DOI: 10.18698/1812-3368-2016-1-17-26

УДК 517.938

РЕШЕНИЕ ТЕРМИНАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПРИ НАЛИЧИИ ОГРАНИЧЕНИЙ НА СОСТОЯНИЯ

Т.С. Касаткина

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: kasatkina_t_s@mail.ru

Предложен метод решения терминальных задач с ограничениями на состояния для аффинных систем второго порядка регулярного канонического вида. Решение задачи заключается в построении функции, определяющей фазовую кривую, которая удовлетворяет заданным граничным условиям. Описан алгоритм корректирования построенной функции таким образом, чтобы соответствующая ей траектория системы удовлетворяла ограничениям. С помощью предложенного метода решена задача терминального управления при наличии ограничений на состояния для системы, описывающей колебания математического маятника.

***Ключевые слова*: терминальное управление, фазовая кривая, ограничения на состояния.

SOLUTION OF TERMINAL TASKS FOR SECOND-ORDER SYSTEMS UNDER STATE CONSTRAINTS

T.S. Kasatkina

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: kasatkina_t_s@mail.ru

The solution of terminal tasks with state constraints for a second-order affine systems of regular canonical form is suggested. The solution is to construct the function that defines a phase curve satisfying given boundary conditions. The function correction algorithm is described in such a way that the corresponding system trajectory should satisfy state constraints. The task of terminal control under state constrants for a system, describing oscillations of mathematical pendulum, is solved by using the suggested method.

***Keywords*: terminal control, phase curve, state constraints.

Введение. Решение терминальной задачи заключается в построении программного управления, которое реализует движение вдоль траектории, соединяющей заданное начальное положение системы с заданным конечным положением. Формулировка задачи терминального управления может содержать ограничения на состояния. Они могут следовать из физического смысла задачи или возникнуть по другим причинам. Независимо от природы ограничений их наличие существенно осложняет решение задачи.

Исследованию необходимых и достаточных условий существования решения задач оптимального управления с заданными краевыми условиями и ограничениями посвящены работы [1–3]. Однако в этих работах не освещены алгоритмы синтеза оптимальных траекторий. Разработаны стратегии построения оптимальных траекторий системы [4, 5], но они никак не учитывают наличие ограничений. Метод учета ограничений на состояния предложен в работе [6], но он применим только для линейных систем. Решение терминальных задач при отсутствии ограничений для систем, которые преобразуются к квазиканоническому виду, исследовано в работах [7–11]. Подход к решению терминальных задач методом накрытий, который является обобщением стратегии решения терминальных задач для плоских систем, предложен в работах [12, 13].

В настоящей статье изложен подход, который заключается в построении непрерывно дифференцируемой кривой в фазовом пространстве, соединяющей начальное и конечное положения системы и удовлетворяющей заданным ограничениям. Построение фазовой кривой в таком виде обеспечивает непрерывность управления, реализующего движение вдоль нее. Предложенный подход является усовершенствованием стратегии, приведенной в работе [14]. Эта стратегия заключается в добавлении к функции в виде полинома, определяющей искомую фазовую кривую системы, которая в общем случае не удовлетворяет ограничениям на состояния, знакопостоянной функции. Влияние добавляемой функции на вид фазовой кривой регулируется варьированием параметра. В рамках указанной стратегии происходит глобальная модификация фазовой кривой.

Подход, позволяющий выбирать фазовые кривые из параметрического множества, которое ограничено предельно допустимыми фазовыми кривыми, обеспечивающими решение поставленной задачи, описан в работе [15]. В этой работе изменение исходной фазовой кривой происходит только в тех областях фазового пространства, где не выполняются ограничения на состояние. Другими словами, корректирование фазовой кривой происходит локально, что обеспечивает дополнительную гибкость в решении задачи.

Суть изложенного в настоящей работе подхода схожа со стратегией, описанной в работе [16], где задача сводится к поиску функции, которая определяет терминальную траекторию системы как полинома, зависящего от времени. В таком подходе используется другая независимая переменная, что позволяет работать с полиномами более низкой размерности.

Изложена постановка задачи, построена фазовая кривая, соединяющая начальное и конечное положения аффинной системы второго порядка со скалярным управлением, такая, что управление, реализующее движение вдоль этой кривой, имеет заданные граничные значения. Приведен алгоритм изменения построенной фазовой кривой так, чтобы новая фазовая кривая удовлетворяла ограничениям на состояния. Простроено управление, реализующее движение системы по построенной фазовой кривой. Приведены результаты решения задачи терминального управления для системы второго порядка, описывающей колебания математического маятника при наличии ограничений на состояние с использованием изложенного подхода, а также краткое обсуждение полученных результатов.

