

УДК 532.6

ФОРМА ПЛЕНКИ ЧАСТИЧНО СМАЧИВАЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ ПРИ СТЕКАНИИ СО СМОЧЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

А.С. Романов, А.В. Семиколонов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

e-mail: rolmal@bk.ru; avsemik@mail.ru

Рассмотрен метод непротиворечивого описания динамического угла смачивания при стекании частично смачивающей жидкости по твердой поверхности с учетом дополнительного химического потенциала (расклинивающего давления) для частиц жидкости в тонких слоях жидкости вблизи линии трехфазного контакта. Применение развиваемой теории продемонстрировано на примере расчета формы поверхности жидкости при различных скоростях движения.

Ключевые слова: частично смачивающая жидкость, тонкая пленка, поверхностное натяжение, расклинивающее давление, трехфазный контакт, краевой угол.

FILM SHAPE OF PARTIALLY WETTING LIQUID WHILE FLOWING DOWN WETTED SURFACE

A.S. Romanov, A.V. Semikolenov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

e-mail: rolmal@bk.ru; avsemik@mail.ru

The paper presents a method for noncontradictory description of a dynamic contact angle of partially wetting liquid while it flows down the hard surface. An additional chemical potential (disjoining pressure) is taken into account, when considering fluid particles in the liquid thin layers near the three-phase contact line. The application of the developed theory is demonstrated by calculating the liquid surface shape at different speeds.

Keywords: partially wetting liquid, thin film, surface tension, disjoining pressure, contact of three phases, contact angle.

Введение. Различные аспекты взаимодействия жидкости и твердого тела широко обсуждаются в литературе. Особый интерес представляет процесс смачивания жидкостью твердой поверхности, когда существует трехфазная граница — линия смачивания, на которой находятся в контакте все три фазы взаимодействующих веществ. Известно, что форма свободной поверхности при растекании жидкости вдоль твердой поверхности зависит от взаимодействия жидкости с первоначально сухой твердой поверхностью, т.е. от процесса смачивания. В классической теории смачивания принято, что на линии трехфазного контакта (на линии пересечения свободной поверхности жидкости с твердой поверхностью) выполняется условие равновесия Юнга [1]. Для частично смачивающей жидкости предполагается, что соответствующий равновесный угол смачивания (всегда отсчитываемый со

стороны жидкости) имеет значение $0 < \alpha_e < \pi/2$. Противоречие заключается в том, что в рамках гидродинамики вязкой капельной жидкости оказывается невозможным одновременно сочетать перемещение трехфазной границы жидкости при растекании и выполнить условие Юнга. При этом отказ от условия Юнга при растекании невозможен, так как это означает отсутствие локального термодинамического равновесия вблизи линии трехфазного контакта.

Проблема замкнутого непротиворечивого описания явления смачивания может быть решена на основе учета сил физико-химического происхождения, возникающих в тонких слоях жидкости. Эти силы часто называют расклинивающим давлением. В настоящее время термин “расклинивающее давление” является общепринятым, был впервые введен Б.В. Дерягиным [2, 3]. В работе [4] было показано, что такой подход согласуется с теорией Рэлея и приводит к физически очевидному факту: скорость растекания при смачивании для частично смачивающей жидкости пропорциональна градиенту химического потенциала частиц жидкости вблизи линии трехфазного контакта. Рассматриваемая в данной статье проблема и соответствующие экспериментальные факты подробно изложены в работах [5, 6]. В настоящее время подобный подход плодотворно развивается в исследованиях (например, работы [7–23]).

В данной статье представлено однопараметрическое семейство кривых, определяющих возможную форму жидкой пленки вблизи линии трехфазного контакта, стекающей со смоченной поверхности при частичном смачивании.

Постановка задачи. В приближении теории смазки форма свободной поверхности одномерной жидкой пленки, растекающейся вдоль гладкой твердой поверхности при частичном смачивании, описывается уравнением [24, 25]:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{3\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left[h^3 \left(\frac{\partial}{\partial x} \sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{\partial \Phi_\alpha(h)}{\partial x} \right) \right] = 0, \quad (1)$$

где $h(x, t)$ — толщина слоя жидкости над твердой поверхностью; x, t — координата, вдоль которой растекается жидкость (рис. 1), и время; μ — динамическая вязкость; σ — поверхностное натяжение; $\Phi_\alpha(h)$ — функция, определяющая зависимость расклинивающего давления (или с точностью до знака химического потенциала молекул жидкости, рассчитанного на единицу объема),

$$\Phi_\alpha(h) = \frac{\pi}{12} h^{-3} \left[(n_L^2 a_{LL} - n_L n_{SA} a_{LS}) G(\alpha) - n_L n_{SA} a_{LS} G(\pi - \alpha) \right], \quad (2)$$

