

# ТЕПЛОФИЗИКА И ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ТЕПЛОТЕХНИКА

УДК 536.2

## ОЦЕНКА МЕТОДОМ САМОСОГЛАСОВАНИЯ ЭФФЕКТИВНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ТЕКСТУРИРОВАННОГО КОМПОЗИТА С ТРАНСВЕРСАЛЬНО ИЗОТРОПНЫМИ ЭЛЛИпсоИДАЛЬНЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

**В.С. Зарубин, Г.Н. Кувыркин, И.Ю. Савельева**

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация  
e-mail: fn2@bmstu.ru

*Для оценки компонент тензора эффективной теплопроводности представительного элемента структуры композита с трансверсально изотропными включениями, имеющими форму эллипсоидов вращения, построена математическая модель теплового взаимодействия такого включения с однородной средой. Эта модель в сочетании с методом самосогласования позволила вычислить эффективные коэффициенты теплопроводности представительного элемента, которые затем были осреднены в соответствии с заданной текстурной функцией композита. В конечном виде получены и количественно проанализированы расчетные зависимости для случая конической текстуры, в том числе с рассеянием. Эти зависимости могут быть использованы для прогноза компонент тензора эффективной теплопроводности текстурированного композита с эллипсоидальными включениями (в том числе пластинчатой и игольчатой формы, характерной для некоторых наноструктурных элементов).*

**Ключевые слова:** композит, эллипсоидальные включения, представительный элемент структуры, тензор эффективной теплопроводности, текстурная функция.

## ESTIMATION OF EFFECTIVE HEAT CONDUCTIVITY OF THE TEXTURED COMPOSITE WITH TRANSVERSE ISOTROPIC ELLIPSOIDAL INCLUSIONS BY THE SELF-COUPLING METHOD

**V.S. Zarubin, G.N. Kuvyrkin, I.Yu. Savel'eva**

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation  
e-mail: fn2@bmstu.ru

*The paper presents a mathematical model of thermal interaction between transversal isotropic inclusions of a spheroidal shape and a homogeneous medium. This model is built for estimating the effective thermal conductivity tensor components of a representative element of the composite structure containing these inclusions. Both the model and the self-coupling method allow calculating the effective thermal conductivity coefficients of a representative element. The coefficients are averaged according to the given texture function of the composite. The authors obtained some calculation correlations for the case of the conical texture including scattering. Quantitative analysis of these correlations is done. The correlations can be used for estimating the effective thermal conductivity tensor components of the textured composite with ellipsoidal inclusions (including those of both plate and needle shapes which feature some nanostructural elements).*

**Keywords:** composite, ellipsoidal inclusions, representative structure element, effective thermal conductivity tensor, texture function.

**Введение.** Область применения композитов в качестве конструкционного, теплозащитного или функционального материала зависит от комплекса свойств, среди которых важное место занимают теплофизические характеристики, в том числе теплопроводность. Кроме свойств включений и матрицы композита его теплопроводность зависит от объемной концентрации включений, их формы и ориентации, определяемой текстурой композита. Представление формы включений эллипсоидом вращения (удлиненного или сплюснутого) позволяет моделировать многообразие реальных форм, включая предельные (игольчатые и пластинчатые формы характерны для нанотрубок и фрагментов графена, рассматриваемых в качестве армирующих элементов перспективных композитов [1]).

Особенность включения эллипсоидальной формы состоит в том, что при тепловом взаимодействии с однородной изотропной средой в таком включении возникает одномерное температурное поле [2, 3]. Это свойство позволяет для оценки эффективной теплопроводности композита как изотропной гетерогенной среды с хаотически ориентированными включениями применить метод самосогласованного поля, кратко называемого методом самосогласования [4–6], осредняя по объему композита возмущения температурных полей во включениях. Преобразованием дифференциального уравнения, описывающего установившееся распределение температуры в окружающей включение однородной, но анизотропной среде, удается существенно расширить возможности этого метода [7], используя его для оценки эффективной теплопроводности текстурированных композитов с анизотропными включениями, имеющими форму, близкую к эллипсоидальной. В настоящей работе метод самосогласования использован применительно к текстурированному композиту с трансверсально изотропными включениями в форме эллипсоидов вращения.

**Модель теплового взаимодействия включения с однородной средой.** Пусть включение в форме эллипсоида вращения расположено в неограниченном объеме однородной среды с искомыми эффективными характеристиками теплопроводности. Включение примем трансверсально изотропным относительно оси вращения эллипсоида. Введем цилиндрическую систему  $O r \varphi z$  координат, начало которой расположено в центре эллипсоида, а координатная ось  $Oz$  совпадает с осью вращения. Установившееся распределение температуры  $T(r, \varphi, z)$  в эллипсоиде должно удовлетворять дифференциальному уравнению [2]

$$\frac{\lambda_r}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\lambda_r}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \lambda_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0, \quad (1)$$

где  $\lambda_r$  и  $\lambda_z$  — коэффициенты теплопроводности материала включения в радиальном и осевом направлениях.

