

УДК 532.59:534.1

ВОЛНОВАЯ ДИНАМИКА СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ СРЕД ПЕРЕМЕННОЙ ГЛУБИНЫ

В.В. Булатов, Ю.В. Владимиров

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН,
Москва, Российская Федерация
e-mail: internalwave@mail.ru; vladimyura@yandex.ru

Рассмотрены поля внутренних гравитационных волн в слое стратифицированной среды переменной глубины. Исследована волновая динамика монохроматических внутренних гравитационных волн в клине и построены как точные решения этой задачи, так и асимптотики. В предположении линейного наклона дна с использованием преобразования Канторовича – Лебедева получены точные решения, описывающие отдельную моду и полное волновое поле, возбуждаемое точечным источником возмущений. Построены ВКБ-асимптотики отдельной волновой моды, которые выражаются через гипергеометрическую функцию, а также асимптотики полного волнового поля, выражающиеся через полулогарифмическую функцию. Для параметров среды, характерной для реального океана, приведены результаты численных расчетов волновых полей по точным и асимптотическим формулам и оценены границы их применимости.

Ключевые слова: стратифицированная среда, внутренние гравитационные волны, ВКБ-асимптотики, преобразование Канторовича – Лебедева.

WAVE DYNAMICS IN STRATIFIED MEDIA OF NON-UNIFORM DEPTH

V.V. Bulatov, Yu.V. Vladimirov

A.Yu. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences,
Moscow, Russian Federation
e-mail: internalwave@mail.ru; vladimyura@yandex.ru

The article considers wave dynamics in a stratified medium of the non-uniform depth. It presents the research into the wave dynamics of monochrome internal gravity waves in the wedge. Both an explicit analytical solution to this problem and the asymptotics are found. The explicit solutions to an assumption of the linear bottom slant are found with the help of the Kantorovich – Lebedev transformation. They describe both a separated mode and the total wave field excited by a common source point. WKBJ-asymptotics of the separate wave mode defined by a hypergeometric function as well as asymptotics of the total wave field defined by semilogarithmical function are obtained. The results of numerical computations of the wave fields occurring in the natural ocean environment using the exact and asymptotic quotations are presented. The limits to their applicability are determined.

Keywords: stratified medium, internal gravity waves, WKBJ-asymptotics, Kantorovich – Lebedev transformation.

Введение. В настоящее время в связи с проблемами геофизики, океанологии, физики атмосферы наблюдается усиление интереса к

изучению динамики волновых движений стратифицированных сред [1–3]. Как правило, в основе анализа динамики волновых движений лежат асимптотические методы, так как на базе изучения невозмущенных уравнений гидродинамики формируются асимптотические разложения (анзацы от нем. Ansatz — виды решения), позволяющие в дальнейшем решать задачи для возмущенных уравнений, которые могут учитывать эффекты нелинейности, неоднородности и нестационарности природных стратифицированных сред [4–7]. Для детального описания широкого круга физических явлений, связанных с динамикой стратифицированных неоднородных по горизонтали и нестационарных сред, необходимо исходить из достаточно развитых математических моделей, которые, как правило, оказываются весьма сложными, нелинейными, многопараметрическими, и для их полного исследования эффективны лишь численные методы [8–11]. Однако в ряде случаев первоначальное качественное представление об изучаемом круге явлений можно получить и на основе более простых асимптотических моделей и аналитических методов их исследования. Эти модели в дальнейшем входят в тот набор “блоков”, из которых складывается общая картина динамики волн, позволяющая проследить соотношение различных волновых явлений и установить их взаимосвязь [4, 7, 11]. Иногда, даже несмотря на простоту используемых модельных предположений, удачный выбор формы решения позволяет получить физически интересные результаты.

В связи с этим необходимо отметить задачи об эволюции негармонических волновых пакетов в плавнонеоднородной по горизонтали и нестационарной стратифицированной среде [2, 3, 6, 11]. Построенные модельные решения, описывающие структуру полей отдельных волновых мод в вертикально стратифицированной среде, позволили получить асимптотические представления полей внутренних волн с учетом изменчивости среды не только по вертикали и горизонтали, но и по времени. Кроме того, оказалось, что построенные решения вполне согласуются с результатами натурных наблюдений волновых полей [7–9].

С учетом изложенного выше представляет интерес исследование нерассматриваемых ранее точных решений, описывающих динамику волновых возмущений от точечного источника в клиновидной области стратифицированной среды. Следует отметить, что в силу значительных математических трудностей удается построить или асимптотические представления волновых полей, или точные решения для монохроматических волн [6, 12]. В настоящей работе рассмотрен общий случай волновой динамики стратифицированной среды переменной глубины.

Постановка задачи. Здесь рассмотрены поле внутренних гравитационных волн в слое стратифицированной среды переменной глубины. В предположении линейного наклона дна на основе преобразования Канторовича – Лебедева получены точные решения, которые описывают отдельную моду и полное волновое поле. Построены ВКБ-асимптотики отдельной волновой моды, выражающиеся через гипергеометрическую функцию, а также асимптотики полного волнового поля, выражающиеся через полулогарифмическую функцию. Для параметров характерной для реального океана среды приведены результаты численных расчетов волновых полей по точным и асимптотическим формулам, оценены границы их применимости.

В рамках линейной теории исследована невязкая, несжимаемая неоднородная среда с невозмущенной плотностью $\rho_0(z)$, ограниченная поверхностью $z = 0$ и дном $z = \gamma y$ (ось z направлена вверх, γ – наклон дна). В точке $x = x_0, y = y_0, z = z_0$, находящейся внутри клина, имеется точечный источник массы мощностью Q и временной зависимостью $\exp(-i\omega t)$. Система уравнений гидродинамики для малых возмущений плотности ρ^* , давления p^* и компонент скорости (u_1, u_2, w) имеет вид

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial u_1}{\partial t} &= -\frac{\partial p^*}{\partial x}; \\ \rho_0 \frac{\partial u_2}{\partial t} &= -\frac{\partial p^*}{\partial y}; \quad \rho_0 \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p^*}{\partial z} + g\rho^*; \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= Q \exp(-i\omega t) \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0); \\ \frac{\partial \rho^*}{\partial t} + w \frac{\partial \rho_0}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где g – ускорение силы тяжести. В качестве граничных условий возьмем условие “твердой крышки” на поверхности и условие непротекания на дне

$$w = 0 \text{ при } z = 0, \quad w + u_2 \gamma = 0 \text{ при } z = -\gamma y. \tag{2}$$

Предполагая у всех решений гармоническую зависимость от времени: $(p^*, \rho^*, u_1, u_2, w) = \exp(-i\omega t)(p, \rho, U_1, U_2, W)$, можно получить следующую систему уравнений с граничными условиями (2):

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{\partial p}{\partial x} / i\omega \rho_0; \quad U_2 = \frac{\partial p}{\partial y} / i\omega \rho_0; \quad W = -\frac{c^2 \partial p}{\partial z} / i\omega \rho_0; \\ \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} &= Q \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0); \quad \rho = \frac{W \partial \rho_0}{\partial z} / i\omega, \end{aligned} \tag{3}$$