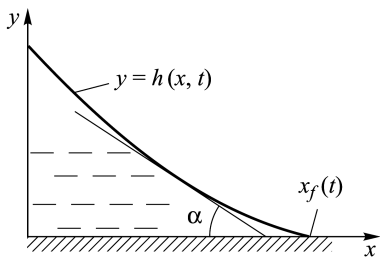


Рис. 1. Схема задания формы свободной поверхности жидкости

где $G(\alpha) = 1 + \cos^3 \alpha + \frac{3}{2} \sin^2 \alpha \cos \alpha$ — функция; n_L, n_S — концентрации молекул жидкости и твердого тела; a_{LL}, a_{LS} — постоянные взаимодействия молекул жидкость–жидкость и жидкость–твердое тело по Ван-дер-Ваальсу. Подробно вывод соотношений (1) и (2) приведен в работе [4].

Согласно соотношению (2), если $a_{LL}n_L^2 > n_L n_S a_{LS}$, то всегда существует некоторое значение угла $\alpha = \alpha_0$, $\pi > \alpha > 0$, такое, что $\Phi_\alpha(h) = 0$, $\alpha = \alpha_0$. Поэтому в рамках развиваемой теории при равновесии обязательно выполняется равенство $\alpha = \alpha_0$ при $h = 0$. Тем самым угол α_0 отождествляется с равновесным углом смачивания $\alpha_0 = \alpha_e$ для частично смачивающей жидкости.

Приведенное выше неравенство ($A_{LL} > A_{LS}$, где $A_{LL} = n_L^2 a_{LL}$, $A_{LS} = n_L n_S a_{LS}$ — постоянные Гамакера) физически означает, что объемная плотность энергии взаимодействия молекул жидкости между собой больше чем с молекулами твердого тела. Если $A_{LS} > A_{LL}$, то жидкость полностью смачивает поверхность твердого тела и никакого равновесного краевого угла смачивания при $h = 0$ не существует. Следует также отметить, что $\alpha_e = 0$ при $A_{LL} = A_{LS}$, но ни при каких значениях постоянных Гамакера невозможно значение $\alpha_e = \pi$. Для этого необходимо, чтобы притяжение между молекулами сменилось отталкиванием, что невозможно в рамках рассматриваемой теории.

Упростим выражение (2) для малых углов наклона свободной поверхности

$$\Phi_\alpha(h) = \frac{\pi}{48} A_{LL} h^{-3} \left[\frac{16}{3} (1 - \beta) - \alpha^4 \right], \quad \beta = \frac{A_{LS}}{A_{LL}}, \quad \alpha \rightarrow 0. \quad (3)$$

Тогда для малых равновесных углов смачивания получаем асимптотическую формулу

$$\alpha_e = \left[\frac{16}{3} (1 - \beta) \right]^{\frac{1}{4}}, \quad \beta \rightarrow 1 - 0.$$

Уравнение свободной поверхности (1) должно быть дополнено граничными условиями на трехфазной границе $x = x_f(t)$:

$$h = 0, \quad h^3 \frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \Phi_\alpha(h) \right) = 0, \quad (4)$$

первое из которых является очевидным, второе означает отсутствие расхода через линию трехфазного контакта.

Дальнейшее изучение движения жидкой пленки удобно провести в безразмерных переменных. При этом более определенно выясняется роль отдельных слагаемых в соотношениях (1), (4). В качестве характерных величин выберем следующие: $L = \sqrt{\sigma/(\rho_l g)}$ — характерная длина (так называемая капиллярная длина); ρ_l, g — плотность жидкости и ускорение свободного падения; $t_0 = 3\mu L/\sigma$ — характерное время. Учтем также, что при малых углах наклона справедливо приближенное равенство (3). Тогда уравнение (1) и граничные условия (4) переписываются в виде

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (w^3 + Sw) \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - w + \frac{R}{w^3} \left(\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^4 - \alpha_e^4 \right) \right] \right\} = 0; \quad (5)$$

$$w = 0, \quad (w^3 + Sw) \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - w + \frac{R}{w^3} \left(\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^4 - \alpha_e^4 \right) \right] = 0 \quad \text{при } x = x_f(t). \quad (6)$$

Здесь для безразмерной координаты и безразмерного времени сохранены те же обозначения, что и для размерных координаты и времени; $w = h/L$ — безразмерная толщина жидкой пленки. Безразмерный критерий $R = \frac{\pi A_{LL}}{48 \sigma L^2}$ определяет относительную роль расклинивающего давления и поверхностного натяжения.