При расположении осей вращения таких включений в композите параллельно одному направлению он также будет трансверсально изотропным относительно этого направления [8, 9] и его свойства будут определять искомые эффективные коэффициенты теплопроводности  $\lambda_r^*$  и  $\lambda_z^*$  в радиальном и осевом направлениях. Установившееся распределение температуры  $T^*(r, \varphi, z)$  в однородной среде, моделирующей свойства композита, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\lambda_r^*}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T^*}{\partial r} \right) + \frac{\lambda_r^*}{r^2} \frac{\partial^2 T^*}{\partial \varphi^2} + \lambda_z^* \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^2} = 0, \quad (2)$$

аналогичному уравнению (1). В силу осевой симметрии в уравнениях (1) и (2) вторая производная температуры по угловой координате  $\varphi$  будет равна нулю.

Преобразуем уравнение (2), опустив второе слагаемое в его левой части, к виду

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial T^*}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^2} = 0, \quad (3)$$

где  $\rho = r \sqrt{\lambda_z^*/\lambda_r^*}$ . Проведенное преобразование равносильно изменению масштаба в направлении радиальной координаты в  $\sqrt{\lambda_z^*/\lambda_r^*}$  раз, что приведет к изменению отношения  $\bar{b} = b_z/b_r$  полуосей исходного эллипсоида вращения, которое станет равным  $\bar{b}_* = \bar{b} \sqrt{\lambda_r^*/\lambda_z^*}$ .

Уравнение (3) теперь описывает установившееся распределение температуры в однородной изотропной среде с коэффициентом теплопроводности  $\lambda_z^*$ . Для построения модели теплового взаимодействия с такой средой трансверсально изотропного включения, имеющего форму эллипсоида вращения с отношением  $\bar{b}_*$  полуосей (этот эллипсоид предложено называть приведенным [10]), необходимо преобразовать и уравнение (1). Опустив второе слагаемое в левой части этого уравнения, запишем

$$\frac{\lambda_\rho}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial T}{\partial \rho} \right) + \lambda_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0, \quad (4)$$

где  $\lambda_\rho = \lambda_r (\lambda_z^*/\lambda_r^*)$ .

Пусть на весьма большом расстоянии от центра включения по сравнению с длиной наибольшей полуоси приведенного эллипсоида задано невозмущенное температурное поле  $T_\infty^*(z) = G_z z$ , имеющее составляющую градиента лишь в направлении координатной оси  $Oz$ , равную  $G_z$ . Тогда в приведенном эллипсоиде возникнет одномерное температурное поле [2, 3]

$$T(z) = \frac{\lambda_z^* G_z z}{\lambda_z^* + (\lambda_z - \lambda_z^*) D'_z},$$

где

$$D'_z = \frac{\bar{b}_*}{2} \int_0^\infty \frac{dv}{(1+v)(\bar{b}_*^2 + 1)^{3/2}}.$$

Это поле будет иметь составляющую градиента в направлении координатной оси  $Oz$

$$G'_z = \frac{\lambda_z^* G_z z}{\lambda_z^* + (\lambda_z - \lambda_z^*) D'_z}. \quad (5)$$

Теперь также на весьма большом расстоянии от центра включения по сравнению с длиной наибольшей полуоси приведенного эллипсоида зададим невозмущенное температурное поле с составляющей  $G_\rho$  градиента лишь в одном из радиальных направлений. Тогда в приведенном эллипсоиде одномерное температурное поле будет иметь составляющую градиента лишь в этом радиальном направлении [2, 3]

$$G'_\rho = \frac{\lambda_z^* G_\rho}{\lambda_z^* + (\lambda_\rho - \lambda_z^*) D'_\rho} = \frac{\lambda_r^* G_\rho}{\lambda_r^* + (\lambda_r - \lambda_r^*) D'_\rho}. \quad (6)$$

Здесь  $D'_\rho = (1 - D'_z)/2$ .

**Применение метода самосогласования.** В соответствии с методом самосогласования [11, 12] необходимо осредненные по объему композита составляющие градиента возмущенного температурного поля во включениях и в частицах матрицы приравнять нулю. Используя формулы (5) и (6), для этих составляющих во включениях получим

$$\begin{aligned} \Delta G_z &= G'_z - G_z = G_z D'_z \frac{\lambda_z^* - \lambda_z}{\lambda_z^* + (\lambda_z - \lambda_z^*) D'_z}; \\ \Delta G_\rho &= G'_\rho - G_\rho = G_\rho D'_\rho \frac{\lambda_r^* - \lambda_r}{\lambda_r^* + (\lambda_r - \lambda_r^*) D'_\rho}. \end{aligned} \quad (7)$$

Для частиц матрицы допустимо выбрать произвольную форму при условии, что их характерный размер может изменяться от некоторого конечного до бесконечно малого. Выполнение такого условия позволяет в объеме, занимаемом композитом, заполнить все возможные пустоты между эллипсоидальными включениями. Примем, что с учетом изменения масштаба в радиальном направлении форма частиц матрицы является шаровой, для которой геометрический коэффициент в любом направлении  $D^\circ = 1/3$  [2]. Изотропные в исходном состоянии частицы матрицы с коэффициентом теплопроводности  $\lambda_m$  при изменении масштаба станут трансверсально изотропными относительно оси  $Oz$ , сохранив значение  $\lambda_m$  в направлении этой оси и приобретя значение  $\lambda'_m = \lambda_m (\lambda_z^*/\lambda_r^*)$  в радиальном направлении. Тогда в частицах