где $c^2 = \omega^2 / (N^2 - \omega^2)$; $N^2(z) = -\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z}$ — частота Брента–Вяйсяля, которая предполагается постоянной, $N(z) = N = \text{const}$. В приближении Буссинеска система (3) сводится к одному уравнению, например, для возмущенного давления p с соответствующими граничными условиями

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right) = \frac{-i\omega Q \rho_0 \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0)}{c^2}; \quad (4)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \text{ при } z = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\gamma}{c^2} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \text{ при } z = -\gamma y. \quad (5)$$

Под значением ρ_0 в правой части условия (4) в силу относительно малого изменения плотности $\rho_0(z)$ в океане понимается, например, значение плотности морской воды на поверхности, т.е. $\rho_0 = \rho_0(0) = \text{const}$. Решение $p(x, y, z)$ должно стремиться к нулю при $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty$. После нахождения функции $p(x, y, z)$ компоненты скорости (U_1, U_2, W) можно определить из первых трех уравнений системы (3), а плотность ρ — из пятого уравнения этой системы.

Интегральные представления решений. Выполним замену переменных

$$\begin{aligned} y &= r \operatorname{ch} \varphi, \quad z = -cr \operatorname{sh} \varphi; \\ r &= \sqrt{y^2 - z^2/c^2}; \quad \varphi = \frac{1}{2} \ln \frac{cy - z}{cy + z}. \end{aligned} \quad (6)$$

Осуществим преобразование Фурье по переменной x (не умаляя общности можно принять $x_0 = 0$). Учитывая, что модуль якобиана перехода от координат (y, z) к координатам (r, φ) равен cr , из (4), (5) получаем для фурье-образа $P(r, \varphi, l)$ функции $p(r, \varphi, x)$ следующую плоскую краевую задачу:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{\partial P}{r \partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2} - l^2 P = \frac{q}{r} \delta(r - r_0) \delta(\varphi - \varphi_0); \quad (7)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \varphi} = 0 \text{ при } \varphi = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial \varphi} = 0 \text{ при } \varphi = \varphi_r; \quad (8)$$

$$r_0 = \sqrt{y_0^2 - z_0^2/c^2}, \quad \varphi_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{cy_0 - z_0}{cy_0 + z_0}, \quad \varphi_r = \frac{1}{2} \ln \frac{c + \gamma}{c - \gamma}, \quad q = \frac{i\omega Q \rho_0}{c}. \quad (9)$$

Решение трехмерной краевой задачи (4), (5) в переменных (r, φ, x) получается из решения плоской задачи (7), (8) с помощью обратного

преобразования Фурье

$$p(r, \varphi, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P(r, \varphi, l) \exp(ilx) dl. \quad (10)$$

Далее предположим, что $\gamma < c$, или, используя терминологию, введенную в работах [2, 5, 6], полагаем наклон дна докритическим (критический наклон $\gamma = \tilde{n}$). Однородное уравнение (7) с нулевой правой частью имеет убывающие на бесконечности действительные решения $P(r, \varphi, l) = K_{i\mu}(lr) \cos(\mu\varphi)$, где μ — любое действительное число; $K_{i\mu}(lr)$ — функция МакДональда мнимого индекса, удовлетворяющая параметрическому модифицированному уравнению Бесселя

$$LK_{i\mu}(lr) = 0; \quad L = r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + r \frac{\partial}{\partial r} + (\mu^2 - r^2 l^2).$$

Отметим, что функция $K_{i\mu}(lr)$ вещественна, если значения μ вещественны и аргумент lr положителен. Исходя из этого, для представления дельта-функции $\delta(r - r_0)$ воспользуемся парой прямого и обратного преобразования Канторовича – Лебедева:

$$F(\mu) = \int_0^{+\infty} K_{i\mu}(x) \frac{f(x)}{x} dx; \quad f(x) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \text{sh}(\pi\mu) K_{i\mu}(x) F(\mu) \mu d\mu.$$

Откуда можно получить разложение для дельта-функции (условие полноты)

$$\delta(r - r_0) = \frac{2}{r\pi^2} \int_0^{+\infty} \text{sh}(\pi\mu) K_{i\mu}(lr) K_{i\mu}(lr_0) \mu d\mu. \quad (11)$$

Решение задачи (7) будем искать в виде

$$P(r, \varphi, l) = \frac{2q}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \text{sh}(\pi\mu) K_{i\mu}(lr) K_{i\mu}(lr_0) \Phi_\mu(\varphi) \mu d\mu \quad (12)$$

с неизвестной функцией угловой переменной $\Phi_\mu(\varphi)$. Подстановка (11) и (12) в (7) приводит к следующей краевой задаче для определения этой функции:

$$\frac{d^2 \Phi_\mu(\varphi)}{d\varphi^2} + \mu^2 \Phi_\mu(\varphi) = -\delta(r - r_0); \quad (13)$$

$$\frac{d\Phi_\mu(0)}{d\varphi} = \frac{d\Phi_\mu(\varphi_r)}{d\varphi} = 0.$$

В соответствии с (13) функция $\Phi_\mu(\varphi)$ является угловой функцией Грина

$$\Phi_\mu(\varphi) = -\frac{1}{\mu^2 \varphi_r} - \frac{2}{\varphi_r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\varphi \mu_n) \cos(\varphi_0 \mu_n)}{\mu^2 - \mu_n^2}, \quad (14)$$

$$\mu_n = \frac{2\pi n}{\ln\left(\frac{c+\gamma}{c-\gamma}\right)}, n \geq 1.$$

Точное решение и асимптотика отдельной волновой моды. Рассмотрим в выражении (12) отдельную волновую моду ($n \geq 1$)

$$P_n(r, \varphi, l) = -\frac{4q \cos(\varphi \mu_n) \cos(\varphi_0 \mu_n)}{\varphi_r \pi^2} \int_0^{+\infty} \frac{\text{sh}(\pi \mu) K_{i\mu}(lr) K_{i\mu}(lr_0) \mu d\mu}{\mu^2 - \mu_n^2}. \quad (15)$$

Здесь интеграл понимается в смысле главного значения. Формула (15) пригодна и для случая $n = 0$, если принять $\mu_0 = 0$, а коэффициент перед интегралом уменьшить в 2 раза. Рассмотрим сначала случай $r > r_0$. В целях деформирования контура интегрирования по величине μ в выражении (15) воспользуемся формулой $K_\nu(t) = \pi(I_{-\nu}(t) - I_\nu(t))/(2 \sin(\pi \mu))$, которая при $\nu = i\mu$ для функции $K_{i\mu}(lr_0)$ приобретает вид

$$K_{i\mu}(lr_0) = -\pi \frac{\text{Im}(I_{i\mu}(lr_0))}{\text{sh}(\pi \mu)}, \quad (16)$$

