

# ТЕПЛОФИЗИКА И ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ТЕПЛОТЕХНИКА

УДК 536.2

## ОЦЕНКА МЕТОДОМ САМОСОГЛАСОВАНИЯ ЭФФЕКТИВНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ТРАНСВЕРСАЛЬНО ИЗОТРОПНОГО КОМПОЗИТА С ИЗОТРОПНЫМИ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

**В.С. Зарубин, Г.Н. Кувыркин, И.Ю. Савельева**

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация  
e-mail: fn2@bmstu.ru

*Оценка компонент тензора эффективной теплопроводности transversально изотропного композита с изотропными включениями в форме эллипсоидов вращения проведена методом самосогласования. Для реализации этого метода построена математическая модель теплового взаимодействия включения с однородной средой, имеющей искомые компоненты указанного тензора. Выполнен количественный анализ полученных расчетных зависимостей, которые могут быть использованы для прогноза эффективных коэффициентов теплопроводности композита с эллипсоидальными включениями.*

**Ключевые слова:** метод самосогласования, композит, эллипсоидальные включения, тензор эффективной теплопроводности.

## THE SELF-CONSISTENT SCHEME ESTIMATION OF EFFECTIVE THERMAL CONDUCTIVITY FOR THE TRANSVERSALLY ISOTROPIC COMPOSITE WITH ISOTROPIC ELLIPSOIDAL INCLUSIONS

**V.S. Zarubin, G.N. Kuvyrkyn, I.Yu. Savel'eva**

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation  
e-mail: fn2@bmstu.ru

*The article presents the estimation of effective thermal conductivity tensor components for the transversally isotropic composite with isotropic ellipsoidal inclusions. The estimation is performed by using the self-consistent method. For its implementation a mathematical model of the thermal interaction between an inclusion and a homogeneous medium is developed. The quantitative analysis of the obtained calculation correlations is performed. They are supposed to be used for estimating effective conductivity coefficients of a composite with ellipsoidal inclusions.*

**Keywords:** self-consistent scheme, composite, ellipsoidal inclusions, effective thermal conductivity tensor.

**Введение.** Существует несколько методов оценки эффективных характеристик материалов с неоднородной структурой по данным о свойствах, форме и объемной концентрации составляющих такие материалы элементов. Один из методов получил название метода самосогласования [1, 2]. Его особенность заключается в построении математической модели и решении соответствующей задачи взаимодействия элементов структуры неоднородного материала с однородной средой,

имеющей искомые эффективные характеристики [3, 4]. Результатом решения этой задачи в зависимости от ее конкретного содержания являются возмущения в отдельных элементах структуры температурного, электрического, магнитного полей или распределений механических напряжений и деформации по отношению к невозмущенным полям, либо распределениям соответствующих параметров в однородной среде. Последующее приравнивание нулю осредненных по объему материала возмущений позволяет получить расчетные зависимости для искомым эффективным характеристик рассматриваемого неоднородного материала.

Метод самосогласования дает приемлемые по точности результаты применительно к поликристаллическим материалам с анизотропными кристаллическими зёрнами [5, 6], также он был применен при оценке упругих характеристик как поликристаллов [4], так и композитов [1, 2, 4]. В последнее время повышенное внимание к этому методу связано с исследованием свойств метаматериалов [7] и электродинамических характеристик композитов, армированных наночастицами [8]. Во многих работах, использующих метод самосогласования при исследовании свойств композитов, принимают шаровую форму включений [9] и в случае анизотропных включений предполагают их хаотическую ориентацию в композите, что приводит к изотропии его характеристик. Отклонение формы включений от шаровой при их хаотической ориентации сохраняет изотропию композита [4]. Нешаровую форму включений в большинстве случаев с достаточной для инженерной практики точностью можно моделировать с помощью эллипсоида вращения, что позволяет при решении задачи взаимодействия включения с изотропной однородной средой использовать известные геометрические коэффициенты для эллипсоида [10, 11] и тензор Эшелби [3]. Однако при образовании в композите текстуры он становится анизотропным и возникает проблема корректировки этих геометрических коэффициентов путем решения вспомогательной задачи. Например, при форме включений в виде эллипсоидов вращения, оси вращения которых расположены в композите параллельно, он будет трансверсально изотропным относительно направления расположения этих осей [12].