Оценим характерные величины t_0, L и безразмерный критерий R для одного частного случая. Примем $n_L = 3,34 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$, $T = 300 \text{ К}$, $A_{LL} = \frac{48}{\pi} \cdot 10^{-20} \text{ Дж}$, $\sigma = 0,062 \text{ Н} \cdot \text{м}^{-1}$, $\mu = 1,48 \text{ Па} \cdot \text{с}$, $\rho_l = 1,26 \times 10^3 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$, что примерно соответствует глицерину при температуре $T = 300 \text{ К}$. Тогда получим $L = 2,3 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, $t_0 = 0,2 \text{ с}$, $R = 3 \cdot 10^{-14}$. Для безразмерного критерия справедливо сильное неравенство $R \ll 1$, поэтому роль соответствующих слагаемых в соотношениях (5) и (6) существенна только при $w \rightarrow 0$, т.е. при достаточно малых толщинах жидкой пленки, в том числе вблизи линии трехфазного контакта $x \rightarrow x_f(t)$.

Более наглядно оценить значения толщины жидкой пленки, при которой необходим учет расклинивающего давления, непосредственно в размерных переменных. Относительная роль поверхностного натяжения и расклинивающего давления определяется равенством $\sigma/\rho_0 = A_{LL}/h_0^3$, где $\rho_0 > 0$ — характерное значение кривизны поверхности пленки; h_0 — критическая толщина пленки. При толщине

пленки $h^3 < h_0^3$ расклинивающее давление должно учитываться наряду с поверхностным натяжением. Поскольку $\sigma = A_{LL}/r_0^2$ [3], r_0 – радиус молекулы жидкости по Ван-дер-Ваальсу, критическую толщину пленки можно оценить в виде $h_0^3 = r_0^2 \rho_0$. Таким образом, находим оценку области толщин жидкой пленки, где учет расклинивающего давления целесообразен и возможен в рамках механики сплошной среды: $r_0^2 \rho_0 > h^3 \gg r_0^3$. Если принять $r_0 = 10^{-10}$ м, $\rho_0 = 10^{-4}$ м, то критическая толщина пленки $h_0 = 10^{-8}$ м $\gg \rho_0$.

В соответствии с экспериментальными данными [2, 3] молекулярная составляющая расклинивающего давления в некоторых случаях проявляется уже на толщинах около 10^{-7} м. Поэтому молекулярная составляющая расклинивающего давления носит диффузный характер.

Пусть $\dot{x}_f(t) \equiv \frac{dx_f}{dt} \neq 0$, где $x_f(t)$ – функция, определяющая положение трехфазной границы, при этом $\dot{x}_f > 0$ соответствует натеканию жидкости на сухую твердую поверхность, а $\dot{x}_f < 0$ – стеканию жидкости (см. рис. 1). Найдем форму уравнения (5), асимптотически справедливую при $x \rightarrow x_f(t)$. Воспользуемся методом, приведенным в работе [26]. Дифференцируя первое граничное условие по времени t , получаем $\frac{\partial w}{\partial t} + \dot{x}_f \frac{\partial w}{\partial x} = 0$, $x = x_f(t)$. Предположим, что это соотношение, строго выполняющееся на линии трехфазного контакта, выполняется и в некоторой окрестности трехфазной границы жидкости $w \rightarrow 0$, $x \rightarrow x_f(t)$. Заменим в нем производную по времени w'_t из уравнения (5) и проинтегрируем затем с учетом второго условия (6). В результате запишем обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее форму свободной поверхности жидкости в зависимости от скорости перемещения границы

$$\frac{\partial^3 w}{\partial \eta^3} - \frac{\partial w}{\partial \eta} + R \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \eta^{-3} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^4 - \alpha_e^4 \right] \right\} + \frac{\dot{x}_f}{w^2} = 0. \quad (7)$$

Здесь $\eta = x_f(t) - x$ – координата, отсчитываемая от границы внутрь жидкости (см. рис. 1). Следует отметить, что в случае бегущей волны, когда $\dot{x}_f = \text{const}$ и $w(x, t) = w(\eta)$, уравнение (7) является точным следствием соотношений (5), (6).

Учет расклинивающего давления в уравнении (7) принципиально важен и полностью решает проблему с выполнением условия Юнга на движущейся линии трехфазного контакта [4]. Достаточно полно уравнение (7) может быть проанализировано только численно. Наибольший интерес представляет область вблизи линии трехфазного контакта, в которой роль расклинивающего давления существенна, т.е. при

$w \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow +0$. Для выяснения относительной роли слагаемых в уравнении (7) в указанной области перейдем к новым переменным $w, \eta \rightarrow \xi = \frac{\alpha_e w}{\sqrt{R}}$, $\delta = \frac{\eta}{\sqrt{R}}$. Тогда уравнение (7) в пренебрежение величинами $O(R)$ преобразуется к виду

$$\frac{\partial^3 \xi}{\partial \delta^3} + \frac{\partial}{\partial \delta} \left\{ \xi^{-3} \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial \delta} \right)^4 - 1 \right] \right\} + \frac{\dot{x}_f^*}{\xi^2} = 0, \quad (8)$$

где $\dot{x}_f^* = \alpha_e^{-3} \dot{x}_f$. Следовательно, в рассматриваемой модели форма поверхности жидкой пленки вблизи линии трехфазного контакта описывается обыкновенным нелинейным дифференциальным уравнением (8), содержащим единственный параметр \dot{x}_f^* .