матрицы в осевом и радиальном направлениях возникнут возмущения температурного поля с составляющими градиента

$$\Delta G_z^o = G_z \frac{\lambda_z^* - \lambda_m}{2\lambda_z^* + \lambda_m}; \quad \Delta G_\rho^o = G_\rho \frac{\lambda_r^* - \lambda_m}{2\lambda_r^* + \lambda_m}. \quad (8)$$

Осреднение по объему композита составляющих градиента возмущенного температурного поля в частицах матрицы и во включениях приводит к двум равенствам  $\Delta G_z^o(1 - C_V) + \Delta G_z C_V = 0$ ,  $\Delta G_\rho^o(1 - C_V) + \Delta G_\rho C_V = 0$ , где  $C_V$  — объемная концентрация включений в композите. Каждое равенство содержит только одну неизвестную величину ( $\lambda_z^*$  или  $\lambda_r^*$ ), определяемую соответствующим квадратным уравнением

$$\begin{aligned} (1 - D'_z - (1 - 3D'_z)C_V)\Lambda_z^2 - \\ - (1 - D'_z(1 + \bar{\lambda}_z) - (1 - 3D'_z\bar{\lambda}_z)C_V)\Lambda_z - D'_z\bar{\lambda}_z = 0; \\ (1 - D'_\rho - (1 - 3D'_\rho)C_V)\Lambda_z^2 - \\ - (1 - D'_\rho(1 + \bar{\lambda}_z) - (1 - 3D'_\rho\bar{\lambda}_z)C_V)\Lambda_z - D'_\rho\bar{\lambda}_z = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

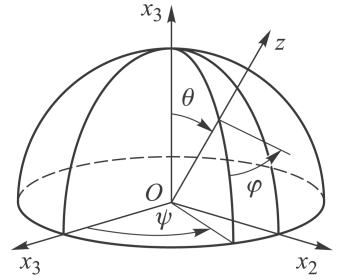
где  $\Lambda_z = \lambda_z^*/\lambda_m$ ;  $\bar{\lambda}_z = \lambda_z/\lambda_m$ ;  $\Lambda_r = \lambda_r^*/\lambda_m$ ;  $\bar{\lambda}_r = \lambda_r/\lambda_m$ . Каждое уравнение системы (9) имеет лишь одно положительное решение.

При заданных значениях полуосей  $b_z$  и  $b_r$  для исходной формы эллипсоида вращения, параметров  $\bar{\lambda}_z$ ,  $\bar{\lambda}_r$  и  $C_V$  систему уравнений (9) можно решить последовательными приближениями. Для этого сначала следует задать ожидаемое значение  $\bar{b}_*$ , вычислить значения  $D'_z$  и  $D'_\rho$ , а затем решить каждое уравнение системы (9) независимо, что позволит уточнить значение  $\bar{b}_*$  и продолжить последовательные приближения. Однако при количественном анализе полученных соотношений проще решать уравнения (9) для серии заданных значений  $\bar{b}_*$  [7], а потом по вычисленным значениям  $\Lambda_r$  и  $\Lambda_z$  находить соответствующие этой серии значения  $\bar{b} = b_z/b_r = \bar{b}_* \sqrt{\lambda_z^*/\lambda_r^*}$ .

**Оценки для текстурированного композита.** Следует отметить, что при хаотической ориентации включений, когда любое положение их осей вращения в пространстве равновероятно, композит будет изотропным [5] с коэффициентом теплопроводности  $\lambda^* = \lambda_z^* + 2\lambda_r^*$ . При наличии текстуры, определенной в прямоугольной декартовой системе координат с осями  $Ox_i$  (“макроосями”) и ортами  $e_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , необходимо для каждого трансверсально изотропного эллипсоида вращения задать ориентацию его оси вращения  $Oz$ . Эту ориентацию однозначно определяют углы  $\theta$  и  $\psi$  (рис. 1).

Представим композит состоящим из различно ориентированных составных частиц в форме эллипсоида вращения, включающих эллипсоидальное включение с заданным значением  $\bar{b}$  и слой материала матрицы. Составная частица и включение геометрически подобны с коэффициентом подобия  $C_V^{-1/3}$ . Каждая составная частица является