В настоящей работе изложена постановка вспомогательной задачи о тепловом взаимодействии изотропного включения, имеющего форму эллипсоида вращения, с трансверсально изотропной средой. Преобразованием уравнения, описывающего установившееся распределение температуры в такой среде, удастся избежать решения этой задачи в полной постановке и использовать известные геометрические коэффициенты для оценки методом самосогласования компонент тензора эффективной теплопроводности композита с указанными включениями.

**Постановка вспомогательной задачи.** В работах [12, 13] построены оценки компонент тензора теплопроводности композита с изотропными включениями в виде эллипсоидов вращения (удлиненных эллипсоидов и сфероидов) на основе математической модели теплового взаимодействия включения с изотропной матрицей, коэффициент теплопроводности  $\lambda_m$  которой задан. При этом использованы известные геометрические коэффициенты [10, 11]

$$D_\alpha = \frac{b_1 b_2 b_3}{2} \int_0^\infty \frac{du}{(b_\alpha^2 + u)f(u)}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (1)$$

где  $b_\alpha$  — полуоси эллипсоида;  $f(u) = \sqrt{(b_1^2 + u)(b_2^2 + u)(b_3^2 + u)}$ . Полученные оценки явились частными случаями по отношению к композиту с изотропными включениями в виде произвольных трехосных эллипсоидов [14]. Для такого композита главные оси тензора эффективной теплопроводности совпадают по направлению с осями эллипсоида, а главные значения  $\lambda_\alpha^*$  этого тензора можно представить в виде

$$\tilde{\lambda}_\alpha = \frac{\lambda_\alpha^*}{\lambda_m} = \frac{1 + (\bar{\lambda} - 1)(D_\alpha + (1 - D_\alpha)C_V)}{1 + (\bar{\lambda} - 1)D_\alpha(1 - C_V)}, \quad (2)$$

где  $\bar{\lambda} = \lambda/\lambda_m$ ,  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности включения.

Для применения метода самосогласования необходимо использовать математическую модель теплового взаимодействия включения с однородной внешней средой, компоненты тензора эффективной теплопроводности которой подлежат определению. В случае анизотропной внешней среды геометрические коэффициенты (1) будут зависеть не только от соотношения полуосей эллипсоидального включения, но и от искомых компонент тензора эффективной теплопроводности этой среды.

При одинаково ориентированных включениях, имеющих форму эллипсоидов вращения, однородная внешняя среда является трансверсально изотропной [12, 13]. Если начало прямоугольной декартовой системы координат  $O\xi_1\xi_2\xi_3$  совместить с центром отдельно взятого включения, а ось его вращения направить по координатной оси  $O\xi_3$ , то для такой среды тензор эффективной теплопроводности определяется двумя главными значениями  $\lambda_1^* = \lambda_2^*$  и  $\lambda_3^*$ . При этом расположение ортогональных осей  $O\xi_1$  и  $O\xi_2$  может быть произвольным.

Установившееся распределение температуры  $T^*(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  в однородной среде, трансверсально изотропной относительно координатной оси  $O\xi_3$ , должно удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\lambda_1^* \left( \frac{\partial^2 T^*}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial \xi_2^2} \right) + \lambda_3^* \frac{\partial^2 T^*}{\partial \xi_3^2} = 0. \quad (3)$$

В изотропном эллипсоидальном включении с полуосями  $b_1 = b_2$  и  $b_3$  установившееся распределение температуры  $T(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \xi_3^2} = 0. \quad (4)$$

Если изотропный эллипсоид вращения поместить в неограниченную область, заполненную трансверсально изотропной однородной средой, то указанные распределения температур при заданных условиях на бесконечности должны удовлетворять не только уравнениям (3) и (4), но и условиям непрерывности температуры и нормальной составляющей плотности теплового потока во всех точках поверхности эллипсоида:

$$T^* = T, \quad n_1 \left( \lambda_1 \frac{\partial T^*}{\partial \xi_1} - \lambda \frac{\partial T}{\partial \xi_1} \right) + \\ + n_2 \left( \lambda_1 \frac{\partial T^*}{\partial \xi_2} - \lambda \frac{\partial T}{\partial \xi_2} \right) + n_3 \left( \lambda_3 \frac{\partial T^*}{\partial \xi_3} - \lambda \frac{\partial T}{\partial \xi_3} \right) = 0,$$

где  $n_\alpha$  — направляющие косинусы вектора нормали к поверхности эллипсоида. Решение такой достаточно сложной задачи позволит определить необходимое для использования метода самосогласования возмущение температурного поля в эллипсоиде. Степень сложности этой задачи можно оценить по подробному изложению решения в эллипсоидальных координатах более простой задачи определения возмущения поля электрического потенциала в изотропном эллипсоиде из диэлектрика, помещенном в неограниченную изотропную среду [10]. Можно избежать решения задачи в полной постановке и использовать геометрические коэффициенты (1), если преобразовать уравнение (3) к виду, соответствующему уравнению Лапласа и описывающему установившееся распределение температуры в однородной изотропной среде.