Уравнение (8) должно быть дополнено граничными условиями, одно из которых очевидно:

$$\xi = 0, \quad \delta = 0, \quad (9)$$

а второе — условие равновесия Юнга

$$\left| \frac{\partial \xi}{\partial \delta} \right| = 1, \quad \delta = 0. \quad (10)$$

Порядок уравнения (8) можно понизить введением новой зависимой переменной $p = \left(\frac{d\xi}{d\delta} \right)^2 - 1$ и рассматривая толщину жидкой пленки ξ в качестве независимой переменной. В новых переменных уравнение (8) примет вид

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{p(p+2)}{\xi^3} \right) + \dot{x}_f^* \left[\xi^2 \sqrt{1+p} \right]^{-1} = 0. \quad (11)$$

Из условий (9) и (10) следует граничное условие для уравнения (11)

$$p = 0, \quad \xi = 0. \quad (12)$$

Достаточно полное исследование задачи (11), (12) можно провести только численно. Характер особой точки $p = \xi = 0$ уравнения (12) может быть исследован методом изоклин или аналитически методом соприкасающихся парабол. Укажем лишь, что особая точка уравнения (11) $\xi = 0$ является фокусом и существует единственная интегральная кривая, входящая в эту точку, причем всегда $p = 0$ при $\xi = 0$, это гарантирует выполнение условия равновесия Юнга на линии трехфазного контакта.

Для натекания жидкости на твердую поверхность $\dot{x}_f > 0$ расчеты показали [4, 27], что $\xi(\delta)$ — монотонно возрастающая функция, причем, если независимая переменная $\delta \rightarrow \infty$, то и зависимая переменная $\xi \rightarrow \infty$. Вблизи линии трехфазного контакта при растекании

существует тонкий переходный слой, кривизна свободной поверхности жидкости в котором достигает значительного значения. Максимум кривизны приходится на $\xi \approx 1$. Соответственно, угол наклона поверхности пленки в пределах этого узкого переходного слоя испытывает резкий скачок, значение которого зависит от скорости растекания \dot{x}_f . Для больших значений переменной ξ зависимость $p(\xi)$ близка к логарифмической.

Если скорость растекания $\dot{x}_f^* \rightarrow +0$, то на всем протяжении рассматриваемой области толщин жидкости $w \sim \sqrt{R}$, угол наклона ее свободной поверхности не отличается от равновесного угла смачивания α_e , т.е. решение для движущейся линии трехфазного контакта, при ее остановке $\dot{x}_f \rightarrow 0$, переходит в решение для неподвижной линии трехфазного контакта $p \approx 0$.

Вследствие наличия узкого переходного слоя вблизи линии трехфазного контакта при растекании жидкости $\dot{x}_f > 0$ угол наклона свободной поверхности при наблюдении может восприниматься как динамический, т.е. зависящий от скорости растекания краевой угол. Этот угол можно также назвать макроскопическим углом смачивания α_d в отличие от реального микроскопического угла смачивания, который в рамках развиваемой теории всегда равен равновесному углу смачивания α_e . Для динамического угла смачивания в работе [4] получены оценки $\alpha_d(\alpha_d^2 - \alpha_e^2) = \theta \dot{x}$, где $\theta = \text{const} > 0$ — неопределенная безразмерная величина, имеющая порядок несколько единиц. Из последнего соотношения следует, что, если выполнено сильное неравенство $\alpha_d^2 \gg \alpha_e^2$, то $\alpha_d^3 \approx \theta \dot{x}_f$. Это соотношение совпадает с законом Таннера [4], хорошо подтвержденным экспериментально. Если наоборот $\alpha_d^2 \rightarrow \alpha_e^2$, то $\alpha_d^2 = \alpha_e^2 + \dot{x}_f \frac{\theta}{2\alpha_e}$, что подтверждается и численным экспериментом [28], и общими физическими соображениями.

