text{Б}_i} + Z_i - 1) - \ln N_{\text{Б}_i} + \right.$$
$$\left. + \ln(Z_i - N_{\Phi_i}) - \ln N_{\Phi_i}\right) + \lambda_1 + \lambda_2 E_i + \frac{4\pi}{3}\lambda_3 r_i = 0. \quad (1)$$

После преобразования выражение (1) примет вид

$$\ln \frac{N_{\text{Б}_i} + Z_i - 1}{N_{\text{Б}_i}} + \ln \frac{Z_i - N_{\Phi_i}}{N_{\Phi_i}} = -\frac{\lambda_1 + \lambda_2 E_i + \frac{4\pi}{3}\lambda_3 r_i}{k_{\text{Б}}},$$

что эквивалентно соотношению

$$\frac{N_{\text{Б}_i} + Z_i - 1}{N_{\text{Б}_i}} \frac{Z_i - N_{\Phi_i}}{N_{\Phi_i}} = \exp\left(-\frac{\lambda_1 + \lambda_2 E_i + \frac{4\pi}{3}\lambda_3 r_i}{k_{\text{Б}}}\right).$$

Левая часть равенства преобразована с помощью умножения на Z_i^2/Z_i^2 в равенство

$$\frac{n_{\text{Б}_i} + 1}{n_{\text{Б}_i}} \frac{1 - n_{\Phi_i}}{n_{\Phi_i}} = \exp\left(-\frac{\lambda_1 + \lambda_2 E_i + \frac{4\pi}{3}\lambda_3 r_i}{k_{\text{Б}}}\right). \quad (2)$$

Для сравнения с известными статистиками был рассмотрен частный случай неограниченного объема. Тогда в предположении, что концентрация фермионов устремляется к нулю (фермионов много меньше, чем бозонов):

$$\frac{n_{\text{Б}_i} + 1}{n_{\text{Б}_i}} = \exp\left(-\frac{\lambda_1 + \lambda_2 E_i + \frac{4\pi}{3}\lambda_3 r_i}{k_{\text{Б}}} - K\right),$$

где $K = \ln \dfrac{1 - n_{\Phi_i}}{n_{\Phi_i}}$. Поскольку величины K и λ_1 постоянны, их сумма также является постоянной. Таким образом,

$$\frac{n_{\text{Б}_i} + 1}{n_{\text{Б}_i}} = \exp\left(-\frac{\lambda_1' + \lambda_2 E_i + \frac{4\pi}{3}\lambda_3 r_i}{k_{\text{Б}}}\right).$$

Множители Лагранжа рассчитываются исходя из того, что дифференциал F должен быть равен нулю:

$$dS = -\lambda_1' dN - \lambda_2 dE = \frac{dE}{T}.$$

Откуда $\lambda_2 = -1/T$.

Множитель λ_1' принимается равным μ/T, где μ — химический потенциал системы, учитывающий наличие фермионов. Тогда из выражения (2) получим статистику Бозе – Эйнштейна [2]

$$n_{\text{Б}_i} = \frac{1}{e^{\frac{E_i-\mu}{k_{\text{Б}}T}} - 1}.$$

Аналогично, когда концентрация бозонов очень мала, может быть получена статистика Ферми – Дирака [3, 4]:

$$n_{\Phi_i} = \frac{1}{e^{\frac{E_i-\mu}{k_{\text{Б}}T}} + 1}.$$

Если концентрации бозонов и фермионов примерно равны $n_i = n_{\text{Б}_i} + n_{\Phi_i} = 2n_{\text{Б}_i} = 2n_{\Phi_i}$, то

$$\frac{n_i+2}{n_i}\frac{2-n_i}{n_i} = \exp\left(-\frac{\lambda_1 + \lambda_2 E_i + \frac{4\pi}{3}\lambda_3 r_i}{k_{\text{Б}}}\right),$$

отсюда

$$n_i = \frac{2}{\sqrt{\exp\left(-\frac{\lambda_1 + \lambda_2 E_i + \frac{4\pi}{3}\lambda_3 r_i}{k_{\text{Б}}}\right) + 1}}.$$