Постановка задачи. Рассмотрим аффинную систему канонического вида со скалярным управлением u:

$$\ddot{y} = f(\bar{y}) + g(\bar{y})u; \tag{1}$$

$$h_k(\bar{y}) \leq 0, \quad k = \overline{1, K}, \tag{2}$$

где $\bar{y} = (y\ \dot{y}) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ — вектор состояния системы (1) . Примем, что система (1) является регулярной, т.е. $g(\bar{y}) \neq 0$ для всех $\bar{y}$, удовлетворяющих ограничениям на состояния (2) . Требуется найти непрерывное управление $u(t)$ с граничными значениями

$$u\big|_{t=0} = u_0, \quad u\big|_{t=t_*} = u_*, \tag{3}$$

которое является решением задачи терминального управления для системы (1) с граничными условиями на переменные состояния

$$\bar{y}|_{t=0} = \bar{y}_0 = (y_0\ \dot{y}_0)^{\mathrm{T}}, \quad \bar{y}|_{t=t_*} = \bar{y}_* = (y_*\ \dot{y}_*)^{\mathrm{T}}; \quad \bar{y}_0, \bar{y}_* \in \Omega. \tag{4}$$

Время t_* не фиксировано.

Каждое решение $u(t)$ поставленной терминальной задачи определяет функцию $y(t)$, которая является решением задачи Коши для замкнутой системы $\ddot{y} = f(y, \dot{y}) + g(y, \dot{y})u(t)$; $y|_{t=0} = y_0$. Функция $y(t)$ и ее производная по времени удовлетворяют системе ограничений (2).

Граничные значения вторых производных переменной y по времени t однозначно определены из условий (3), (4): $\ddot{y}_0 = f(y_0, \dot{y}_0) + g(y_0, \dot{y}_0)u_0$; $\ddot{y}_* = f(y_*, \dot{y}_*) + g(y_*, \dot{y}_*)u_*$.

Исходная терминальная задача может быть сформулирована в виде задачи поиска такой функции $y(t)$, что

$$\begin{array}{l}
y\big|_{t=0} = y_0, \quad y\big|_{t=t_*} = y_*; \\
\dot{y}\big|_{t=0} = \dot{y}_0, \quad \dot{y}\big|_{t=t_*} = \dot{y}_*; \\
\ddot{y}\big|_{t=0} = \ddot{y}_0, \quad \ddot{y}\big|_{t=t_*} = \ddot{y}_*; \\
h_k(y, \dot{y}) \leq 0, \quad k = \overline{1, K}, \quad t \in [0; t_*],
\end{array}$$

поскольку справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Управление*

$$u(t) = \frac{\ddot{y}(t) - f(y(t), \dot{y}(t))}{g(y(t), \dot{y}(t))} \tag{5}$$

является решением терминальной задачи (1)–(4).

Решение терминальной задачи при отсутствии ограничений. В классе многочленов существует такая функция $\Psi(y)$:

$$\Psi(y) = c_0 + c_1(y - y_0) + c_2(y - y_0)^2 + c_3(y - y_0)^3; \tag{6}$$

$$\Psi(y_0) = \dot{y}_0, \quad \Psi(y_*) = \dot{y}_*; \tag{7}$$

$$\dot{y}_0 \left. \frac{d\Psi(y)}{dy} \right|_{y=y_0} = \ddot{y}_0, \quad \dot{y}_* \left. \frac{d\Psi(y)}{dy} \right|_{y=y_*} = \ddot{y}_*, \tag{8}$$

что график функции $\dot{y} = \Psi(y)$ соединяет начальное положение $\bar{y}_0$ с конечным $\bar{y}_*$ [17]. Ее коэффициенты определены единственным образом

$$\begin{aligned} & c_0 = \dot{y}_0; \\ & c_1 = \frac{\ddot{y}_0}{\dot{y}}; \\ & \begin{pmatrix} c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\Delta^2 & -\Delta^3 \\ -2\Delta & \Delta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{y}_* - c_1\Delta - c_0 \\ \ddot{y}_*/\dot{y}_* - c_1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{9}$$

где $\Delta = y_* - y_0$.