**Вывод основных соотношений.** Сначала преобразуем уравнение (3) к виду

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial \zeta^2} = 0, \quad (5)$$

где  $\zeta = \xi_3 \sqrt{\lambda_1^*/\lambda_3^*}$ . Уравнение (5) описывает распределение температуры в однородной изотропной среде с коэффициентом теплопроводности  $\lambda_1^* = \lambda_2^*$ . Такое преобразование равносильно изменению масштаба в направлении координатной оси  $O\xi_3$  в  $\sqrt{\lambda_1^*/\lambda_3^*}$  раз, что приведет и к изменению длины полуоси  $b_3$  эллипсоида вращения, которая теперь примет значение  $b'_3 = b_3 \sqrt{\lambda_1^*/\lambda_3^*}$ . В работе [8] преобразованный эллипсоид предложено называть приведенным.

Для приведенного эллипсоида вращения геометрический коэффициент (1) при  $\alpha = 1$  можно представить как

$$D'_1 = \frac{\bar{b}_*}{2} \int_0^\infty \frac{dv}{(1+v)^2 \sqrt{b_*^2 + v}}. \quad (6)$$

Здесь  $\bar{b}_* = b'_3/b_1 = (b_3/b_1) \sqrt{\lambda_1^*/\lambda_3^*}$ . Из общего для геометрических коэффициентов равенства  $D'_1 + D'_2 + D'_3 = 1$  в рассматриваемом случае при  $D'_1 = D'_2$  получим

$$D'_3 = 1 - 2D'_1.$$

Пусть на весьма большом расстоянии от центра включения по сравнению с длиной наибольшей полуоси приведенного эллипсоида задано невозмущенное температурное поле, имеющее единственную составляющую градиента вдоль оси  $O\xi_1$ , равную  $G_1$ . Тогда в изотропном приведенном эллипсоиде с коэффициентом теплопроводности  $\lambda$  возникнет одномерное температурное поле [11, 14]

$$T(\xi_1) = \frac{\lambda_1^* G_1 \xi_1}{\lambda_1^* + (\lambda - \lambda_1^*) D'_1}$$

с единственной составляющей градиента вдоль оси  $O\xi_1$

$$G'_1 = \frac{\lambda_1^* G_1}{\lambda_1^* + (\lambda - \lambda_1^*) D'_1}.$$

Тогда для возмущения температурного поля в эллипсоиде по отношению к невозмущенному температурному полю  $T_\infty^*(\xi_1) = G_1 \xi_1$  в однородной среде единственная составляющая градиента вдоль оси  $O\xi_1$  будет равна

$$\Delta G_1 = G_1 - G'_1 = G_1 D'_1 \frac{\lambda_1^* - \lambda}{\lambda_1^* + (\lambda - \lambda_1^*) D'_1}. \quad (7)$$

Форму частиц матрицы композита допускается выбирать произвольной при условии, что характерный размер частиц изменяется от некоторого конечного до бесконечно малого (это позволяет заполнить в объеме, занимаемом композитом, все возможные промежутки между включениями). Примем, что с учетом изменения масштаба по оси  $O\xi_3$  форма частиц матрицы является шаровой, геометрический коэффициент которой  $D_\alpha^\circ = 1/3$ . Тогда при задании в однородной изотропной среде невозмущенного температурного поля  $T_\infty^*(\xi_1) = G_1 \xi_1$  в шаровой частице матрицы с коэффициентом теплопроводности  $\lambda_m$  возникнет возмущение температурного поля с единственной составляющей градиента вдоль оси  $O\xi_1$ , равной

$$\Delta G_1^\circ = G_1 \frac{\lambda_1^* - \lambda^\circ}{2\lambda_1^* + \lambda^\circ}. \quad (8)$$