Основные результаты. Остановимся более подробно на случае стекания жидкости со смоченной твердой поверхности $\dot{x}_f < 0$. Полученные выше оценки, справедливые для натекания жидкости на твердую поверхность $\dot{x}_f > 0$, здесь не имеют места. Поэтому удобнее вернуться к уравнению (8). Зададим функцию, описывающую форму свободной поверхности вблизи линии трехфазного контакта, в виде ряда $\xi \approx \sum_{i=1}^N a_i \delta^i$. После подстановки в уравнение (8), с учетом граничных условий (10), для нескольких первых коэффициентов ряда

найдем

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = \frac{1}{12} \dot{x}_f^*, \quad a_5 = \frac{1}{40} \dot{x}_f^* \left(\frac{1}{12} \dot{x}_f^* - 1 \right), \quad (13)$$

$$a_6 = - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \dot{x}_f^* \right) a_4, \dots$$

В асимптотическом представлении (13) имеется единственный неопределенный коэффициент a_4 , каждому значению которого соответствует некоторый конкретный вид формы поверхности жидкой пленки вблизи линии трехфазного контакта, т.е. при фиксированном значении скорости \dot{x}_f^* асимптотическое представление (13) определяет однопараметрическое семейство интегральных кривых для уравнения (8) с граничными условиями (10). Указанное асимптотическое представление для заданной скорости $\dot{x}_f^* < 0$ и произвольно задаваемого коэффициента a_4 использовалось для вычисления начального значения толщины жидкой пленки и всех необходимых производных при численном интегрировании уравнения (8).

Общие физические соображения о характере поведения интегральной кривой при больших значениях толщин жидкой пленки требуют ограничения на знак коэффициента $a_4 < 0$. Лишь при этом условии кривизна свободной поверхности жидкости оказывается в среднем по модулю убывающей по толщине свободной поверхности функцией.

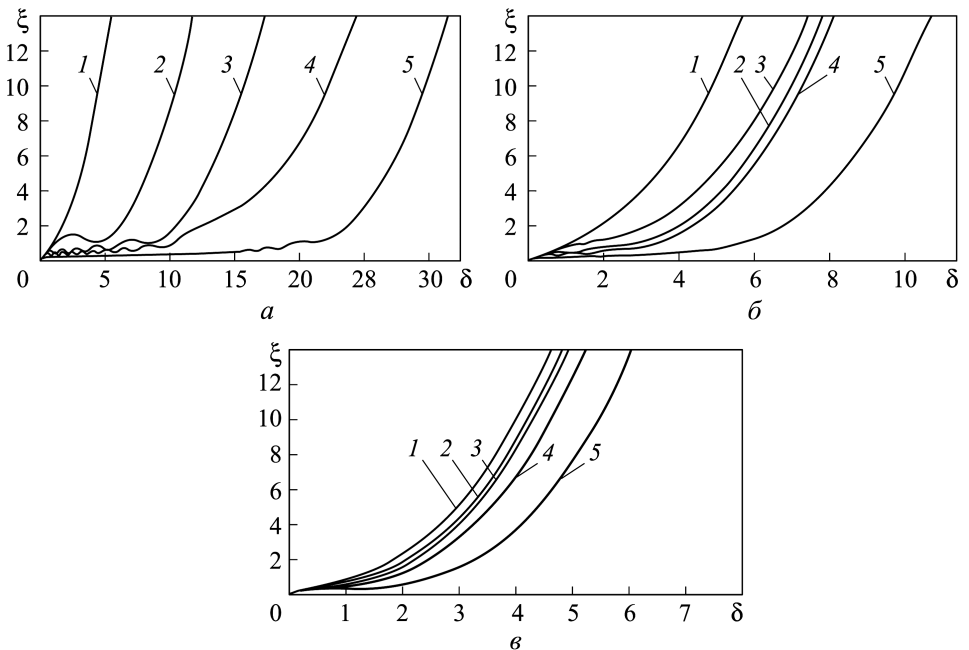


Рис. 2. Профили решений при $\dot{x}_f^* = -0,5$ (а), $-2,0$ (б) и $-5,0$ (в) для значений постоянной $a_4 = 0,1$ (1), $-0,05$ (2), $-0,5$ (3), $-1,0$ (4) и $-5,0$ (5)

Для численной реализации поставленной задачи использовался явный метод Рунге – Кутты четвертого порядка точности. Результаты численного интегрирования приведены на рис. 2 для различных значений скорости стекания \dot{x}_f^* и коэффициента a_4 .

Изменение толщины стекающей пленки оказывается немонотонным. Подобное явление ранее наблюдалось экспериментально [29]. Этот физический эффект, по-видимому, связан с тем, что при стекании невозможно внешними силами “навязать” жидкой пленке микропической толщины режим течения. Форма свободной поверхности при стекании определяется исключительно взаимодействием поверхностного натяжения и расклинивающего давления.