так как функции $I_{i\mu}(x)$ и $I_{i\mu}(-x)$ являются комплексно-сопряженными. Подынтегральная функция в (15) четная по величине μ , поэтому с помощью соотношения (16) можно получить

$$P_n(r, \varphi, l) = \frac{2q \cos(\varphi \mu_n) \cos(\varphi_0 \mu_n)}{\pi \varphi_r} \text{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K_{i\mu}(lr) I_{i\mu}(lr_0) \mu d\mu}{\mu^2 - \mu_n^2}. \quad (17)$$

Теперь контур интегрирования в (17) можно замкнуть в нижнюю полуплоскость. Чтобы убедиться в этом, используем асимптотики $K_{i\mu}(x)$ и $I_{i\mu}(x)$ при $\mu = -i\nu, \nu \rightarrow \infty$: $K_\nu(lr) \approx \sqrt{\pi/2\nu} (2\nu/elr)^\nu$; $I_\nu(lr_0) \approx \sqrt{\pi/2\nu} (2\nu/er_0l)^\nu / (2\sqrt{2})$. Тогда можно получить $K_\nu(lr) I_\nu(lr_0) \approx \pi \exp(-\nu(\ln r - \ln r_0)) / (4\nu\sqrt{2})$. Откуда видно, что подынтегральное выражение экспоненциально мало в нижней полуплоскости при $r > r_0$. Тогда, учитывая вычеты в точках $\mu = \pm\mu_n$, имеем

$$P_n(r, \varphi, l) = -\frac{2q \cos(\varphi \mu_n) \cos(\varphi_0 \mu_n)}{\varphi_r} \text{Re}(K_{i\mu_n}(lr) I_{i\mu_n}(lr_0)). \quad (18)$$

При $r < r_0$ представим в виде (16) функцию $K_{i\mu}(lr)$ и, замыкая контур интегрирования в нижнюю полуплоскость, получаем выражение (18), в котором необходимо поменять местами величины r и r_0 . Полученные выражения можно объединить в одно, если обозначить $r_- = \min(r, r_0)$, $r_+ = \max(r, r_0)$:

$$P_n(r, \varphi, l) = -\frac{2q \cos(\varphi\mu_n) \cos(\varphi_0 \mu_n)}{\varphi_r} \operatorname{Re}(K_{i\mu_n}(lr_+)I_{i\mu_n}(lr_-)). \quad (19)$$

Аналогично при $n = 0$ определяем

$$P_0(r, \varphi, l) = -\frac{q}{\varphi_r} \operatorname{Re}(K_0(lr_+)I_0(lr_-)). \quad (20)$$

Проведем обратное преобразование Фурье (10) для n -й моды ($n \geq 0$) и учтем, что установившаяся стоячая волна — четная функция переменной x , в результате получим

$$p_n(r, \varphi, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P_n(r, \varphi, l) \cos(lx) dl.$$

Этот интеграл выражается через гипергеометрическую функцию

$$p_n(r, \varphi, x) = -\frac{q \varepsilon_n \cos(\varphi\mu_n) \cos(\varphi_0 \mu_n)}{\sqrt{\pi r r_0} \varphi_r} \operatorname{Re}Z; \quad (21)$$

$$Z = \frac{\Gamma(i\mu_n + 1/2)}{\Gamma(i\mu_n + 1)} (\tau/2)^{i\mu_n + 1/2} F\left(\frac{i\mu_n + 1/2}{2}, \frac{i\mu_n + 3/2}{2}, i\mu_n + 1, \tau^2\right).$$

Здесь $\Gamma(z)$ — гамма-функция; $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ — гипергеометрическая функция; $\tau = 2rr_0/(r^2 + r_0^2 + x^2)$, $\varepsilon_n = 1/2$ при $n = 0$ и $\varepsilon_n = 1$ при $n \geq 1$. Полное решение получается суммированием всех мод

$$p(r, \varphi, x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(r, \varphi, x), \text{ где } r \text{ и } \varphi \text{ — величины, определяемые по (6),}$$

$r_0, \varphi_0, \varphi_r$ — по (9). Отметим, что полю вдали от источника возмущений, т.е. большим значениям r и x , соответствуют малые значения τ , и отдельную моду $p_n(r, \varphi, x)$ можно аппроксимировать с помощью разложения гипергеометрической функции в ряд при $0 \leq z < 1$:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} z + \frac{\alpha(\alpha + 1)\beta(\beta + 1)}{\gamma(\gamma + 1)2!} z^2 + \dots, \quad (22)$$

где $\alpha = \frac{i\mu_n + 1/2}{2}$; $\beta = \frac{i\mu_n + 3/2}{2}$; $\gamma = i\mu_n + 1$. Однако при фиксированном значении z с увеличением номера моды n в разложении (22) приходится брать все большее число членов ряда (число членов $m \approx \mu_n z$), что затрудняет расчет волновых мод с большими номерами. Имея в виду дальнейшее суммирование ряда (22), воспользуемся

ВКБ-асимптотикой гипергеометрической функции из (21):

$$F(\tau^2) \approx \exp\left(-\frac{i\mu_n}{2}\left(\ln\frac{\tau^2}{4} + \ln\frac{1+\sqrt{1-\tau^2}}{1-\sqrt{1-\tau^2}}\right)\right) / \sqrt[4]{1-\tau^2}. \quad (23)$$

Далее используем асимптотику гамма-функции из (21) при больших значениях μ_n : $\frac{\Gamma(i\mu_n+1/2)}{\Gamma(i\mu_n+1)} \approx \exp(-i\pi/4)/\sqrt{\mu_n}$. Окончательно получаем следующее выражение для ВКБ-асимптотики при больших значениях μ_n отдельной волновой моды:

$$p_n(r, \varphi, x) \approx -\frac{q\sqrt{\tau} \cos(\varphi\mu_n) \cos(\varphi_0\mu_n)}{\sqrt{2\mu_n\pi r r_0} \varphi_r} \cos\left(\frac{\mu_n}{2} \ln\frac{1+\sqrt{1-\tau^2}}{1-\sqrt{1-\tau^2}} + \frac{\pi}{4}\right). \quad (24)$$

Следует отметить, что если формально принять в разложении (22) $\mu_n \rightarrow \infty$, а в ВКБ-асимптотике (23) для $F(z) - z \rightarrow 0$ с учетом $z\mu_n \approx O(1)$, то в обоих случаях получаем одинаковое значение, равное $\exp(-iz\mu_n/4)$. Таким образом, разложения (22) и ВКБ-асимптотика (23) внутренне согласованы, т.е. имеется область значений z, μ_n , где эти выражения совпадают. Согласно выражению (24), амплитуда n -й моды при больших значениях x, y убывает как $((x^2 + y^2)n)^{-1/2}$. Раскладывая фазу в (24) при малых значениях τ , получаем, что длина полуволны вдоль оси y при больших значениях y возрастает как $\pi y/\mu_n$, вдоль оси x — как $\pi x/2\mu_n$.