Согласно методу самосогласования, необходимо осредненные по объему композита составляющие градиента температурного поля, определяемые по формулам (7) и (8), приравнять нулю, т.е.  $\Delta G_1 C_V + \Delta G_1^o(1 - C_V) = 0$ , где  $C_V$  – объемная концентрация включений в композите. Отсюда при обозначении  $\bar{\lambda} = \lambda/\lambda_m$  следует квадратное уравнение

$$(1 - D'_1 - (1 - 3D'_1)C_V)\Lambda_1^2 - (1 - D'_1(1 + \bar{\lambda}) - (1 - 3D'_1\bar{\lambda})C_V)\Lambda_1 - D'_1\bar{\lambda} = 0 \quad (9)$$

относительно  $\Lambda_1 = \lambda_1^*/\lambda_m$ . Отметим, что уравнение (9) получено для включений в форме приведенного эллипсоида и для его использования применительно к исходной форме включений необходимо найти аналогичное уравнение для отношения  $\Lambda_3 = \lambda_3^*/\lambda_m$ .

Уравнение (3) можно преобразовать не только к виду (5), но и к виду

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial \eta_1^2} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial \eta_2^2} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial \xi_3^2} = 0, \quad (10)$$

где  $\eta_1 = \xi_1 \sqrt{\lambda_3^*/\lambda_1^*}$ ;  $\eta_2 = \xi_2 \sqrt{\lambda_3^*/\lambda_1^*}$ . Уравнение (10) описывает распределение температуры в однородной изотропной среде с коэффициентом теплопроводности  $\lambda_3^*$ . Такое преобразование равносильно изменению масштаба в направлении координатных осей  $O\xi_1$  и  $\xi_2$  в  $\sqrt{\lambda_3^*/\lambda_1^*}$  раз. Это приведет к изменению длины полуосей  $b_1 = b_2$  исходного эллипсоида вращения, которые теперь примут значение  $b'_1 = b_1 \sqrt{\lambda_3^*/\lambda_1^*}$ . При этом отношение  $\bar{b}_* = b_3/b'_1 = (b_3/b_1) \sqrt{\lambda_1^*/\lambda_3^*}$  для приведенного эллипсоида вращения не изменит своего значения. Задав в изотропной среде, описываемой уравнением (10), невозмущенное температурное поле  $T^*(\xi_3) = G_3 \xi_3$  и выполнив аналогичные проведенным выше преобразования, получим квадратное уравнение

$$(1 - D'_3 - (1 - 3D'_3)C_V)\Lambda_3^2 - (1 - D'_3(1 + \bar{\lambda}) - (1 - 3D'_3\bar{\lambda})C_V)\Lambda_3 - D'_3\bar{\lambda} = 0. \quad (11)$$

В частном случае  $\bar{b}_* = 1$ , когда приведенный эллипсоид вырождается в шар, уравнения (9) и (11) при  $D'_1 = D'_3 = 1/3$  совпадают между собой и с квадратным уравнением  $2\Lambda^2 - (2 - \bar{\lambda} - 1 + 3(\bar{\lambda} - 1)C_V)\Lambda - \bar{\lambda} = 0$ , полученным методом самосогласования в работе [9] для изотропного композита с шаровыми включениями. В этом случае  $\Lambda_1 = \Lambda_3 = \Lambda$  и отпадает необходимость рассмотрения приведенной формы включения.

При заданных значениях  $b_1 = b_2$  и  $b_3$  полуосей эллипсоида вращения, отношения  $\bar{\lambda} = \lambda/\lambda_m$  и объемной концентрации  $C_V$  включений

уравнения (9) и (11) можно решить последовательными приближениями. Для этого следует задать ожидаемое значение  $\bar{b}_*$ , вычислить из равенств (6) и (7)  $D'_1$  и  $D'_3$  и решить уравнения (9) и (11), что позволит уточнить значение  $\bar{b}_*$  и продолжить последовательные приближения. Однако при количественном анализе полученных соотношений проще решать уравнения (9) и (11) при серии заданных значений  $\bar{b}_*$ , затем по рассчитанным значениям  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_3$  находить соответствующие этой серии значения  $\bar{b} = b_3/b_1 = \bar{b}_* \sqrt{\lambda_3^*/\lambda_1^*}$ .