**Рис. 1. Ориентация оси  $Oz$  вращения эллипсоидального включения относительно “макроосей”**



представительным элементом структуры рассмотренного выше композита с одинаковой ориентацией включений. Поэтому эффективные коэффициенты теплопроводности этой частицы будут совпадать со значениями  $\lambda_z^*$  и  $\lambda_r^*$ . Тогда компоненты тензора эффективной теплопроводности частицы в “макроосях” можно представить в виде [13]

$$\lambda_{11}^* = \lambda_r^* (\sin^2 \psi + \cos^2 \psi \cos^2 \theta) + \lambda_z^* \cos^2 \psi \sin^2 \theta; \quad (10)$$

$$\lambda_{22}^* = \lambda_r^* (\cos^2 \psi + \sin^2 \psi \cos^2 \theta) + \lambda_z^* \sin^2 \psi \sin^2 \theta; \quad (11)$$

$$\lambda_{33}^* = \lambda_r^* \sin^2 \theta + \lambda_z^* \cos^2 \theta; \quad (12)$$

$$\lambda_{12}^* = \lambda_{21}^* = (\lambda_r^* - \lambda_z^*) \sin \psi \cos \psi \sin^2 \theta; \quad (13)$$

$$\lambda_{13}^* = \lambda_{31}^* = (\lambda_r^* - \lambda_z^*) \cos \psi \sin \theta \cos \theta; \quad (14)$$

$$\lambda_{23}^* = \lambda_{32}^* = (\lambda_z^* - \lambda_r^*) \sin \psi \sin \theta \cos \theta. \quad (15)$$

Для перехода к оценке эффективных коэффициентов теплопроводности композита с конкретной заданной текстурой необходимо предварительно определить в общем виде процедуру осреднения компонент  $\lambda_{ij}^*(\psi, \theta)$ ,  $j = 1, 2, 3$ , тензора эффективной теплопроводности отдельных составных частиц. Функцию  $f(\psi, \theta)$ , описывающую долю объема композита, занятого составными частицами, ориентация которых определена текущими значениями аргументов этой функции, принято называть текстурной [5, 14]. Вероятностная трактовка такой функции связана с понятием совместной плотности распределения случайного вектора [15], координатами которого являются углы  $\psi$  и  $\theta$ . Кроме этих углов текстурная функция в общем случае может зависеть и от координат  $x_i$ , что соответствует неоднородной текстуре композита в его объеме. Если текстура однородна, то осредненные компоненты тензора эффективной теплопроводности композита принимают вид [13]

$$\bar{\lambda}_{ij}^* = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^\pi f(\psi, \theta) \lambda_{ij}^*(\psi, \theta) \sin \theta d\theta. \quad (16)$$

Однородная по объему композита текстура может быть комбинированной, включающей набор  $n$  дискретных идеальных текстур и непрерывно распределенную, характеризуемую текстурной функцией

$f_1(\psi, \theta)$ . Пусть для каждой дискретной идеальной структуры ориентация оси вращения эллипсоидального включения определена значениями  $\psi_\beta$  и  $\theta_\beta$ ,  $\beta = \overline{1, n}$ . Тогда вместо формулы (16) следует использовать соотношение

$$\bar{\lambda}_{ij}^* = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^\pi f_1(\psi, \theta) \lambda_{ij}^* \sin \theta d\theta + \sum_{\beta=1}^n v_\beta \lambda_{ij}^*(\psi_\beta, \theta_\beta),$$

где  $v_\beta$  — доля объема композита, в которой идеальная текстура определена значениями  $\psi_\beta$  и  $\theta_\beta$ . При этом текстурную функцию  $f_1(\psi, \theta)$  требуется нормировать согласно условию

$$\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^\pi f_1(\psi, \theta) \sin \theta d\theta = 1 - \sum_{\beta=1}^n v_\beta.$$

**Коническая текстура композита.** Среди непрерывно распределенных текстур композита с эллипсоидальными включениями можно выделить так называемую коническую текстуру [14], когда оси вращения всех составных частиц являются образующими соосных круговых конических поверхностей и равномерно распределены по этим поверхностям. Если ось этих поверхностей совместить с “макроосью”  $Ox_3$ , то текстурная функция  $F(\theta)$  будет зависеть лишь от одной угловой координаты  $\theta$ . После осреднения по углу  $\psi$  из формул (10) и (11) получим

$$\lambda_{11}^* = \lambda_{22}^* = \lambda_r^*(1 + \cos^2 \theta)/2 + (\lambda_z^*/2) \sin^2 \theta, \quad (17)$$

формула (12) для коэффициента  $\lambda_{33}^*$  останется без изменения, а из формул (13)–(15) следует  $\lambda_{12}^* = \lambda_{13}^* = \lambda_{23}^* = 0$ , т.е. “макроось”  $Ox_3$  композита будет главной осью тензора эффективной теплопроводности композита с конической текстурой.

В случае составных частиц в форме эллипсоидов вращения при осреднении можно ограничиться интегрированием по углу  $\theta$  в интервале  $(0; \pi/2)$ . Тогда текстурную функцию  $F(\theta)$  следует нормировать из условия

$$\int_0^{\pi/2} F(\theta) \sin \theta d\theta = 1, \quad (18)$$

причем равномерному распределению осей вращения по углу  $\theta$  соответствует значение  $F(\theta) \equiv 1$ . Таким образом, для главных значений тензора эффективной теплопроводности композита с конической тек-

ступрой с учетом формул (12) и (17) получим

$$\bar{\lambda}_1^* = \bar{\lambda}_2^* = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (\lambda_r^* (1 + \cos^2 \theta) + \lambda_z^* \sin^2 \theta) F(\theta) \sin \theta d\theta; \quad (19)$$

$$\bar{\lambda}_3^* = \int_0^{\pi/2} (\lambda_r^* \sin^2 \theta + \lambda_z^* \cos^2 \theta) F(\theta) \sin \theta d\theta. \quad (20)$$