Пусть $y(t)$ — решение задачи Коши

$$\frac{dy}{dt} = \Psi(y), \quad y|_{t=0} = y_0. \tag{10}$$

В этом случае выполнение условий (7), (8) гарантирует, что управление в виде (5), реализующее движение по траектории $y = y(t)$, $\dot{y} = \Psi(y(t))$, имеет граничные значения (3).

Учет ограничений на состояние. Ограничимся условиями (2) вида

$$0 < c_{y1} < \dot{y} < c_{y2}. \tag{11}$$

Рассмотрим ситуацию, при которой ограничение (11) нарушается. С учетом сделанных допущений (10) это равносильно тому, что построенная функция $\Psi(y)$ не удовлетворяет ограничению вида

$$0 < c_{y1} < \Psi(y) < c_{y2}, \quad y \in [y_0; y_*]. \tag{12}$$

Тогда возникает $N \in \mathbb{N}$ непересекающихся отрезков на оси Oy фазовой плоскости, на каждом из которых нарушается какое-либо из неравенств (12).

На каждом отрезке к исходной функции $\Psi(y)$ добавляется полином, зависящий от фазовой переменной y с параметрическими коэффициентами, который знакопостоянен на рассматриваемом отрезке. Изменением значения параметра можно добиться выполнения ограничений. Техника корректирования функции $\Psi(y)$ заключается в следующем.

1. Находим координаты $[y_l; y_r]$ первого отрезка, на котором нарушается ограничение.

2. Расширяем полученный отрезок с некоторым шагом в обе стороны. Обозначим расширенный отрезок через $[\tilde{y}_l; \tilde{y}_r]$. Рассмотрим на отрезке $[\tilde{y}_l;\ \tilde{y}_r]$ функцию

$$\tilde{\Psi}(y) = \Psi(y) + d\psi(y), \tag{13}$$

где $\psi(y) = (y - \tilde{y}_l)^2(y - \tilde{y}_r)^2$. Расширение происходит до тех пор, пока не найдется такая постоянная $d \in [d_{\min}; d_{\max}]$, что функция $\tilde{\Psi}(y)$ удовлетворяет ограничениям $0 < c_{y1} < \tilde{\Psi}(y) < c_{y2}$, $y \in [\tilde{y}_l; \tilde{y}_r]$. На концах отрезка $[\tilde{y}_l; \tilde{y}_r]$ значения и производные функции $\psi_d(y)$ нулевые, откуда следует выполнение условий

$$\begin{aligned}
&\tilde{\Psi}(\tilde{y}_l) = \Psi(\tilde{y}_l); \quad \tilde{\Psi}(\tilde{y}_r) = \Psi(\tilde{y}_r);\\
&\left.\frac{d\tilde{\Psi}(y)}{dy}\right|_{y=\tilde{y}_l} = \left.\frac{d\Psi(y)}{dy}\right|_{y=\tilde{y}_l}; \quad \left.\frac{d\tilde{\Psi}(y)}{dy}\right|_{y=\tilde{y}_r} = \left.\frac{d\Psi(y)}{dy}\right|_{y=\tilde{y}_r}
\end{aligned}$$

и C^1-гладкость функции

$$\Psi_d(y) = \begin{cases} \Psi(y), \quad y \in [y_0; \tilde{y}_l];\\ \Psi(y) + d\psi(y), \quad y \in [\tilde{y}_l; \tilde{y}_r];\\ \Psi(y), \quad [\tilde{y}_r; y_*] \end{cases}$$

на отрезке $[y_0; y_*]$. Функция $\psi(y)$ положительна на интервале $(\tilde{y}_l; \tilde{y}_r)$, поэтому варьируя положительные значения параметра d, можно добиться выполнения условия $0 < c_{y1} < \Psi(y) + d\psi(y)$, $y \in [\tilde{y}_l; \tilde{y}_r]$, и, следовательно, — левого неравенства (12) $0 < c_{y1} < \Psi_d(y)$, $y \in [y_0;\ y_*]$. Аналогично, варьируя отрицательные значения параметра d, можно добиться выполнения правого неравенства (12) $\Psi_d(y) < c_{y2}$, $y \in [y_0; y_*]$. Если необходимое значение параметра d найдено, то фазовая кривая $\dot{y} = \Psi_d(y)$ удовлетворяет условию (11). Если искомое расширение не найдено, то заданное ограничение является слишком жестким и в рамках данного подхода нельзя скорректировать исходную кривую $\dot{y} = \Psi(y)$.