Результаты расчетов первой и второй волновых мод при фиксированных значениях x, z (срезка по переменной y) приведены на рис. 1, *а, б*, первая и вторая моды при фиксированных значениях z, y (срезка по переменной x) — на рис. 1, *в, г*. Параметры расчетов, характерные для реальных океанических условий, следующие: $N = 0,001\text{с}^{-1}$; $\omega = 0,004\text{с}^{-1}$; $\gamma = 0,2$; $c = 0,44$; $\rho_0 = 1000\text{кг/м}^3$; $Q = 1600\text{м}^3/\text{с}$; $y_0 = 500\text{м}$; $z_0 = -4\text{м}$. Значения $x = 20\text{м}$, $z = -40\text{м}$ (см. рис. 1, *а, б*), значения $z = -40\text{м}$, $y = 520\text{м}$ (см. рис. 1, *в, г*). В соответствии с представленными результатами получено хорошее совпадение точного и асимптотического решений, за исключением непосредственной окрестности источника возмущений, где аргумент гипергеометрической функции стремится к единице, что следует из построения асимптотического решения. Отметим, что выражение (24) формально пригодно при $\mu_n \rightarrow \infty$, в численных расчетах $\mu_n = 6,406n$, и уже для первой моды $n = 1$ асимптотики (24) качественно верно описывают точные решения (см. рис. 1). Асимптотику нулевой моды можно вычислить, используя (21) и полагая $\mu_n = 0$. Тогда с учетом $F\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1, \tau^2\right) = \frac{2}{\pi\sqrt{1+\tau}}K\left(\frac{2\tau}{1+\tau}\right)$, где

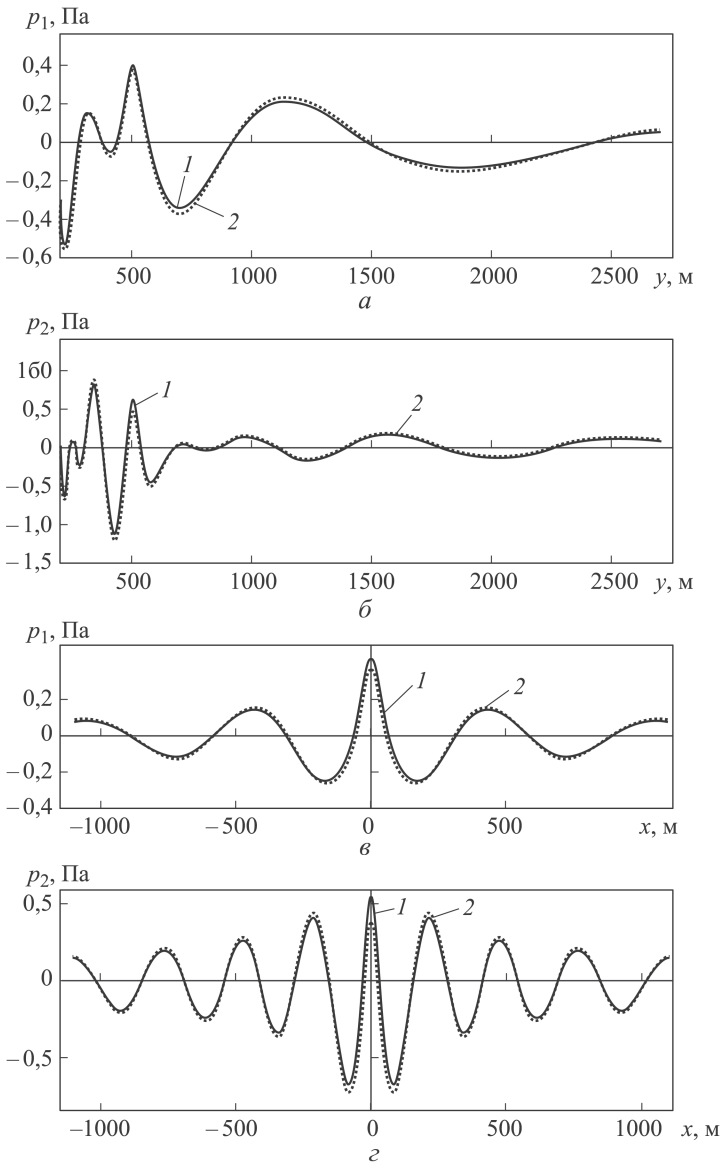


Рис. 1 (начало). Первая (а, в), вторая (б, г) и нулевая (д, е) моды при фиксированных значениях x, z (а, в), z, y (б, г): 1 – точное решение; 2 – ВКБ-асимптотика

$$K(x) = \int_0^{\pi/2} (1 - (x \sin \varphi)^2)^{-1/2} d\varphi$$
 – эллиптический интеграл первого рода, можно получить следующее выражение:

$$p_0(r, \varphi, x) \approx -\frac{q\sqrt{\tau}}{\pi\sqrt{1 + \tau\sqrt{2r r_0\varphi_r}}} K\left(\frac{2\tau}{1 + \tau}\right). \quad (25)$$

Далее, используя асимптотику $K(x)$ при $x \rightarrow 1$, главный член кото-

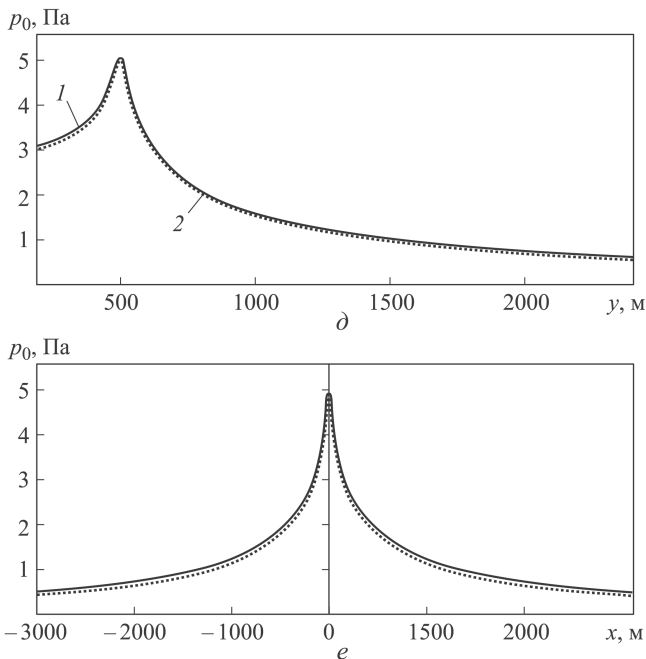


Рис.1 (окончание). Первая (а, в), вторая (б, з) и нулевая (д, е) моды при фиксированных значениях x, z (а, в), z, y (б, з):

1 — точное решение; 2 — ВКБ-асимптотика

рой имеет вид $K(x) \approx \ln 4 - \ln(1 - x)/2$, окончательно записываем выражение для асимптотики нулевой моды

$$p_0(r, \varphi, x) \approx -\frac{q\sqrt{\tau}}{\pi\sqrt{1+\tau}\sqrt{2r}r_0\varphi_r} \left(\ln 4 - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1-\tau}{1+\tau} \right) \right). \quad (26)$$

Результаты расчетов нулевой моды для тех же исходных данных приведены на рис. 1, д, е: срезка по переменной y (см. рис. 1, д), срезка по переменной x (см. рис. 1, е). Отметим, что полное совпадение точного и асимптотического решений имеет место в окрестности источника возмущений и существует некоторое различие вдали от него. Это связано с тем, что асимптотика эллиптического интеграла хорошо работает при стремлении аргумента к единице. Тем не менее в дальней зоне асимптотика качественно верно описывает точное решение, с погрешностью, не превышающей нескольких процентов.