При идеальной конической текстуре оси вращения всех составных частиц будут образующими одной конической поверхности с заданным значением  $\gamma \in (0; \pi/2]$  полуугла раствора конуса. Тогда из условия (18) следует  $F(\theta) = 1/\sin \gamma$  и формулы (19) и (20) переходят в равенства

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_1^* = \bar{\lambda}_2^* &= \lambda_r^* (1 + \cos^2 \gamma) / 2 + (\lambda_z^* / 2) \sin^2 \gamma; \\ \bar{\lambda}_3^* &= \lambda_r^* \sin^2 \gamma + \lambda_z^* \cos^2 \gamma. \end{aligned} \quad (21)$$

Отметим, что первая формула (21) идентична формуле (17), а вторая – формуле (12).

При  $\gamma = \pi/2$  текстуру называют кольцевой [14]. В этом случае  $\bar{\lambda}_1^* = \bar{\lambda}_2^* = (\lambda_r^* + \lambda_z^*) / 2$  и  $\bar{\lambda}_3^* = \lambda_r^*$ . Если  $\gamma = 0$ , то для такой текстуры, называемой аксиальной [14], главные значения тензора эффективной теплопроводности композита совпадают со значениями эффективных коэффициентов теплопроводности составных частиц, т.е.  $\bar{\lambda}_1^* = \bar{\lambda}_2^* = \lambda_r^*$  и  $\bar{\lambda}_3^* = \lambda_z^*$ .

В отличие от идеальной конической текстуры для реальной текстуры возможно ее некоторое рассеяние, вызванное тем, что не все оси вращения частиц строго направлены по образующим одной конической поверхности. При упрощенном описании слабого рассеяния идеальной конической текстуры можно принять, что эти оси равномерно заполняют зазор между двумя соосными круговыми коническими поверхностями, образующие которых составляют с осью этих поверхностей углы  $\gamma + \delta$  и  $\gamma - \delta$ , причем  $\delta \leq \gamma$  и  $\gamma + \delta \leq \pi/2$ . Совместим ось этих поверхностей с “макроосью”  $Ox_3$ , а зазор между ними равномерно заполним осями вращения составных частиц. Тогда условие

(18) примет вид  $\int_{\gamma-\delta}^{\gamma+\delta} F_\delta(\theta) \sin \theta d\theta = 1$ , но в пределах интервала интегрирования  $F_\delta(\theta) = F(\gamma, \delta) = \text{const}$ . После вычисления интеграла находим  $F(\gamma, \delta) = 1/(2 \sin \gamma \sin \delta)$  и вместо формул (19) и (20) получаем



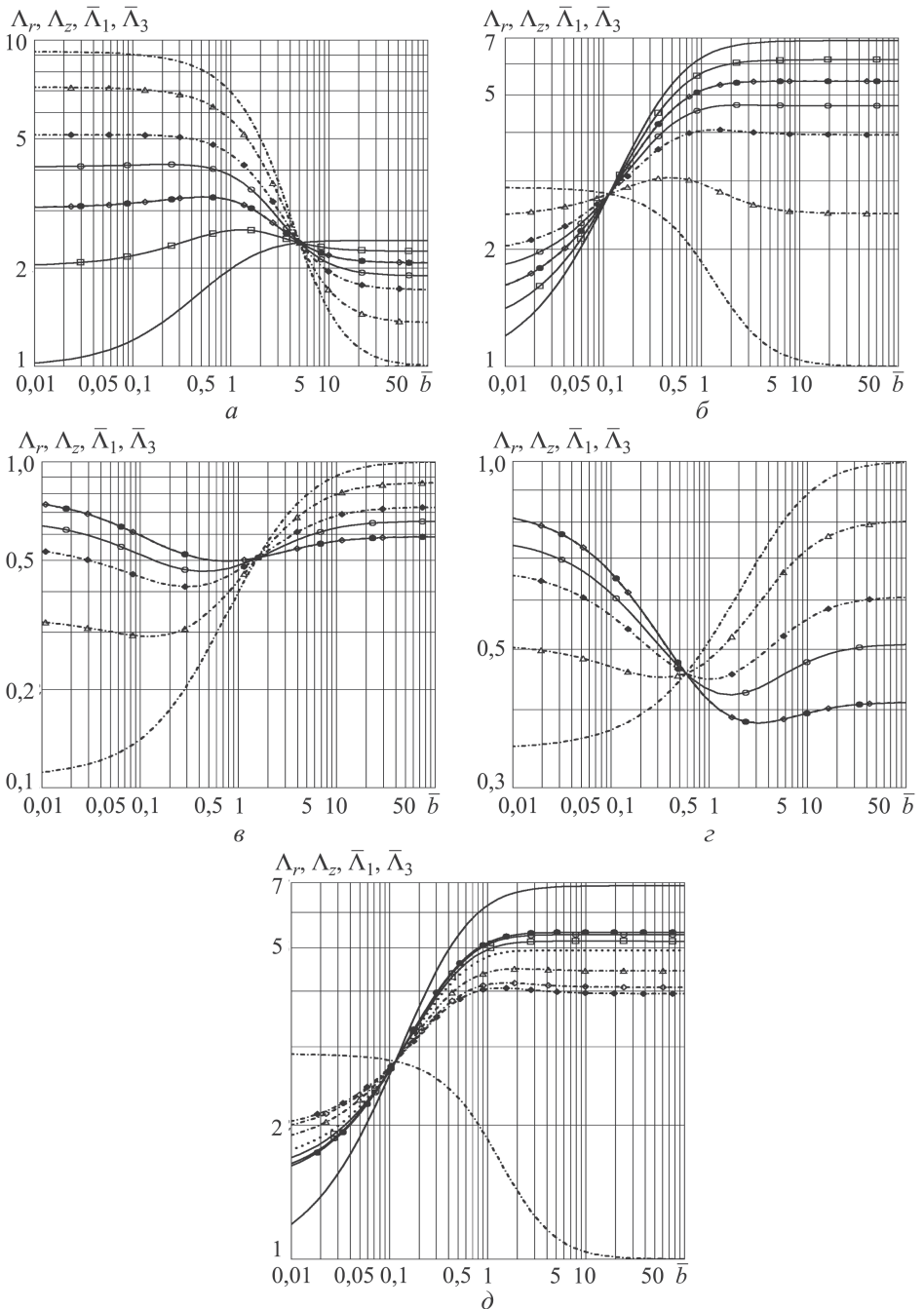
$$\bar{\lambda}_1^* = \bar{\lambda}_2^* = \frac{\lambda_r^*}{2} \left( 1 + \cos^2 \gamma \cos^2 \delta + \frac{\sin^2 \gamma}{3} \sin^2 \delta \right) + \frac{\lambda_z^*}{2} \left( \sin^2 \gamma + \sin^2 \delta - 4 \frac{\sin^2 \gamma}{3} \sin^2 \delta \right); \quad (22)$$