Множители Лагранжа рассчитываются исходя из того, что дифференциал функции F должен быть равен нулю:

$$dS = -\lambda_1 dN - \lambda_2 dE - \lambda_3 dV = \frac{dE}{T} + P\frac{dV}{T}.$$

Откуда

$$\lambda_2 = -\frac{1}{T}; \quad \lambda_3 = -\frac{P}{T}; \tag{3}$$

$$\lambda_1 = \frac{\mu}{T}. \tag{4}$$

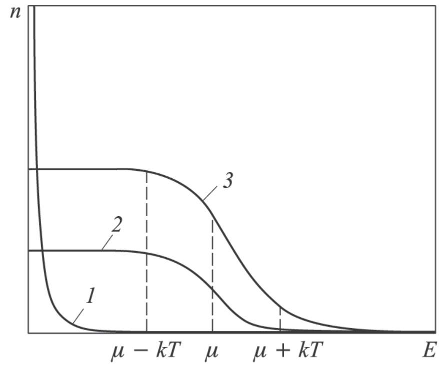
Окончательно

$$n_i = \frac{2}{\sqrt{\exp\left(-\frac{\mu - E_i - \frac{4\pi}{3}P r_i}{k_{\text{Б}}T}\right) + 1}}. \tag{5}$$

При рассмотрении малых чисел заполнения ($n_i \ll 1$) в соответствии с формулой (5) это выполняется при $\exp\left(-\dfrac{\mu - E_i - \dfrac{4\pi}{3}Pr_i}{k_Б T}\right) \gg 1$, следовательно

$$n = Ae^{\frac{-E}{k_Б T}}.$$

Общий вид полученных статистик представлен на рисунке.



Общий вид статистик Бозе – Эйнштейна (*1*), Ферми – Дирака (*2*) и обобщенной статистики (*3*)

Пример. В качестве примера рассмотрим статистику квантовой системы, состоящую из ионов OH^- и $C_2H_2^{2+}$ в соотношении 2 : 1, при температуре 30 000 K, содержащуюся в 1 м^3, с количеством вещества 1 моль.

Рассчитаем химический потенциал системы, в приближении идеального газа:

$$\mu = \left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_{S,V} = \left(\frac{\partial \dfrac{i}{2}\dfrac{N}{N_А}RT}{\partial N}\right)_{S,V} = 3k_Б T$$

Для подобной системы $n_{Ф_i} = 2n_Б$, $n = 3n_{Б_i}$.

Тогда с учетом соотношений (3) и (4) формула (2) будет преобразована к виду

$$\frac{n_i + 3}{n_i}\frac{3 - n_i}{n_i} = \exp\left(\frac{E_i + \dfrac{4\pi}{3}Pr_i - 3k_Б T}{k_Б T}\right),$$

отсюда

$$n_i = \frac{3}{\sqrt{e^{\frac{E_i + 10^{-2}}{1{,}38}10^{23}} + 1}}.$$

Заключение. Определена статистика для многокомпонентной квантовой системы частиц. Особенность полученной статистики — не только ограничение по общей энергии и числу частиц, но и по объему, занимаемому плазменным образованием. Эта статистика позволит рационализировать параметры плазменных образований и их воздействие на рабочее тело.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Маслов В.П.* Взаимодействие классических фермионов с бозонами // Матем. заметки. 1998. № 64:2. С. 315–317.