Полное волновое поле. Полученные выше асимптотические представления решений для отдельных волновых мод, включая нулевую, дают возможность перейти к вычислению полного поля внутренних гравитационных волн в клине. Результат суммирования 13 мод (включая нулевую) представлен на рис. 2, срезка по переменной $y, x = 40$ м, $z = -40$ м. Сумма асимптотик (24) бесконечного числа волновых мод ($n = 1, 2, \dots$) выражается через полулогарифмическую

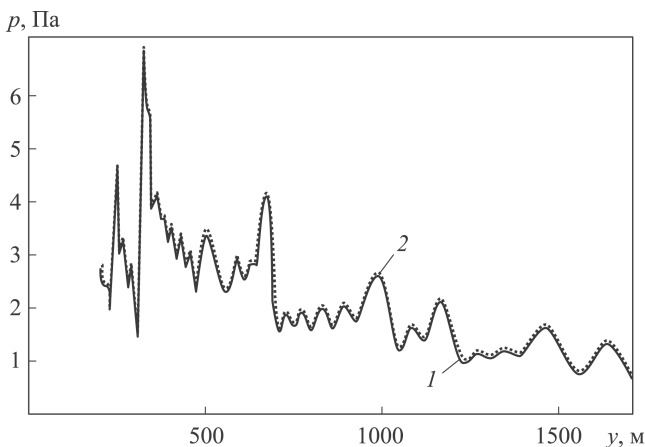


Рис. 2. Результат суммирования 13 волновых мод:
1 — точное решение; 2 — ВКБ-асимптотика

функцию индекса $3/2$:

$$Li_{1/2}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n}};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n(r, \varphi, x) = -\frac{q\sqrt{\tau} \exp(-i\pi/4)}{8\pi\sqrt{1-\tau^2}\sqrt{rr_0}\varphi_r} \times \\ \times (Li_{1/2}(B_+^+) + Li_{1/2}(B_-^+) + Li_{1/2}(B_+^-) + Li_{1/2}(B_-^-)); \quad (27)$$

$$B_{\pm}^{\pm} = \exp(i\pi(\pm\varphi \pm \varphi_0 + A(\tau))/\varphi_r);$$

$$A(\tau) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sqrt{1 - \tau^2}}{1 + \sqrt{1 - \tau^2}}.$$

Тогда полное волновое поле — это действительная часть выражения (27) и нулевой моды (25). Полулогарифмическая функция в (27) обращается в бесконечность в точках, где выполнено условие

$$\pi(\pm\varphi \pm \varphi_0 + A(\tau))/\varphi_r = 2\pi m, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (28)$$

Геометрическое место точек (x, y, z) , удовлетворяющих (28), определяет систему лучей при фиксированной одной переменной. В плоскостях (y, z) и (x, z) решения (28) определяют пару восходящих от источника лучей и пару нисходящих лучей с последующим их отражением от наклонного дна. Теневая картина полного волнового поля (линии уровня) в плоскости (y, z) при $x = 40$ м, остальные параметры такие же, как и в предыдущих расчетах, в частности $c = 0,44$, изображена на рис. 3, а. Согласно представленным результатам, отчетливо видна лучевая структура построенных решений, в частности, совокупность падающих и отраженных лучей. Кроме того, котангенс

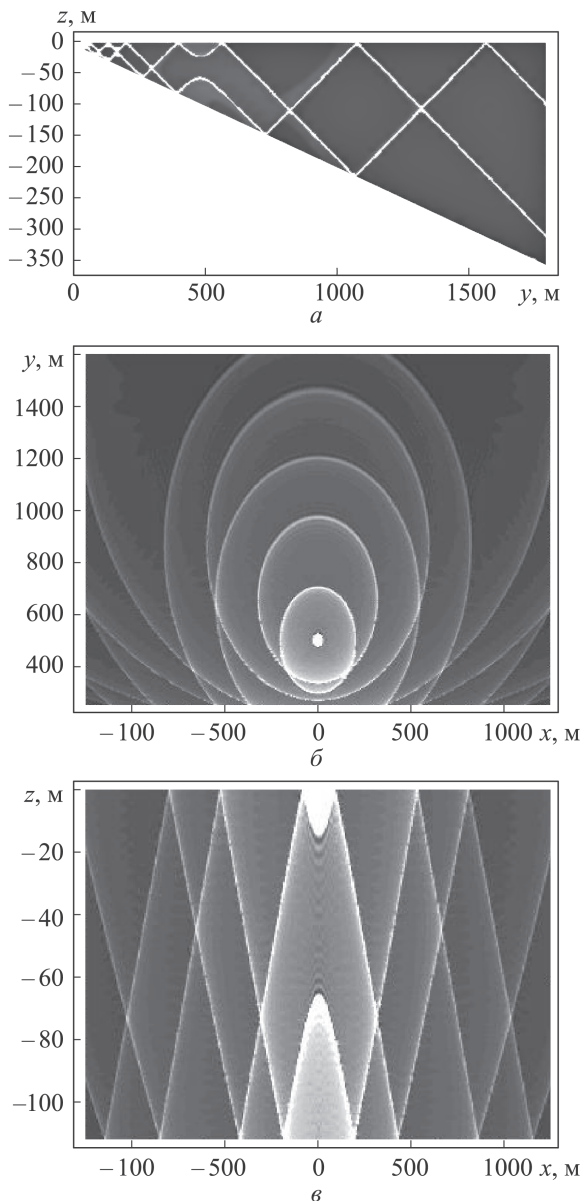


Рис. 3. Полное волновое поле в плоскостях (y, z) (а), (x, y) (б) и (x, z) (в) (сумма ВКБ-асимптотик)

угла наклона лучей к вертикали равен примерно 0,44 в полном соответствии с лучевой теорией.