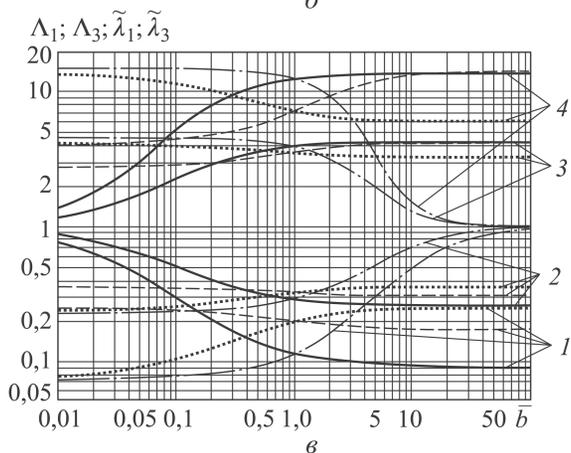
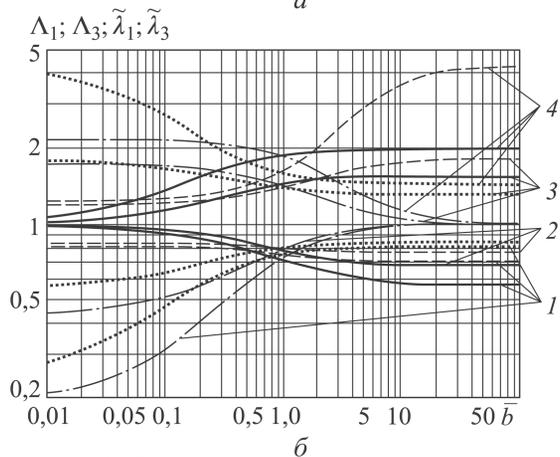
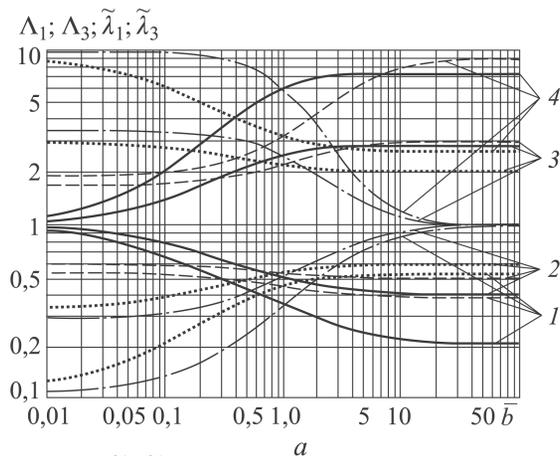
**Результаты количественного анализа.** Количественный анализ полученных соотношений проведен в достаточно широком интервале изменения параметра  $\bar{b}$ . При  $\bar{b} = 0,01$  форма эллипсоидального включения соответствует тонкому круглому диску, а при  $\bar{b} = 100$  — игольчатая.

Зависимости отношений  $\Lambda_1 = \lambda_1^*/\lambda_m$  (сплошные кривые) и  $\Lambda_3 = \lambda_3^*/\lambda_m$  (штрихпунктирные кривые) от параметра  $\bar{b} = b_3/b_1$  при объемной концентрации  $C_V = 0,5$  включений и различных значениях параметра  $\bar{\lambda} = \lambda/\lambda_m$  в логарифмических координатах представлены на части *a* рисунка. Для сравнения приведены построенные по формуле (2) зависимости  $\tilde{\lambda}_1$  и  $\tilde{\lambda}_3$  (штриховые и пунктирные кривые) от параметра  $\bar{b}$  при тех же значениях  $C_V$  и  $\bar{\lambda}$ . Для шарового включения ( $\bar{b} = 1$ )  $\Lambda_1 = \Lambda_3$  и  $\tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_3$ , что соответствует изотропному композиту, причем  $\Lambda_1 > \tilde{\lambda}_1$  для  $\bar{\lambda} > 1$  и  $\Lambda_1 < \tilde{\lambda}_1$  для  $\bar{\lambda} < 1$ . По мере отклонения значения  $\bar{b}$  от единицы разность  $|\Lambda_1 - \Lambda_3|$  возрастает. Это приводит к увеличению степени анизотропии композита. При этом разность  $|\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_3|$  тоже возрастает, но в меньшей степени.