Заключение. В рамках развиваемой теории удалось непротиворечиво описать процесс стекания частично-смачивающей жидкости по плоской поверхности. Установлено, что учет структурной составляющей расклинивающего давления приводит к формальной задаче математической физики, для которой область изменения толщин жидкости оказывается “отграниченной” от твердой поверхности, т.е. $h > 0$, что существенно упрощает проведение численных экспериментов по гидродинамике растекания при смачивании.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мартинсон Л.К., Малов Ю. И. Дифференциальные уравнения математической физики; под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 367 с.
2. Дерягин Б.В., Чураев Н.В. Смачивающие пленки. М.: Наука, 1984. 160 с.
3. Дерягин Б.В., Чураев Н.В., Мулер В.М. Поверхностные силы. М.: Наука, 1985. 399 с.
4. Романов А.С. Об одном способе гидродинамического описания растекания частично смачивающей жидкости по плоской твердой поверхности // Коллоидный журнал. 1990. Т. 52. № 1. С. 93–99.
5. Жен П.Ж. Смачивание: статика и динамика // УФН. 1987. Т. 151. № 4. С. 619–681.
6. Пухначев В.В., Солонников В.А. К вопросу о динамическом краевом угле // ПММ. 1982. Т. 46. № 6. С. 961–971.
7. Radoev B., Stöckelhuber K.W., Tsekov R., Letocart Ph. Wetting film dynamics and stability // Col. Interface Sci. Ser. 3. 2007. P. 151–172.
8. Bing Dai, Gary Leal L., Redondo A. Disjoining pressure for nonuniform thin films // Phys. Rev. E. 2008. Vol. 78. P. 061602.
9. Алиев И.Н., Юрченко С.О. О нелинейных волнах, распространяющихся по поверхности идеальной проводящей жидкости в электрическом поле // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2009. № 5. С. 137–148.
10. Алиев И.Н., Юрченко С.О. Эволюция возмущений заряженной поверхности раздела несмешивающихся невязких жидкостей в зазоре между двумя электродами // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2010. № 5. С. 156–166.
11. Saramago B. Thin liquid wetting films // Current Opinion in Colloid & Interface Science. 2010. Vol. 15. No. 5. P. 330–340.
12. Ren W., Hu D., E W. Continuum models for the contact line problem // Physics of Fluids. 2010. Vol. 22. No. 10. P. 102103–19.

13. *Instability and dewetting of ultrathin solid viscoelastic films on homogeneous and heterogeneous substrates* / Ajoy Patra, Dipankar Bandyopadhyay, Gaurav Tomar, Ashutosh Sharma, Gautam Biswas // *Journal of Chemical Physics*. 2011. Vol. 134. No. 6. P. 064705–11.
14. *Boinovich L., Emelyanko A. Wetting and surface forces* // *Adv. Colloid Interface Sci.* 2011. Vol. 165. P. 60–69.
15. *Tsekov R., Toshev B.V. Capillary pressure of van der waals liquid nanodrops* // *Коллоидный журнал*. 2012. Т. 74. № 2. С. 286.
16. *Colosqui C.E., Kavousanakis M.E., Papathanasiou A.G., Kevrekidis I.G. Mesoscopic model for microscale hydrodynamics and interfacial phenomena: slip, films, and contact-angle hysteresis* // *Phys. Rev. E – Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*. 2013. Vol. 87. No. 1. P. 013302.
17. *Nikolov A., Wasan D. Wetting-dewetting films: the role of structural forces* // *Advances in Colloid and Interface Science*. 2014. Vol. 206. P. 207–221.
18. *Boinovich L., Emelyanko A. The prediction of wettability of curved surfaces on the basis of the isotherms of the disjoining pressure* // *Col. Surf. A: Physicochem. Eng. Aspects*. 2011. Vol. 383. P. 10–16.
19. *Popescu M.N., Oshanin G., Dietrich S., Cazabat A.-M. Precursor films in wetting phenomena* // *J. Phys.: Condens. Matter*. 2012. Vol. 24. P. 243102.
20. *Moulton D.E., Lega J. Effect of disjoining pressure in a thin film equation with nonuniform forcing* // *European J. of Applied Math.* 2013. Vol. 24. P. 887–920.
21. *Snoeijer Jacco H., Andreotti Br. Moving Contact Lines: Scales, Regimes, and Dynamical Transitions* // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2013. Vol. 45. P. 269–292.
22. *Sibley D.N., Nold A., Savva N., Kalliadasis S. A comparison of slip, disjoining pressure, and interface formation models for contact line motion through asymptotic analysis of thin two-dimensional droplet spreading* // *J. of Engineering Math.* 2014.
23. *Chaudhury K., Acharya V.P., Chakraborty S. Influence of disjoining pressure on the dynamics of steadily moving long bubbles inside narrow cylindrical capillaries* // *Phys. Rev. E*. 2014. Vol. 89. P. 053002.
24. *Романов А.С., Семиколенов А.В. Форма свободной поверхности жидкости, находящейся в равновесии со своей α -пленкой* // *Инженерный журнал: наука и инновации*. 2013. Вып. 8. URL: <http://engjournal.ru/catalog/fundamentals/physics/872.html> (дата обращения: 12.01.2015).
25. *Романов А.С., Семиколенов А.В. Безнапорное заполнение капилляра в асимптотической теории смачивания* // *Инженерный журнал: наука и инновации*. 2013. Вып. 4. URL: <http://engjournal.ru/catalog/machin/rocket/699.html> (дата обращения: 12.01.2015).
26. *Самарский А.А., Соболев И.М. Примеры численного расчета температурных волн* // *ЖВММФ*. 1963. Т. 3. № 4. С. 702–719.
27. *Павлов К.Б., Романов А.С., Шахорин А.П. Об одном способе феноменологического описания растекания частично смачивающей жидкости* // *Численные методы механики сплошной среды*. Новосибирск. 1986. Т. 17. № 3. С. 132–138 (Тр. ВЦ и ИТМП СО АН СССР).
28. *Hocking L.M., River A.D. The spreading of a drop by capillary action* // *J. Fluid Mech.* 1982. Vol. 121. No. 1. P. 37–55.
29. *Вода в дисперсных системах* / Б.В. Дерягин, Н.В. Чураев, Ф.Д. Овчаренко и др. М.: Химия, 1989. 288 с.