3. Если в п. 2 было определено искомое расширение, то, варьируя параметр d, находим такой отрезок $[d_-; d_+]$, что при всех значениях параметра d, принадлежащих к этому отрезку, кривая $\tilde{\Psi}(y)$ не выходит за ограничения (12). Для того чтобы обеспечить наименьшее значение

$|\tilde{\Psi}(y) - \Psi(y)|_2$ на отрезке $[\tilde{y}_l; \tilde{y}_r]$, следует выбрать $d = d_-$, если на текущем отрезке нарушалось ограничение снизу $0 < c_{y1} < \Psi(y)$, и $d = d_+$, если нарушалось ограничение сверху $\Psi(y) < c_{y2}$.

4. Переходим к следующему отрезку на оси Oy фазовой плоскости, на котором функция $\Psi(y)$ выходит за ограничения (12) (если такое есть) и переходим к п. 1. Если таких отрезков больше нет, то алгоритм завершает свою работу.

После корректного завершения работы алгоритма получим C^1-гладкую функцию $\Phi(y)$, $y \in [y_0; y_*]$, которая совпадает с функцией $\Psi(y)$ на тех отрезках, где выполнены ограничения (12) и имеет вид (13) на отрезках $[\tilde{y}_{li}; \tilde{y}_{ri}]$, $i = \overline{1, N}$. Каждому отрезку $[\tilde{y}_{li}; \tilde{y}_{ri}]$, $i = \overline{1, N}$, соответствует свое значение параметра d_i. Фазовая кривая $\dot{y} = \Phi(y)$ удовлетворяет ограничениям (11) на отрезке $y \in [y_0; y_*]$. Если условие (12) выполнено, то функция $\Phi(y)$ совпадает с функцией $\Psi(y)$ на отрезке $y \in [y_0; y_*]$. Поэтому в соответствии с теоремой 1 управление

$$u(t) = \frac{\Phi(y(t)) \left. \dfrac{d\Phi(y)}{dy} \right|_{y=y(t)} - f(y(t), \Phi(y(t)))}{g(y(t), \Phi(y(t)))},$$

где $y(t)$ — решение задачи Коши; $\dfrac{dy}{dt} = \Phi(y)$, $y(0) = y_0$ — решение терминальной задачи (1)–(4).

Пример. Представлено решение задачи терминального управления для системы, описывающей колебания математического маятника

$$\ddot{y} = \sin(y) + u \tag{14}$$

с граничными значениями состояния

$$\bar{y}_0 = \begin{pmatrix} \dfrac{\pi}{4} & 0{,}5 \end{pmatrix}^{\text{т}}, \quad \bar{y}_* = \begin{pmatrix} \dfrac{3\pi}{4} & 0{,}5 \end{pmatrix}^{\text{т}} \tag{15}$$

и управления $u_0 = u_* = 0$ при наличии ограничений на состояние системы

$$0{,}3 < \dot{y} < 0{,}7. \tag{16}$$

Фазовая кривая $\dot{y} = \Psi(y)$ (6) на отрезке $[y_0; y_*]$, соединяющая начальное положение $\bar{y}_0$ с конечным $\bar{y}_*$, такая, что ограничения (16) не выполнены. Для того чтобы обеспечить выполнение ограничений, функция $\Psi(y)$ заменяется функцией $\Phi(y)$, алгоритм построения которой приведен выше.

Двойное неравенство $0{,}3 < \Psi(y) < 0{,}7$ не выполнено на двух отрезках оси Oy: $[y_{l1}; y_{r1}] = [1{,}027; 1{,}2158]$; $[y_{l2}; y_{r2}] = [1{,}9274; 2{,}1159]$. Функция $\Psi(y)$ заменена функцией $\tilde{\Psi}_1(y) = \Psi(y) + d_1\psi_1(y)$, $d_1 = -34{,}88$,