2. *Vijayan T.*, *Venkatramani N.* Heating and transport of metal plasma in a vacuum-arc rail gun // IEEE Transactions on Plasma Science. 2004. Vol. 32. No. 2. P. 770–774. DOI: 10.1109/TPS.2004.828536.
3. *Landen D.*, *Satapathy S.* Eddy current effects in the laminated containment structure of railguns // IEEE Transactions on Magnetics. 2007. Iss. 1. Vol. 43. P. 150–156. DOI: 10.1109/TMAG.2006.887449.
4. *Acceleration* of a Suborbital Payload using an Electromagnetic Railgun / P. Lehmann, B. Reck, M.D. Vo, J. Behrens // IEEE Transactions on Magnetics. 2007. Vol. 43. Iss. 1. P. 480–485. DOI: 10.1109/TMAG.2006.887666.
5. *Оценка* параметров выведения наноспутников в околоземное пространство с помощью импульсных стартовых и корректирующих устройств / Ю.В. Герасимов, М.Ю. Герасимов, Г.К. Каретников, А.Б. Селиванов, А.С. Фионов // Полет. 2014. № 3.
6. *Оценка* относительной конечной массы наноспутника, доставляемой в околоземное пространство с помощью импульсных стартового и корректирующего устройств / Ю.В. Герасимов, Г.К. Каретников, А.Б. Селиванов, А.С. Фионов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2013. № 3 (92). С. 69–72.
7. *Эйнштейн А.* Собрание научных трудов. Т. 3. М.: Наука, 1966. 632 с.
8. *Дирак П.А.М.* Собрание научных трудов. Т. 2. М.: Физматлит, 2002. 846 с.
9. *Ферми Э.* Научные труды. Т. 1. М.: Наука, 1971. 818 с.

REFERENCES

[1] Maslov V.P. Interaction of classical fermions with bosons. *Matem. Zametki* [Mathematical Notes, pp. 269–272], 1998, vol. 64, iss. 2, pp. 315–317 (in Russ.). DOI: 10.4213/mzm1401

[2] Vijayan T., Venkatramani N. Heating and transport of metal plasma in a vacuum-arc rail gun. *IEEE Transactions on Plasma Science*, 2004, vol. 32, no. 2, pp. 770–774. DOI: 10.1109/TPS.2004.828536

[3] Landen D., Satapathy S. Eddy current effects in the laminated containment structure of railguns. *IEEE Transactions on Magnetics*, 2007, iss. 1, vol. 43, pp. 150–156. DOI: 10.1109/TMAG.2006.887449

[4] Lehmann P., Reck B., Vo M.D., Behrens J. Acceleration of a suborbital payload using an electromagnetic railgun. *IEEE Transactions on Magnetics*, 2007, vol. 43, iss. 1, pp. 480–485. DOI: 10.1109/TMAG.2006.887666

[5] Gerasimov Yu.V., Gerasimov M.Yu., Karetnikov G.K., Selivanov A.B., Fionov A.S. Assessing parameters of launching nanosatellites into near earth orbit using pulse launch and control systems. *Polet* [Flight], 2014, no. 3, pp. 49–54 (in Russ.).

[6] Gerasimov Yu.V., Karetnikov G.K., Selivanov A.B., Fionov A.S. Evaluation of relative final mass of a nanosatellite delivered to the near-earth space using a pulsed launcher and a pulsed correcting thruster. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Mashinostr.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Mech. Eng.], 2013, no. 3 (92), pp. 69–72 (in Russ.).

[7] Eynshteyn A., Tamm I.E., Smorodinskiy Ya.A., Kuznetsov B.G., eds. Sobranie nauchnykh trudov. V 4 t. [Collection of scientific works. In 4 vol.]. Moscow, Nauka Publ., 1966. 632 p. (vol. 3).

[8] Dirak P.A.M., Sukhanov A. D., eds. Sobranie nauchnykh trudov. V 4 t. [Collection of scientific works. In 4 vol.]. Moscow, Fizmatlit Publ, 2003. 846 p. (vol. 2).

[9] Fermi E., Pontekorvo B., eds. Nauchnye trudy v 2 t. [Scientific works. In 2 vol.]. Moscow, Nauka Publ, 1971. 818 p. (vol. 1).

Статья поступила в редакцию 23.12.2013

Герасимов Юрий Викторович — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры “Физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор около 20 научных работ в области физики.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Gerasimov Yu.V. — Cand. Sci. (Phys.-Math.), assoc. professor of “Physics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of about 20 publications in the field of physics.
Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Маслов Артемий Глебович — студент МГТУ им. Н.Э. Баумана. Специализируется в области физики.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Maslov A.G. — student of “Physics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Specialize in the field of physics.
Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.