Действительно, в соответствии с этой теорией направление групповой скорости Θ , а следовательно, и направление распространения энергии определяется из равенства: $\text{ctg}^2 \Theta = c^2 = \omega^2 / (N^2 - \omega^2)^2$. Сингулярность решения на лучах обусловлена использованной моделью идеальной среды. Основной вклад в сингулярность дает бесконечное число коротковолновых мод с большими номерами. В реальности для

получения полного волнового поля необходимо учитывать конечное число мод, и это число приближенно определяется характерным масштабом Стокса $D = \sqrt{2\nu_0/N}$, где ν_0 — кинематическая вязкость; N — частота Брента–Вяйсяля. Очевидно, что волновые моды с большими номерами, длина волны которых меньше масштаба D , вклада в решение не дают. Теневая картина суммы 50 волновых мод в плоскости (x, y) при $z = -50$ м представлена на рис. 3, б. Можно видеть картину отражения линий постоянной фазы $2\pi k, k = 1, 2, \dots$, от линии дна $z = -50$ м, $y = -z/\gamma = 250$ м. Теневая картина суммы 50 волновых мод в плоскости (x, z) при $y = 560$ м приведена на рис. 3, в.

Результаты численного моделирования полной системы уравнений гидродинамики, описывающей эволюцию нелинейных волновых возмущений над неровным океаническим дном (Бискайский залив, суммировалось более 60 волновых мод) [16–18] представлены на рис. 4. Четко идентифицируется лучевая структура решения (см. рис. 3), и, как показывают оценки, амплитудно-фазовая структура волновых полей достаточно хорошо описывается полученными асимптотическими формулами (27).

Результаты натурных измерений амплитудной и фазовых структур приливных внутренних гравитационных волн на шельфе Бискайского залива Мирового океана [16–18] приведены на рис. 5. Натурные данные также показывают, что полученные волновые картины с ярко выраженной лучевой структурой могут наблюдаться в условиях реального океана, особенно при исследовании эволюции пакетов внутренних гравитационных волн над неровным дном. В частности, аналитические, численные и натурные данные свидетельствуют о том, что ширина волновых пучков уменьшается при приближении к берегу. Формально, в линейной постановке, ширина отраженного пучка внутренних волн может стать сколь угодно малой при соответствующих соотношениях параметров среды (стратификация, угол наклона дна), т.е. происходит существенная локальная интенсификация волн вблизи берега. Однако в реальных природных стратифицированных средах (океан, атмосфера) энергия волнового поля остается в таких пространственных областях конечной — включаются нелинейные механизмы диссипации и турбулентного перемешивания [1–3, 16].

ВКБ-асимптотики гипергеометрической функции. Гипергеометрическая функция $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ удовлетворяет уравнению [14, 15]

$$z(1-z)\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)z)\frac{\partial F}{\partial z} + \alpha\beta F = 0, \quad (29)$$

где $\alpha = \frac{i\mu_n + 1/2}{2}$; $\beta = \frac{i\mu_n + 3/2}{2}$; $\gamma = i\mu_n + 1$; далее индекс “ n ” у

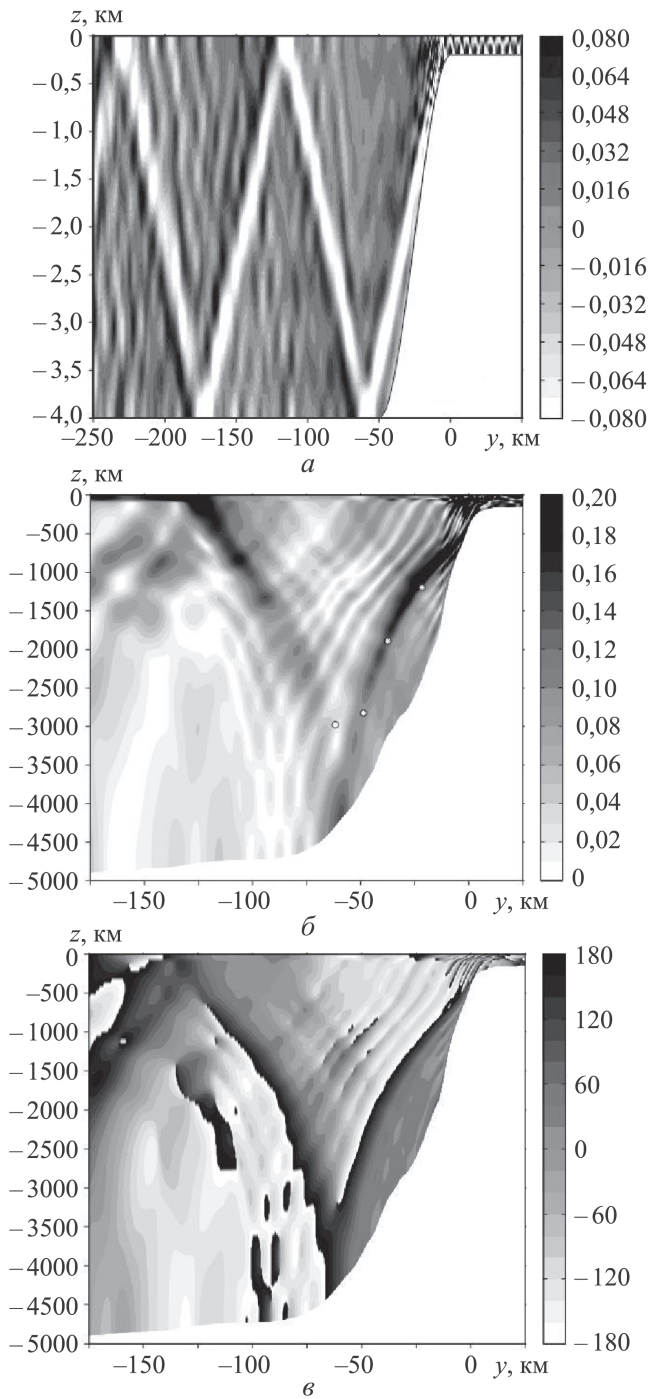


Рис. 4. Численное моделирование волновой динамики, м/с, стратифицированной среды над неровным дном (а), амплитуда вектора скорости, м/с, (б) и фаза вектора скорости, град, (в) внутренних приливных волн на шельфе Бискайского залива

величины μ_n опускается. Перепишем (29) как

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + a(z) \frac{\partial F}{\partial z} + b(z)F = 0; \quad (30)$$

$$a(z) = \frac{\gamma - (\gamma + 1)z}{z(1 - z)}; \quad b(z) = -\frac{\alpha\beta}{z(1 - z)}$$

и рассмотрим область $z > 1$. Решение (30) будем искать в виде $F(z) = R(z)U(z)$, где $R(z) = \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^z a(u)du\right) = z^{-(1+i\mu)/2}/\sqrt{z-1}$.