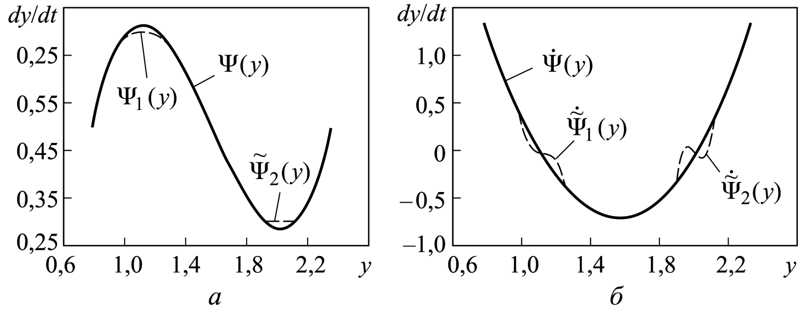

Рис. 1. Зависимости функции $\Phi(y)$ (*а*) и производной функции $\Phi(y)$ (*б*)

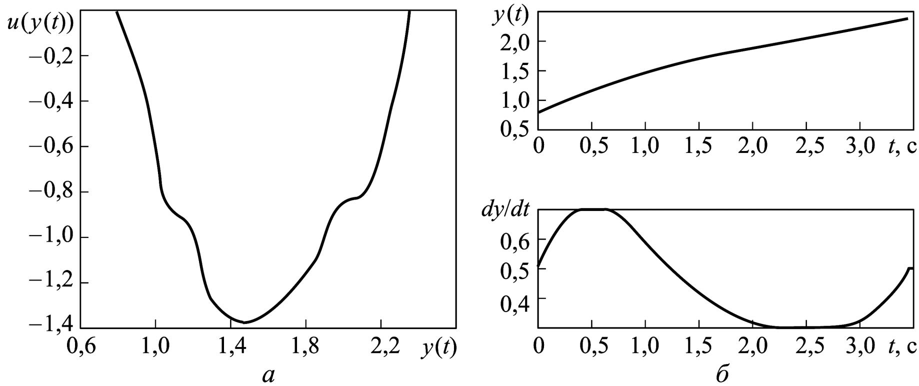

Рис. 2. Управление (*а*), реализующее движение по фазовой кривой, и траектория (*б*), определенная для системы (14)

на отрезке $[\tilde{y}_{l1}; \tilde{y}_{r1}] = [0{,}9802; 1{,}2629]$ и функцией $\tilde{\Psi}_2(y) = \Psi(y) + d_2\psi_2(y)$, $d_2 = 93{,}24$ — на отрезке $[\tilde{y}_{l2}; \tilde{y}_{r2}] = [1{,}9069; 2{,}1363]$ (рис. 1).

Функция $\Phi(y)$ удовлетворяет условию $0{,}3 < \Phi(y) < 0{,}7$, $y \in [y_0; y_*]$. Управление, реализующее движение вдоль фазовой кривой $\dot{y} = \Phi(y)$, представлено на рис. 2, *а*. Сплошной линией построено управление, обеспечивающее движение по фазовой траектории $\dot{y} = \Psi(y)$, штриховой — управления, которые реализуют движения по фазовым кривым $\dot{y} = \tilde{\Psi}_1(y)$ и $\dot{y} = \tilde{\Psi}_2(y)$.

Траектория, определенная для системы (14), которая удовлетворяет условиям (15) и (16), приведена на рис. 2, *б*. Время движения из начального состояния в конечное вдоль фазовой кривой $\dot{y} = \Phi(y)$ составляет $t_* = 3{,}4667$ c.