REFERENCES

- [1] Martinson L.K., Malov Yu.I. Ed. by Zarubin V.S., Krishchenko A.P. *Differential'nye uravneniya matematicheskoy fiziki* [Differential equations of mathematical physics]. Moscow, MGТУ im. N.E. Bauman Publ., 2011. 367 p.

- [2] Deryagin B.V., Churaev N.V. Smachivayushchie plenki [Wetting films]. Moscow, Nauka Publ., 1984. 160 p.
- [3] Deryagin B.V., Churaev N.V., Muler V.M. Poverkhnostnye sily [Surface forces]. Moscow, Nauka Publ., 1985. 399 p.
- [4] Romanov A.S. The way of hydro dynamic description of partially wetting liquid spreading over the flat hard surface. *Kolloidn. Zh.* [Colloid J.], 1990, vol. 52, no. 1, pp. 93–99 (in Russ.).
- [5] Zhen P.Zh. Wetting: statics and dynamics. *Usp. Fiz. Nauk* [Physics-Uspokhi], 1987, vol. 151, no. 4, pp. 619–681 (in Russ.).
- [6] Pukhnachev V.V., Solonnikov V.A. Revisiting the dynamic wetting angle. *Prikl. mat. i mekh.* (J. Appl. Math. Mech.), 1982, vol. 46, no. 6, pp. 961–971.
- [7] Radoev B., Stéckelhuber Kl.W., Tsekov R., Letocart Ph. Wetting Film Dynamics and Stability. *Col. Interface Sci. Ser. 3*, 2007, pp. 151–172.
- [8] Bing Dai, Gary Leal L., Redondo A. Disjoining Pressure for Nonuniform Thin Films. *Phys. Rev. E*, 2008, vol. 78, p. 061602.
- [9] Aliev I.N., Yurchenko S.O. Nonlinear waves spreading over the nonviscous conductive liquid surface in the electric field. *Izv. Akad. Nauk, Mekh. Zhidk. Gaza* [Fluid Dyn.], 2009, no. 5, pp. 137–148 (in Russ.).
- [10] Aliev I.N., Yurchenko S.O. Perturbation transition of the charged interface of non-miscible nonviscous liquids in the clearance between two electrodes. *Izv. Akad. Nauk, Mekh. Zhidk. Gaza* [Fluid Dyn.], 2010, no. 5, pp. 156–166 (in Russ.).
- [11] Saramago B. Thin liquid wetting films. *Current Opinion in Colloid & Interface Science*, 2010, vol. 15, no. 5, pp. 330–340.
- [12] Ren W., Hu D.E.W. Continuum Models for the Contact Line Problem. *Physics of Fluids*. 2010, vol. 22, no. 10, p. 102103–19.
- [13] Patra Ajoy, Bandyopadhyay Dipankar Tomar, Gaurav, Sharma Ashutosh, Biswas Gautam. Instability and Dewetting of Ultrathin Solid Viscoelastic Films on Homogeneous and Heterogeneous Substrates. *Journal of Chemical Physics*, 2011, vol. 134, no. 6, p. 064705–11.
- [14] Boinovich L., Emelyanko A. Wetting and Surface Forces. *Adv. Colloid Interface Sci.*, 2011, vol. 165, pp. 60–69.
- [15] Tsekov R., Toshev B.V. Capillary Pressure of Van der Waals Liquid Nanodrops. *Kolloidn. Zh.* [Colloid J.], 2012, vol. 74, no. 2, p. 286.
- [16] Colosqui C.E., Kavousanakis M.E., Papathanasiou A.G., Kevrekidis I.G. Mesoscopic Model for Microscale Hydrodynamics and Interfacial Phenomena: Slip, Films, and Contact-Angle Hysteresis. *Phys. Rev. E. Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 2013, vol. 87, no. 1, p. 013302.
- [17] Nikolov A., Wasan D. Wetting-Dewetting Films: The Role of Structural Forces. *Advances in Colloid and Interface Science*, 2014, vol. 206, pp. 207–221.
- [18] Boinovich L., Emelyanko A. The Prediction of Wettability of Curved Surfaces on the Basis of the Isotherms of the Disjoining Pressure. *Col. Surf. A: Physicochem. Eng. Aspects*, 2011, vol. 383, pp. 10–16.
- [19] Popescu M.N., Oshanin G., Dietrich S., Cazabat A.-M. Precursor Films in Wetting Phenomena. *J. Phys.: Condens. Matter.*, 2012, vol. 24, p. 243102.
- [20] Moulton D.E., Lega J. Effect of Disjoining Pressure in a Thin Film Equation with Nonuniform Forcing. *European J. of Applied Math.*, 2013, vol. 24, pp. 887–920.
- [21] Snoeijer Jacco H., Andreotti Br. Moving Contact Lines: Scales, Regimes, and Dynamical Transitions. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 2013, vol. 45, pp. 269–292.
- [22] Sibley D.N., Nold A., Savva N., Kalliadas S. A Comparison of Slip, Disjoining Pressure, and Interface Formation Models for Contact Line Motion Through Asymptotic Analysis of Thin Two-Dimensional Droplet Spreading. *J. of Engineering Math.*, 2014.