Тогда для определения функции $U(z)$ получаем следующее уравнение:

$$\frac{d^2 U}{dz^2} + \frac{3z^2 - 3z + 4 + 4\mu^2(1 - z)}{16(1 - z)^2 z^2} U = 0. \quad (31)$$

При больших значениях μ уравнение (31) упрощается

$$\frac{d^2 U}{dz^2} + \mu^2 b_1(z)U = 0; \quad b_1(z) = \frac{1}{4z^2(z - 1)}. \quad (32)$$

ВКБ-асимптотика уравнения (32) строится стандартным образом, в результате имеем [13]

$$U(z) = \frac{B}{\sqrt[4]{b_1(z)}} \exp\left(\mu \int_0^z \sqrt{b_1(u)} du\right) \left(1 + O\left(\frac{1}{\mu}\right)\right). \quad (33)$$

Откуда $U(z) = B\sqrt{2z}\sqrt[4]{z-1} \exp(\mu \arctg \sqrt{z-1})$ и с учетом выражения для $R(z)$ получим

$$F(z) = \frac{B\sqrt{2}}{\sqrt[4]{z-1}} \exp(-i\mu \ln z/2) \exp(\mu \arctg \sqrt{z-1}).$$

Для нахождения значения нормировочного коэффициента B рассмотрим асимптотику гипергеометрической функции при $z \rightarrow \infty$, имеющую вид [14, 15]

$$F(z) = \frac{\Gamma(i\mu + 1)\Gamma(1/2)}{(\Gamma(i\mu/2 + 3/4))^2} (-z)^{-1/4 - i\mu/2} + O(z^{-3/4}). \quad (34)$$

Заменяя гамма-функцию ее асимптотикой при больших значениях параметра μ , представим (34) как

$$F(z) = 2^{i\mu} \exp\left(-\frac{i\pi}{4}\right) \exp\left(\frac{\pi\mu}{2}\right) z^{-1/4} \exp\left(-i\mu \ln \frac{z}{2}\right). \quad (35)$$

Сравнивая выражения (34) и (35), находим $B = 2^{i\mu} \exp(-i\pi/4)/\sqrt{2}$. Окончательно, при $z > 1$ ВКБ-асимптотика гипергеометрической

функции имеет вид

$$F(z) = \frac{2^{i\mu}}{\sqrt[4]{z-1}} \exp\left(-i\frac{\mu}{2} \ln z\right) \exp(\mu \operatorname{arctg} \sqrt{z-1}) \left(1 + O\left(\frac{1}{\mu}\right)\right). \quad (36)$$

Тогда аналитически продолжив выражение (36) на область $0 \leq z < 1$, можно получить

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt[4]{1-z}} \exp\left(-i\frac{\mu}{2} \left(\ln \frac{z}{4} + \ln \frac{1 + \sqrt{1-z}}{1 - \sqrt{1-z}}\right)\right) \left(1 + O\left(\frac{1}{\mu}\right)\right). \quad (37)$$

Асимптотика (37) является неравномерной при $z \rightarrow 1$, так как гипергеометрическая функция при $z \rightarrow 1$ ведет себя как $\ln(1-z)$, в то время как асимптотика (37) при $z \rightarrow 1$ стремится к $\text{const}/\sqrt[4]{1-z}$. Однако, при значениях z не очень близких к единице, она хорошо приближает гипергеометрическую функцию $F\left(\frac{1}{4} + \frac{i\mu}{2}, \frac{3}{4} + \frac{i\mu}{2}, 1 + i\mu, z\right)$. Гипергеометрическая функция и ее ВКБ-асимптотика при $\mu = 8$ приведена на рис. 5, а, гипергеометрическая функция и ее ВКБ-асимптотика при $z = 0,9$ — на рис. 5, б. Очевидно, что при увеличении значения μ и соответственно уменьшении значения z ВКБ-асимптотика все более точно описывает поведение гипергеометрической функции.

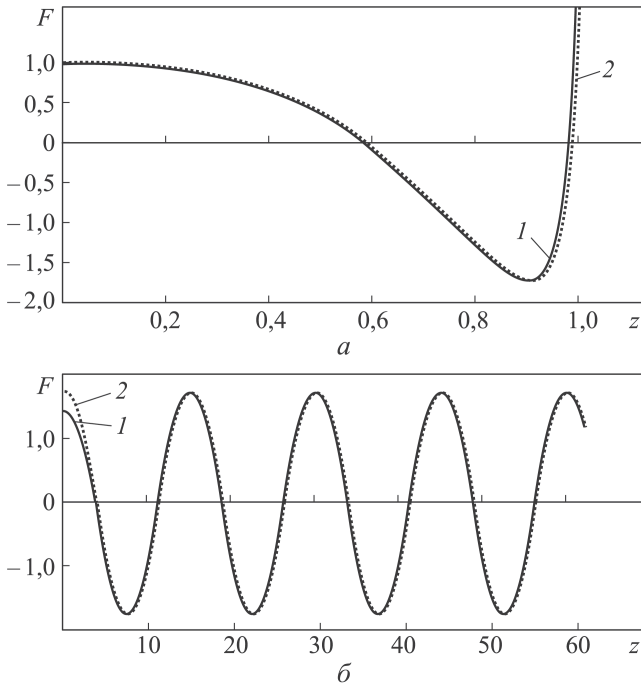


Рис. 5. Гипергеометрическая функция (1) и ВКБ-асимптотика (2) при $\mu = 8$ (а) и $z = 0,9$ (б)

Заключение. В качестве основных результатов, полученных в настоящей работе, следует отметить следующие. Во-первых, все построенные с использованием преобразования Канторовича – Лебедева решения являются точными. Во-вторых, характерные лучевые картины волновых полей внутренних гравитационных волн в клиновидной области стратифицированной среды получены без использования математического аппарата геометрической оптики.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 14-01-00466, № 15-05-00030).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Pedlosky J.* Waves in the ocean and atmosphere: introduction to wave dynamics. Berlin–Heidelberg: Springer, 2010. 260 p.
2. *Булатов В.В., Владимиров Ю.В.* Динамика негармонических волновых пакетов в стратифицированных средах. М.: Наука, 2010. 470 с.
3. *Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V.* Wave dynamics of stratified mediums. М.: Наука, 2012. 584 с.
4. *Belov V.V., Dobrokhotov S.Yu., Tudorovskiy T.Ya.* Operator separation for adiabatic problems in quantum and wave mechanics // Journal of Engineering Mathematics. 2006. Vol. 55. P. 183–237.
5. *Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V.* Far fields of internal gravity waves in stratified media of variable depth // Russian Journal of Mathematical Physics. 2010. Vol. 17. № 4. P. 400–412.
6. *Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V.* Wave dynamics of stratified mediums with variable depth: exact solutions and asymptotic representations // IUTAM Procedia. 2013. Vol. 8. P. 229–237.
7. *Dobrokhotov S.Yu., Lozhnikov D.A., Vargas C.A.* Asymptotics of waves on the shallow water generated by spatially-localized sources and trapped by underwater ridges // Russian Journal of Mathematical Physics. 2013. Vol. 20. P. 11–24.
8. *Yang-Yih Chen, Chen G.Y., Chia-Hao Lin, Chiu-Long Chou.* Progressive waves in real fluids over a rigid permeable bottom // Coastal Engineering Journal. 2010. Vol. 52 (1). P. 17–42.
9. *Hsu M.K., Liu A.K., Liu C.* A study of internal waves in the China Seas and Yellow Sea using SAR // Continental Shelf Research. 2000. Vol. 20. P. 389–410.
10. *Grue J., Jensen A.* Orbital velocity and breaking in steep random gravity waves // Journal of Geophysical Research. 2012. Vol. 117. P. C07–C013.
11. *Булатов В.В., Владимиров Ю.В.* Дальние поля внутренних гравитационных волн в неоднородных и нестационарных стратифицированных средах // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2013. Т. 6. № 2. С. 55–70.
12. *Владимиров Ю.В.* Точное решение для стоячих монохроматических внутренних волн в клине // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2012. № 5. С. 73–79.
13. *White R.B.* Asymptotic analysis of differential equations. London: Imperial College Press, 2005.
14. *Abramowitz M., Stegun I.A.* Handbook of mathematical functions (Reprint of the 1972 ed.). N.Y.: Dover Publications Inc., 1992.
15. *Watson G.N.* A treatise on the theory of Bessel functions (Reprint of the 2nd ed.). Cambridge: Cambridge University Press, 1995.
16. *Abdilghanie A.M., Diamessis P.J.* The internal gravity wave field emitted by a stably stratified turbulent wake // Journal of Fluid Mechanics. 2013. Vol. 720. P. 104–139.