Для дискообразной формы включений  $\Lambda_1 \rightarrow 1$  при всех рассмотренных значениях  $\bar{\lambda}$ , т.е. коэффициент теплопроводности  $\lambda_1^*$  композита в направлениях, перпендикулярных оси вращения эллипсоидальных включений, приближается к коэффициенту теплопроводности  $\lambda_m$  матрицы. И наоборот, для игольчатой формы включений к значению  $\lambda_m$  стремится коэффициент теплопроводности  $\lambda_3^*$  композита в направлении их оси вращения. Следует отметить, что во всем интервале изменения параметра  $\bar{b}$  каждое значение  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_3$  меняется в большей степени по сравнению с соответствующим ему значением  $\tilde{\lambda}_1$  или  $\tilde{\lambda}_3$ .

Зависимости, приведенные на части *б* рисунка, соответствуют значению  $C_V = 0,2$ , а на части *в* рисунка —  $C_V = 0,8$ . При уменьшении объемной концентрации включений интервал изменения значений  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_3$  убывает, а при увеличении  $C_V$  — возрастает. В остальном все закономерности, выявленные при рассмотрении зависимостей, представленных на части *a* рисунка, сохраняют силу.

**Заключение.** Приведением к уравнению Лапласа дифференциального уравнения, описывающего распределение температуры в однородной трансверсально изотропной среде, искомые характеристики



Зависимости отношений  $\Lambda_1$  (сплошные кривые),  $\Lambda_3$  (штрихпунктирные кривые),  $\tilde{\lambda}_1$  (штриховые кривые) и  $\tilde{\lambda}_3$  (пунктирные кривые) от параметра  $\bar{b}$  при  $C_V = 0,5$  (а), 0,2 (б), 0,8 (в) и значениях  $\bar{\lambda} = 0,06$  (1), 0,2 (2), 5 (3), 17 (4)

которой соответствуют характеристикам композита с эллипсоидальными включениями, удалось найти необходимые для применения метода самосогласования возмущения температурного поля в частицах матри-

цы и во включениях. Количественный анализ полученных расчетных зависимостей позволил выявить закономерности при существенном отклонении отношения полуосей эллипсоидальных включений от единицы.

*Работа выполнена по грантам НШ-1432.2014.8 и МК-6573.2015.8 программ Президента РФ поддержки ведущих научных школ и молодых кандидатов наук, проекту 1.2640.2014 в рамках реализации государственного задания и проекту 1712 в рамках реализации государственного задания Минобрнауки РФ.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Hill R. A self-consistent mechanics of composite materials // *J. Mech. Phys. Solids*. 1965. Vol. 13. No. 4. P. 213–222.
2. Паныков А.А. Методы самосогласования механики композитов. Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2008. 253 с.
3. Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций; пер. с англ. М.: ИИЛ, 1963. 248 с.
4. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 400 с.
5. Hershey A.V. The elasticity of anisotropic aggregate of anisotropic cubic crystals // *J. Appl. Mech.* 1954. Vol. 21. No. 3. P. 236.
6. Зарубин В.С. Прикладные задачи термпрочности элементов конструкций. М.: Машиностроение, 1985. 296 с.
7. Сарычев А.К., Шалаев В.М. Электродинамика метаматериалов; пер. с англ. М.: Научный мир, 2011. 224 с.
8. Апресян Л.А., Власов Д.В. О факторах деполяризации анизотропных эллипсоидов в анизотропной среде // *ЖТФ*. 2014. Т. 84. № 12. С. 23–28.
9. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Оценка эффективной теплопроводности композита с шаровыми включениями методом самосогласования // *Наука и образование: электронное научно-техническое издание*. 2013. № 9. С. 435–444. DOI: 10.7463/0913.0601512
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. В 10 т. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1992. 664 с.
11. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел; пер. с англ. М.: Наука, 1964. 488 с.
12. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Эффективные коэффициенты теплопроводности композита с включениями в виде удлинённых эллипсоидов вращения // *Тепловые процессы в технике*. 2013. Т. 5. № 6. С. 276–282.
13. Зарубин В.С., Савельева И.Ю. Эффективные коэффициенты теплопроводности композита со сфероидальными включениями // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*. 2013. № 4. С. 116–126.
14. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Эффективные коэффициенты теплопроводности композита с эллипсоидальными включениями // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*. 2012. № 3. С. 76–85.