$$\bar{\lambda}_3^* = \lambda_r^* \left( \sin^2 \gamma + \sin^2 \delta - 4 \frac{\sin^2 \gamma}{3} \sin^2 \delta \right) + \lambda_z^* \left( \cos^2 \gamma \cos^2 \delta + \frac{\sin^2 \gamma}{3} \sin^2 \delta \right). \quad (23)$$

**Результаты расчетов.** В случае конической текстуры композита для использования расчетных зависимостей (21) предварительно необходимо путем решения системы (9) квадратных уравнений вычислить значения  $\lambda_r^*$  и  $\lambda_z^*$  эффективных коэффициентов теплопроводности представительного элемента структуры композита в виде составной частицы, имеющей форму эллипсоида вращения. Результаты решения этой системы при значении  $C_V = 0,5$  приведены на рис. 2, а–г в виде зависимостей отношений  $\Lambda_r = \lambda_r^*/\lambda_m$  (сплошные кривые) и  $\Lambda_z = \lambda_z^*/\lambda_m$  (штрихпунктирные кривые) от параметра  $\bar{b}$  при различных сочетаниях параметров  $\bar{\lambda}_r$  и  $\bar{\lambda}_z$  в логарифмических координатах. На этом же рисунке представлены зависимости от параметра  $\bar{b}$  отношений  $\bar{\Lambda}_1 = \bar{\lambda}_1^*$  и  $\bar{\Lambda}_3 = \bar{\lambda}_3^*$  при  $\gamma = \pi/6$  (кривые со светлыми квадратами и треугольниками),  $\gamma = \pi/4$  (кривые с темными кружками и ромбами) и  $\gamma = \pi/3$  (кривые со светлыми кружками и ромбами). При выбранных сочетаниях параметров полностью совпадают зависимости отношений  $\bar{\Lambda}_1$  при  $\gamma = \pi/4$  и  $\bar{\Lambda}_3$  при  $\gamma = \pi/3$  от  $\bar{b}$ . Кроме того, для каждого сочетания заданных значений  $\bar{\lambda}_r$  и  $\bar{\lambda}_z$  существует отношение  $\bar{b}$ , при котором  $\lambda_r^* = \lambda_z^*$ , т.е. представительный элемент структуры композита является изотропным и поэтому изменение угла  $\gamma$  не влияет на значения эффективных коэффициентов теплопроводности композита (все кривые пересекаются в точке с абсциссой, равной этому значению  $\bar{b}$ ).

По формулам (22) и (23) построены зависимости отношений  $\bar{\Lambda}_1$  и  $\bar{\Lambda}_3$  от параметра  $\bar{b}$  при  $C_V = 0,5$ ,  $\bar{\lambda}_r = 16$ ,  $\bar{\lambda}_z = 4$ ,  $\gamma = \pi/4$  и различных значениях угла  $\delta$ , характеризующего степень рассеяния конической текстуры (рис. 2, д). Сплошной и штрихпунктирной кривыми повторены зависимости отношений  $\Lambda_r$  и  $\Lambda_z$  от параметра  $\bar{b}$ , показанные на рис. 2, в и соответствующие аксиальной текстуре, также приведены зависимости отношения  $\bar{\Lambda}_1$  (сплошная кривая с темными кружками) и  $\bar{\Lambda}_3$  (штрихпунктирная кривая с темными ромбами) от параметра  $\bar{b}$  при отсутствии рассеяния конической текстуры ( $\delta = 0$ ).