17. Mauge R., Gerkema T. Generation of weakly nonlinear nonhydrostatic internal tides over large topography: a multi-modal approach // *Nonlinear Processes Geophysics*. 2008. Vol. 15. P. 233–244.
18. Rees T., Lamb K.G., Poulin F.J. Asymptotic analysis of the forces internal gravity waves equation // *SIAM Journal of Applied Mathematics*. 2012. Vol. 72 (4). P. 1041–1060.

REFERENCES

- [1] Pedlosky J. *Waves in the ocean and atmosphere: introduction to wave dynamics*. Berlin–Heidelberg: Springer, 2010. 260 p.
- [2] Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. *Dinamika negarmonicheskikh volnovykh paketov v stratifitsirovannykh sredakh* [Dynamics of Non-Harmonic Wave Packets in Stratified Media]. Moscow, Nauka Publ., 2010. 470 p.
- [3] Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. *Wave dynamics of stratified mediums*. Moscow, Nauka Publ., 2012. 584 p.
- [4] Belov V.V., Dobrokhotov S.Yu., Tudorovskiy T.Ya. Operator separation for adiabatic problems in quantum and wave mechanics. *J. Eng. Math.*, 2006, vol. 55, pp. 183–237.
- [5] Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Far fields of internal gravity waves in stratified media of variable depth. *Russ. J. Math. Phys.*, 2010, vol. 17, no. 4, pp. 400–412.
- [6] Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Wave dynamics of stratified mediums with variable depth: exact solutions and asymptotic representations. *IUTAM Procedia*, 2013, vol. 8, pp. 229–237.
- [7] Dobrokhotov S.Yu., Lozhnikov D.A., Vargas C.A. Asymptotics of waves on the shallow water generated by spatially-localized sources and trapped by underwater ridges. *Russ. J. Mat. Phys.*, 2013, vol. 20, pp. 11–24.
- [8] Yang-Yih Chen, Chen G.Y., Chia-Hao Lin, Chiu-Long Chou. Progressive waves in real fluids over a rigid permeable bottom. *Coastal Engineering Journal.*, 2010, vol. 52 (1), pp. 17–42.
- [9] Hsu M.K., Liu A.K., Liu C. A study of internal waves in the China Seas and Yellow Sea using SAR. *Continental Shelf Research*, 2000, vol. 20, pp. 389–410.
- [10] Grue J., Jensen A. Orbital velocity and breaking in steep random gravity waves. *J. of Geophysical Research*, 2012, vol. 117, pp. C07–C013.
- [11] Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. The Far-Field of Internal Gravity Waves in Inhomogeneous and Nonstationary Stratified Media. *Fundam. Prikl. Gidrofiz.*, 2013, vol. 6, no. 2, pp. 55–70 (in Russ.).
- [12] Vladimirov Yu.V. Explicit Solution for Monochromatic Standing Internal Waves in the Wedge. *Izvestiya RAN. Fluid Mechanics*, 2012, no. 5, pp. 73–79 (in Russ.).
- [13] White R.B. *Asymptotic analysis of differential equations*. London: Imperial College Press, 2005.
- [14] Abramowitz M., Stegun I.A. *Handbook of mathematical functions* (Reprint of the 1972 ed.). N.Y., Dover Publications Inc., 1992.
- [15] Watson G.N. *A treatise on the theory of Bessel functions* (Reprint of the 2nd ed.). Cambridge, Cambridge University Press, 1995.
- [16] Abdilghanie A.M., Diamessis P.J. The internal gravity wave field emitted by a stably stratified turbulent wake. *Journal of Fluid Mechanics*, 2013, vol. 720, pp. 104–139.
- [17] Mauge R., Gerkema T. Generation of weakly nonlinear nonhydrostatic internal tides over large topography: a multi-modal approach. *Nonlinear Processes Geophysics*, 2008, vol. 15, pp. 233–244.
- [18] Rees T., Lamb K.G., Poulin F.J. Asymptotic analysis of the forces internal gravity waves equation. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2012, vol. 72 (4), pp. 1041–1060.

Статья поступила в редакцию 25.06.2014

Булатов Виталий Васильевич — д-р физ.-мат. наук, д-р экон. наук, профессор, старший научный сотрудник ИПМех РАН им. А.Ю. Ишлинского. Автор более 250 научных работ, в том числе 15 монографий, в области математического моделирования, гидрофизики, волновой динамики, экономической теории.

Институт проблем механики РАН им. А.Ю. Ишлинского (ИПМех РАН), Российская Федерация, 119526, Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1.

Bulatov V.V. — Dr. Sci. (Phys.-Math.), Dr. Sci. (Econ.), professor, senior researcher of the A.Yu. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences. Author of more than 250 publications, including 15 monographs, in the field of mathematical simulation, hydrophysics, wave dynamics, economic.

A.Yu. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, pr-t Vernadskogo 101-1, Moscow, 119526 Russian Federation.

Владимиров Юрий Владимирович — канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник ИПМех РАН им. А.Ю. Ишлинского. Автор более 100 научных работ, в том числе пяти монографий, в области математического моделирования, гидрофизики, волновой динамики, прикладной математики.

Институт проблем механики РАН им. А.Ю. Ишлинского (ИПМех РАН), Российская Федерация, 119526, Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1.

Vladimirov Yu.V. — Cand. Sci. (Phys.-Math.), senior researcher of the A.Yu. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences. Author of more than 100 publications, including 5 monographs, in the field of mathematical simulation, hydrophysics, wave dynamics, applied mathematics.

A.Yu. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, pr-t Vernadskogo 101-1, Moscow, 119526 Russian Federation.

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Волновая динамика стратифицированных сред переменной глубины // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2015. № 3. С. 58–76.

Please cite this article in English as:

Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Wave dynamics in stratified media of non-uniform depth. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Bauman, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2015, no. 3, pp. 58–76.