- [23] Chaudhury K., Acharya V.P., Chakraborty S. Influence of Disjoining Pressure on the Dynamics of Steadily Moving Long Bubbles Inside Narrow Cylindrical Capillaries. *Phys. Rev. E*. 2014, vol. 89, p. 053002.
- [24] Romanov A.S., Semikolenov A.V. Form of a free liquid surface, which is in equilibrium with its alfa-film. *Jelekt. Nauchno-Tehn. Izd. "Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovacii"* [El. Sc.-Techn. Publ. "Eng. J.: Science and Innovation"], 2013, iss. 8. URL: <http://engjournal.ru/catalog/fundamentals/physics/872.html> (accessed 12.01.2015).
- [25] Romanov A.S., Semikolenov A.V. Depressurized capillary filling in the asymptotic theory of wetting. *Jelekt. Nauchno-Tehn. Izd. "Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovacii"* [El. Sc.-Techn. Publ. "Eng. J.: Science and Innovation"], 2013, iss. 4. URL: <http://engjournal.ru/catalog/machin/rocket/699.html> (accessed 12.01.2015).
- [26] Samarskiy A.A., Sobol' I.M. Numeral computation examples of temperature waves. *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* [Comput. Math. Math. Phys.], 1963, vol. 3, no. 4, pp. 702–719 (in Russ).
- [27] Pavlov K.B., Romanov A.S., Shakhorin A.P. The way of phenomenological description of partially wetting liquid spreading. *Chislennyye metody mekhaniki sploshnoy sredy* [Numerical procedures of continuum mechanics]. Novosibirsk, 1986, vol. 17, no. 3, pp. 132–138 (in Russ.).
- [28] Hocking L.M., River A.D. The spreading of a drop by capillary action. *J. Fluid Mech.*, 1982, vol. 121, no. 1, pp. 37–55.
- [29] Deryagin B.V., Churaev N.V., Ovcharenko F.D. Voda v dispersnykh sistemakh [Water in disperse systems]. Moscow, Khimiya Publ., 1989. 288 p.

Статья поступила в редакцию 30.03.2015

Романов Александр Сергеевич — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры “Физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Romanov A.S. — D.Sc. (Phys.-Math.), Professor of Physics, Department of Physics, Bauman Moscow State Technical University

Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Семиколонов Андрей Владимирович — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры “Физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Semikolenov A.V. — Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor of Physics, Bauman Moscow State Technical University.

Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Пробьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Романов А.С., Семиколонов А.В. Форма пленки частично смачивающей жидкости при стекании со смоченной поверхности // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2015. № 5. С. 88–99.

Please cite this article in English as:

Romanov A.S., Semikolenov A.V. Film shape of partially wetting liquid while flowing down wetted surface. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2015, no. 5, pp. 88–99.