Зависимости отношений  $\bar{\Lambda}_1$  и  $\bar{\Lambda}_3$  от параметра  $\bar{b}$  при наличии рассеяния конической текстуры с углом  $\gamma = \pi/4$  приведены на рис. 2, д для значений  $\delta = \pi/12$  (кривые со светлыми кружками и ромбами)



**Рис. 2.** Зависимости безразмерных эффективных коэффициентов теплопроводности от параметра  $\bar{b}$  при  $C_V = 0,5$ ,  $\bar{\lambda}_r = 4$ ,  $\bar{\lambda}_z = 16$  (a),  $\bar{\lambda}_r = 16$ ,  $\bar{\lambda}_z = 4$  (б),  $\bar{\lambda}_r = 0,25$ ,  $\bar{\lambda}_z = 0,0625$  (в),  $\bar{\lambda}_r = 0,0625$ ,  $\bar{\lambda}_z = 0,25$  (г),  $\bar{\lambda}_r = 16$ ,  $\bar{\lambda}_z = 4$  в случае конической текстуры с рассеянием (д)

и  $\delta = \pi/6$  (кривые со светлыми квадратами и треугольниками). При  $\delta = \pi/4$  распределение осей вращения эллипсоидов равновероятно по всем направлениям, поэтому  $\bar{\Lambda}_1 = \bar{\Lambda}_3$  во всем промежутке изменения параметра  $\bar{b}$  (пунктирная линия), что соответствует изотропному композиту с коэффициентом теплопроводности  $\bar{\lambda}^* = 2\lambda_r^* + \lambda_z^*$ .

**Заключение.** Метод самосогласования применен для оценки эффективных коэффициентов теплопроводности представительного элемента структуры композита в виде составной эллипсоидальной частицы, содержащей трансверсально изотропное включение, окруженной слоем изотропной матрицы. Эти коэффициенты использованы для построения расчетных зависимостей, позволяющих оценить эффективную теплопроводность текстурированного композита с включениями, имеющими форму эллипсоидов вращения. Представлены и проанализированы результаты расчетов для нескольких вариантов идеальной конической текстуры и текстуры с рассеянием в широком интервале изменения отношения полуосей эллипсоидальных включений.

*Работа выполнена по грантам НШ-1432.2014.8 и МК-6573.2015.8 программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ и молодых кандидатов наук, по проекту № 1.2640.2014 в рамках реализации государственного задания и проекту № 1712 в рамках реализации государственного задания Минобрнауки РФ.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кац Е.А. Фуллерены, углеродные нанотрубки и нанокластеры. Родословная форм и идей. М.: Изд-во ЛКИ, 2008. 296 с.
2. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел; пер. с англ. М.: Наука, 1964. 488 с.
3. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Эффективные коэффициенты теплопроводности композита с эллипсоидальными включениями // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2012. № 3. С. 76–85.
4. Hill R. A self-consistent mechanics of composite materials // J. Mech. Phys. Solids. 1965. Vol. 13. No. 4. P. 213–222.
5. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 400 с.
6. Паньков А.А. Методы самосогласования механики композитов. Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2008. 253 с.
7. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Оценка методом самосогласования эффективной теплопроводности трансверсально изотропного композита с изотропными эллипсоидальными включениями // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2015. № 3. С. 99–109.
8. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Эффективные коэффициенты теплопроводности композита с включениями в виде удлиненных эллипсоидов вращения // Тепловые процессы в технике. 2013. Т. 5. № 6. С. 276–282.
9. Зарубин В.С., Савельева И.Ю. Эффективные коэффициенты теплопроводности композита со сфероидальными включениями // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2013. № 4. С. 116–126.

10. Анресян Л.А., Власов Д.В. О факторах деполяризации анизотропных эллипсоидов в анизотропной среде // ЖТФ. 2014. Т. 84. № 12. С. 23–28.
11. Stroud D. Generalized effective-medium approach to the conductivity of an inhomogeneous materials // Phys. Rev. B. 1975. Vol. 12. No. 8. P. 3368–3373.
12. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Оценка эффективной теплопроводности композита с шаровыми включениями методом самосогласования // Наука и образование: электронное научно-техническое издание. 2013. № 9. С. 435–444. URL: <http://technomag.bmstu.ru/doc/601512.html> (дата обращения: 12.09.2014). DOI: 10.7463/0913.0601512
13. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Теплопроводность текстурированного композита с анизотропными включениями в виде эллипсоидов вращения // Наука и образование: электронное научно-техническое издание. 2013. № 6. С. 365–378. URL: <http://technomag.bmstu.ru/doc/569312.html> (дата обращения: 12.09.2014). DOI: 10.7463/0613.0569312
14. Адамеску Р.А., Гельд П.В., Митюшов Е.А. Анизотропия физических свойств металлов. М.: Металлургия, 1985. 136 с.
15. Теория вероятностей / А.В. Печинкин, О.И. Тескин, Г.М. Цветкова и др; под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 456 с.