Заключение. Изложено решение задач терминального управления при наличии ограничений на состояния для систем второго порядка регулярного канонического вида. Построена функция, определяющая кривую на фазовой плоскости, движение вдоль которой является решением терминальной задачи без ограничений. Описан алгоритм модификации построенной функции таким способом, чтобы соответствующая ей новая фазовая кривая удовлетворяла наложенным ограничениям. Указано непрерывное управление, реализующее движение вдоль новой фазовой кривой, которое является решением поставленной задачи. Представлено численное решение задачи терминального управления с ограничениями на состояния для системы, описывающей колебания математического маятника.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 14-07-00813, № 13-07-00743).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Arutyunov A.V.*, *Aseev S.M.* The Degeneracy Phenomenon in Optimal Control Problems with State Constraints // In Proceedings of 36th IEEE Conference on Decision and Control. 1997. Vol. 1. P. 300–304.
2. *Zeidan V.* Second-order Conditions for Optimal Control Problems with Mixed State-Control Constraints // Proceedings of the 32nd on Decision and Control. San Antonio, Texas, 1993. P. 3800–3806.
3. *Pales Z.*, *Zeidan V.* Strong Local Optimality Conditions for Control Problems with Mixed State-Control Constraints // Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control. Las Vegas, USA, Dec. 2002. P. 4738–4744.
4. *Huifang W.*, *Yangzhou C.*, *Soueres P.* A Geometric Algorithm to Compute Time-Optimal Trajectories for a Bidirectional Steered Robot // IEEE Transaction on Robotics. 2009. Vol. 25. Iss. 2. P. 399–413.
5. *Velagic J.*, *Delic E.* Calculation of optimal trajectories of mobile robot based on minimal curving radius and task free based approach // 13th International Symposium on Information, Communication and Automation Technologies, Sarajevo, 27–29 Oct. 2011. P. 1–8.
6. *Patil D.U.*, *Chakraborty D*. Computation of Optimal Feedback Control Using Groebner Basis // IEEE Transaction on Automatic Control. 2014. Vol. 59. Iss. 8. P. 2271–2276.
7. *Фетисов Д.А.* Решение терминальных задач для аффинных систем // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. № 10. С. 123–137. URL: http://technomag.bmstu.ru/doc/604151.html DOI: 10.7463/1013.0604151
8. *Фетисов Д.А.* Об одном методе решения терминальных задач для аффинных систем // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. № 11. С. 383–401. URL: http://technomag.bmstu.ru/doc/622543.html DOI: 10.7463/1113.0622543
9. *Фетисов Д.А.* Решение терминальных задач для многомерных аффинных систем на основе преобразования к квазиканоническому виду // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2014. № 5. С. 16–31.
10. *Фетисов Д.А*. Достаточное условие управляемости многомерных аффинных систем. Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2014. № 11. URL: http://technomag.bmstu.ru/doc/737321.html С. 281–293. DOI: 10.7463/1114.0737321
11. *Фетисов Д.А.* Решение терминальных задач для аффинных систем квазиканонического вида на основе орбитальной линеаризации // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50. № 12. С. 1660–1668. DOI: 10.1134/S0374064114120103
12. *Четвериков В.Н*. Метод накрытий для решения задач терминального управления // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2014. № 2. С. 125–143. URL: http://technomag.bmstu.ru/doc/699730.html DOI: 10.7463/0214.0699730
13. *Белинская Ю.С.*, *Четвериков В.Н.* Метод накрытий для терминального управления с учетом ограничений // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50. № 12. С. 1629–1639. DOI: 10.1134/S0374064114120073

14. *Касаткина Т.С.*, *Крищенко А.П.* Решение терминальной задачи для систем 3-го порядка методом орбитальной линеаризации // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2014. № 12. С. 781–797. URL: http://technomag.bmstu.ru/doc/742829.html DOI: 10.7463/1214.0742829
15. *Крищенко А.П.* Параметрические множества решений интегральных уравнений. Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2014. № 3. С. 3–10.
16. *Касаткина Т.С.*, *Крищенко А.П.* Метод вариаций решения терминальных задач для двумерных систем канонического вида при наличии ограничений // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2015. № 5. URL: http://technomag.bmstu.ru/doc/766238.html С. 266–280. DOI: 10.7463/0515.076623
17. *Краснощеченко В.И.*, *Крищенко А.П.* Нелинейные системы: геометрические методы анализа и синтеза. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. 520 с.