## REFERENCES

- [1] Hill R. A self-consistent mechanics of composite materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 1965, vol. 13, no. 4, pp. 213–222.

- [2] Pan'kov A.A. Metody samosoglasovaniya mekhaniki kompozitov [Self-Consistent Methods of Composite Mechanics]. Perm', Perm. Gos. Tekhn. Univ. Publ., 2008. 253 p.
- [3] Eshelby J.D. Solid State Physics, vol. 3. N.Y., Academic Press, 1956 (Russ. ed.: Kontinual'naya teoriya dislokatsiy. Moscow, In. Lit. Publ., 1963. 248 p.).
- [4] Shermergor T.D. Teoriya uprugosti mikroneodnorodnykh sred [Theory of Microinhomogeneous Medium Elasticity]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 400 p.
- [5] Hershey A.V. The elasticity of anisotropic aggregate of anisotropic cubic crystals. *J. Appl. Mech.*, 1954, vol. 21, no. 3, pp. 236.
- [6] Zarubin V.S. Prikladnye zadachi termoprochnosti elementov konstruktsey [Applied Problems of Structural Element Thermal Strength]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1985. 296 p.
- [7] Sarychev A.K., Shalaev V.M. Electrodynamics of metamaterials. Singapore: World Scientific, 2007. 227 p.
- [8] Apresyan L.A., Vlasov D.V. Factors of Anisotropic Ellipsoid Depolarization in an Anisotropic Medium. *Zh. Tekh. Fiz.* [J. Appl. Phys], 2014, vol. 84, no. 12, pp. 23–28 (in Russ.).
- [9] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Yu. Estimation of the Effective Thermal Conductivity of the Composite with Spherical Inclusions by the Self-Consistent Method. *Jelekt. Nauchno-Tehn. Izd "Nauka i obrazovanie"* [El. Sc.-Tech. Publ. Science and Education], 2013, no. 9, pp. 435–444. DOI: 10.7463/0913.0601512
- [10] Landau L.D., Lifshits E.M. Teoreticheskaya fizika. V 10 t. T. 8. Elektrodinamika sploshnykh sred [Theoretical Physics. In 10 volumes, vol. 8. Electrodynamics of Continuum]. Moscow, Nauka Publ., 1992. 664 p.
- [11] Carslaw H.S., Jaeger J.C. Conduction of heat in solids. Oxford University Press, London, 1959.
- [12] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Yu. Effective Coefficients of Thermal Conductivity of a Composite with Prolate Spheroid Inclusions. *Teplovye protsessy v tekhnike* [Thermal Processes in Engineering], 2013, vol. 5, no. 6, pp. 276–282 (in Russ.).
- [13] Zarubin V.S., Savel'eva I.Yu. Effective Thermal Conductivity Coefficients of the Composites with Spheroidal Inclusions. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2013, no. 4, pp. 116–126 (in Russ.).
- [14] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Effective Coefficients of Thermal Conductivity of a Composite with Ellipsoidal Inclusions. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2012, no. 3, pp. 76–85 (in Russ.).

Статья поступила в редакцию 03.12.2014

Зарубин Владимир Степанович — д-р техн. наук, профессор кафедры “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 300 научных работ в области термомеханики.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Zarubin V.S. — Dr. Sci. (Eng.), professor of “Applied Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 300 publications in the field of thermal mechanics.

Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Кувыркин Георгий Николаевич — д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 200 научных работ в области прикладной математики и математического моделирования термомеханических процессов в материалах и элементах конструкций.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Kuvyrkin G.N. — Dr. Sci. (Eng.), professor, head of “Applied Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 200 publications in the field of applied mathematics and mathematical modelling of thermal and mechanical processes in materials and constructions.

Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumannskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Савельева Инга Юрьевна — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 20 научных работ в области моделирования нестационарной теплопроводности.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Savel'eva I.Yu. — Cand. Sci. (Phys.-Math.), assoc. professor of “Applied Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 20 publications in the field of non-stationary heat conduction modeling.

Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumannskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

**Пробьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Оценка методом самосогласования эффективной теплопроводности трансверсально изотропного композита с изотропными эллипсоидальными включениями // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2015. № 3. С. 99–109.

**Please cite this article in English as:**

Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Yu. The self-consistent scheme estimation of effective thermal conductivity for the transversally isotropic composite with isotropic ellipsoidal inclusion. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Bauman, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2015, no. 3, pp. 99–109.