## REFERENCES

- [1] Kats E.A. Fullereny, uglerodnye nanotrubki i nanoklastery. Rodoslovnaya form i idey [Fullerenes, Carbon Nanotubes and Nanoclusters. Genealogy of Forms and Ideas]. Moscow, LKI Publ., 2008. 296 p.
- [2] Carslaw H.S., Jaeger J.C. Conduction of heat in solids. London, Oxford University Press, 1959.
- [3] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Effective Coefficients of Thermal Conductivity of a Composite with Ellipsoidal Inclusions. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2012, no. 3, pp. 76–85 (in Russ.).
- [4] Hill R. A self-consistent mechanics of composite materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 1965, vol. 13, no. 4, pp. 213–222.
- [5] Shermergor T.D. Teoriya uprugosti mikroneodnorodnykh sred [The Theory of Elasticity of Microinhomogeneous Media]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 400 p.
- [6] Pan'kov A.A. Metody samosoglasovaniya mekhaniki kompozitov [Methods of Self-Consistency in Mechanics of Composites]. Perm', Perm. Gos. Tekh. Univ. Publ., 2008. 253 p.
- [7] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Yu. The Self-Consistent Scheme Estimation of Effective Thermal Conductivity for the Transversally Isotropic Composite with Isotropic Ellipsoidal Inclusions. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2015, no. 3, pp. 99–109 (in Russ.).
- [8] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Yu. The Effective Thermal Conductivity of the Composite with Inclusions in the Form of Elongated Spheroids. *Teplovye protsessy v tekhnike* [Thermal Processes in Engineering], 2013, vol. 5, no. 6, pp. 276–282 (in Russ.).
- [9] Zarubin V.S., Savel'eva I.Yu. Effective Thermal Conductivity Coefficients of the Composites with Spheroidal Inclusions. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2013, no. 4, pp. 116–126 (in Russ.).

- [10] Apresyan L.A., Vlasov D.V. Factors of Anisotropic Ellipsoid Depolarization in an Anisotropic Medium. *Zh. Tekh. Fiz.* [Tech. Phys. The Russ. J. Appl. Phys.], 2014, vol. 84, no. 12, pp. 23–28 (in Russ.).
- [11] Stroud D. Generalized effective-medium approach to the conductivity of an inhomogeneous materials. *Phys. Rev. B*, 1975, vol. 12, no. 8, pp. 3368–3373.
- [12] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Yu. Evaluation of effective thermal conductivity of composites with ball inclusions by the method of self-consistency. *Jelektr. Nauchno-Tehn. Izd. "Nauka i obrazovanie"* [El. Sc.-Tech. Publ. "Science and Education"], 2013, no. 9, pp. 435–444. URL: <http://technomag.bmstu.ru/doc/601512.html> (accessed: 12.09.2014). DOI: 10.7463/0913.0601512
- [13] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Thermal conductivity of the textured composite with anisotropic inclusions in the form of ellipsoids of rotation. *Jelektr. Nauchno-Tehn. Izd. "Nauka i obrazovanie"* [El. Sc.-Tech. Publ. "Science and Education"], 2013, no. 6, pp. 365–378. URL: <http://technomag.bmstu.ru/doc/569312.html> (accessed 12.09.2014). DOI: 10.7463/0613.0569312
- [14] Adamesku R.A., Gel'd P.V., Mityushov E.A. Anizotropiya fizicheskikh svoystv metallov [Anisotropy of Metal Physical Properties]. Moscow, Metallurgiya Publ., 1985. 136 p.
- [15] Pechinkin A.V., Teskin O.I., Tsvetkova G.M., ed. by Zarubin V.S., Krishchenko A.P. Teoriya veroyatnostey [Probability Theory]. Moscow, MGTU im. N.E. Baumana Publ., 2004. 456 p.

Статья поступила в редакцию 03.12.2014

Зарубин Владимир Степанович — д-р техн. наук, профессор кафедры “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 300 научных работ в области термомеханики.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Zarubin V.S. — D.Sc. (Eng.), Professor of Mathematics, Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University, author of over 300 research publications in the field of thermal mechanics.

Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Кувыркин Георгий Николаевич — д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 250 научных работ в области прикладной математики и математического моделирования термомеханических процессов в материалах и элементах конструкций.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Kuvyrkin G.N. — D.Sc. (Eng.), Professor of Mathematics, Head of the Applied Mathematics Department, Bauman Moscow State Technical University, author of over 250 research publications in the fields of applied mathematics and mathematical modelling of thermal and mechanical processes in materials and constructions.

Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Савельева Инга Юрьевна — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 20 научных работ в области моделирования нестационарной теплопроводности.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Savel'eva I.Yu. — Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor of Mathematics, Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University, author of over 20 research publications in the field of non-stationary heat conduction modeling. Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

**Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Оценка методом самосогласования эффективной теплопроводности текстурированного композита с трансверсально изотропными эллипсоидальными включениями // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2015. № 4. С. 88–101.

**Please cite this article in English as:**

Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Yu. Estimation of effective heat conductivity of the textured composite with transverse isotropic ellipsoidal inclusions by the self-coupling method. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2015, no. 4, pp. 88–101.