REFERENCES

[1] Arutyunov A.V., Aseev S.M. The Degeneracy Phenomenon in Optimal Control Problems with State Constraints. *In Proceedings of 36th IEEE Conference on Decision and Control*, 1997, vol. 1, pp. 300–304.
[2] Zeidan V. Second-order Conditions for Optimal Control Problems with Mixed State-Control Constraints. *Proceedings of the 32nd on Decision and Control*. San Antonio, Texas, 1993, pp. 3800–3806.
[3] Pales Z., Zeidan V. Strong Local Optimality Conditions for Control Problems with Mixed State-Control Constraints. *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*. Las Vegas, USA, Dec. 2002, pp. 4738–4744.
[4] Huifang W., Yangzhou C., Soueres P. A Geometric Algorithm to Compute Time-Optimal Trajectories for a Bidirectional Steered Robot. *IEEE Transaction on Robotics*, 2009, vol. 25, iss. 2, pp. 399–413.
[5] Velagic J., Delic E. Calculation of optimal trajectories of mobile robot based on minimal curving radius and task free based approach. *13th International Symposium on Information, Communication and Automation Technologies*. Sarajevo, 27–29 Oct., 2011, pp. 1–8.
[6] Patil D.U., Chakraborty D. Computation of Optimal Feedback Control Using Groebner Basis. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 2014, vol. 59, iss. 8, pp. 2271–2276.
[7] Fetisov D.A. Solving terminal control problems for affine systems. *Nauka i obrazovanie. MGTU im. N.E. Baumana* [Science & Education of the Bauman MSTU. Electronic Journal], 2013. no. 10, pp. 123–137. Available at: http://technomag.bmstu.ru/doc/604151.html DOI: 10.7463/1013.0604151
[8] Fetisov D.A. A method for solving terminal control problems for affine systems. *Nauka i obrazovanie. MGTU im. N.E. Baumana* [Science & Education of the Bauman MSTU. Electronic Journal], 2013. no. 11, pp. 383–401. Available at: http://technomag.bmstu.ru/doc/622543.html DOI: 10.7463/1113.0622543
[9] Fetisov D.A. Solving terminal problems for multidimensional affine systems based on transformation to a quasicanonical form. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2014, no. 5, pp. 16–31 (in Russ.).
[10] Fetisov D.A. Sufficient Controllability Condition for Multidimensional Affine Systems. *Nauka i obrazovanie. MGTU im. N.E. Baumana* [Science & Education of the Bauman MSTU. Electronic Journal], 2014, no. 11, pp. 281–293. Available at: http://technomag.bmstu.ru/doc/737321.html DOI: 10.7463/1114.0737321
[11] Fetisov D.A. Solution of Terminal Problems for Affine Systems in Quasicanonical Form on the Basis of Orbital Linearization. *Differential Equations*, 2014, vol. 50, no. 12, pp. 1664–1672. DOI: 10.1134/S0012266114120106

[12] Chetverikov V.N. The covering method for the solution of terminal control problem. *Nauka i obrazovanie. MGTU im. N.E. Baumana* [Science & Education of the Bauman MSTU. Electronic Journal], 2014, no. 2, pp. 125–143. Available at: http://technomag.bmstu.ru/doc/699730.html DOI: 10.7463/0214.0699730
[13] Belinskaya Yu.S., Chetverikov V.N. Covering Method for Terminal Control with Regard of Constraints. *Differential Equations*, 2014, vol. 50, no. 12, pp. 1632–1642. DOI: 10.1134/S0012266114120076
[14] Kasatkina T.S., Krishchenko A.P. Solving the Terminal Problem for the Third Order Systems Using the Orbital Linearization. *Nauka i obrazovanie. MGTU im. N.E. Baumana* [Science & Education of the Bauman MSTU. Electronic Journal], 2014, no. 12, pp. 781–797. Available at: http://technomag.bmstu.ru/doc/742829.html DOI: 10.7463/1214.0742829
[15] Krishchenko A.P. Parametric Sets of Integral Equations Solutions. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2014, no. 3, pp. 3–10 (in Russ.).
[16] Kasatkina T.S., Krishchenko A.P. Variations Method to Solve Terminal Problems for the Second Order Systems of Canonical Form with State Constraints. *Nauka i obrazovanie. MGTU im. N.E. Baumana* [Science & Education of the Bauman MSTU. Electronic Journal], 2015, no. 5, pp. 266–280. Available at: http://technomag.bmstu.ru/doc/766238.html
DOI: 10.7463/0515.076623
[17] Krasnoshchechenko V.I., Krishchenko A.P. Nelineynye sistemy: geometricheskie metody analiza i sinteza [Nonlinear systems: geometrical methods of analysis and synthesis]. Moscow, MGTU im. N.E. Baumana Publ., 2005. 520 p.

Статья поступила в редакцию 17.06.2015

Касаткина Татьяна Сергеевна — аспирантка кафедры “Математическое моделирование” МГТУ им. Н.Э. Баумана.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Kasatkina T.S. — post-graduate student of Mathematical Modelling department, Bauman Moscow State Technical University.
Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Касаткина Т.С. Решение терминальных задач для систем второго порядка при наличии ограничений на состояния // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2016. № 1. С. 17–26.
DOI: 10.18698/1812-3368-2016-1-17-26

Please cite this article in English as:

Kasatkina T.S. Solution of terminal tasks for second-order systems under state constraints. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2016, no. 1, pp. 17–26.
DOI: 10.18698/1812-3368-2016-1-17-26