ФИЗИКА

DOI: 10.18698/1812-3368-2016-1-27-35

УДК 536.75

ОПИСАНИЕ ФЛУКТУАЦИЙ СКОРОСТИ БРОУНОВСКОЙ ЧАСТИЦЫ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ПУАССОНОВСКОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

А.Н. Морозов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: amor59@mail.ru

Проведено описание движения броуновской частицы при воздействии на нее пуассоновского процесса. Найдено стационарное решение для характеристической функции флуктуаций скорости броуновской частицы для случая, если воздействие на нее описывается пуассоновским процессом с нормально распределенными скачками. Вычислены первые четыре момента функции распределения флуктуаций скорости броуновской частицы, а также эксцесс и мера Кульбака для этого распределения. Полученные результаты применены для нахождения характеристической функции флуктуаций напряжения на электролитической ячейке. Установлено, что мера Кульбака флуктуаций напряжения на электролитической ячейке обратно пропорциональна интенсивности пуассоновского процесса и числа ионов в малом объеме электролита. Решено уравнение для характеристической функции распределения флуктуаций скорости броуновской частицы, учитывающее флуктуации коэффициента вязкого трения.

***Ключевые слова*:** броуновское движение, флуктуации скорости, пуассоновский процесс, характеристическая функция, вязкое трение, мера Кульбака, электролитическая ячейка.

FLUCTUATIONS OF THE BROWNIAN PARTICLE VELOCITY INFLUENCED BY A RANDOM POISSON PROCESS

A.N. Morozov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: amor59@mail.ru

Brownian motion of a particle influenced by a Poisson process is described. The stationary solution for the characteristic velocity fluctuation function of a Brownian particle is found when influence on it is described by the Poisson process with normal jump distribution. The first four moments of the Brownian particles velocity distribution function as well as kurtosis and Kullback's measure for the distribution have been calculated. The results obtained have been used to find the characteristic function of voltage fluctuations in an electrolysis cell. Kullback's measure for voltage fluctuations in an electrolysis cell is inversely related to the Poisson process intensity and the number of ions in a small volume of electrolyte. The equation for characteristic function of velocity fluctuation distribution of a Brownian particle taking into account fluctuations of the viscous friction coefficient is solved.

***Keywords*:** Brownian motion, velocity fluctuation, Poisson process, characteristic function, viscous friction, Kullback's measure, electrolysis cell.

Описание диффузии и броуновского движения как пуассоновских случайных процессов предложено в работах [1, 2], там же получены уравнения, описывающие поведение соответствующих характеристических функций. Задача нахождения стационарных распределений для стохастической системы взаимодействующих частиц рассмотрена в работе [3], а функции распределения флуктуаций неравномерности вращения Земли получены в работе [4]. Цель настоящей работы — нахождение решений уравнения для характеристической функции флуктуаций скорости броуновской частицы и определение первых четырех моментов распределения этих флуктуаций.

Рассмотрим одномерное броуновское движение частицы, если воздействие частиц среды на броуновскую частицу описывается общим пуассоновским процессом $W_\xi(t)$ со скачками, распределенными по нормальному закону. В этом случае пуассоновский процесс $W_\xi(t)$ задается характеристической функцией вида [2]

$$g_\xi(\mu_\xi, t) = \exp\left[\left(\exp\left(-\frac{1}{2}D_\xi\mu_\xi^2\right) - 1\right)\nu_\tau t\right],$$

где $D_\xi = 2\dfrac{\gamma_0}{\nu_\tau}\dfrac{kT}{m}$ — дисперсия пуассоновского процесса $W_\xi(t)$, характеризующая воздействие частицы среды на броуновскую частицу при единичном соударении; γ_0 — коэффициент вязкого трения; k — постоянная Больцмана; T — абсолютная температура среды; ν_τ — интенсивность пуассоновского процесса; m — масса броуновской частицы.

Представим уравнение, описывающее одномерное броуновское движение, в виде дифференциального уравнения Ито [5]

$$dV = -\gamma_0 V dt + dW_\xi(t). \tag{1}$$

Здесь V — скорость броуновской частицы. Решение уравнения (1) имеет вид $V(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} G(t,\tau)\, dW_\xi(\tau)$,

где

$$G(t,\tau) = \exp\left[-\gamma_0(t-\tau)\right]. \tag{2}$$

Одномерную характеристическую функцию флуктуаций скорости движения V броуновской частицы можно представить как [2, 6]

$$g(\lambda; t) = \exp\left\{\nu_\tau \int\limits_{-\infty}^{t}\left[\exp\left(-\frac{1}{2}D_\xi G^2(t,\tau)\lambda^2\right) - 1\right]d\tau\right\}. \tag{3}$$

Из формулы (3) можно определить первые четыре момента функции распределения флуктуаций скорости броуновской частицы

$$
\begin{aligned}
D_1 &= \left.\frac{\partial g(\lambda)}{i\partial\lambda}\right|_{\lambda=0} = 0;\\
D_2 &= \left.\frac{\partial^2 g(\lambda)}{(i\partial\lambda)^2}\right|_{\lambda=0} = \nu_\tau D_\xi \int\limits_{-\infty}^{t} G^2(t,\tau)\, d\tau = \frac{kT}{m};\\
D_3 &= \left.\frac{\partial^3 g(\lambda)}{(i\partial\lambda)^3}\right|_{\lambda=0} = 0;
\end{aligned}
\tag{4}
$$

$$
D_4 = \left.\frac{\partial^4 g(\lambda)}{(i\partial\lambda)^4}\right|_{\lambda=0} = 3\nu_\tau^2 D_\xi^2 \left[\left(\int\limits_{-\infty}^{t} G^2(t,\tau)\, d\tau\right)^2 + \int\limits_{-\infty}^{t} G^4(t,\tau)\, d\tau\right] = 3\left(\frac{kT}{m}\right)^2\left(1+\frac{\gamma_0}{\nu_\tau}\right), \tag{5}
$$

где $G(t,\tau)$ — функция, определяемая по (2).

Формулы для моментов D_2 (4) и D_4 (5) позволяют рассчитать эксцесс функции распределения

$$
\kappa_4 = \frac{D_4 - 3D_2^2}{D_2^2} = 3\frac{\gamma_0}{\nu_\tau}, \tag{6}
$$

выражение для которого совпадает с выражением, полученным в работе [7].

Для экспериментального определения интенсивности пуассоновского процесса ν_τ может быть использована электролитическая ячейка, описанная в работах [8–10]. Как показано в работе [10], экспериментально наблюдаются долговременные изменения меры Кульбака H флуктуаций напряжения на электролитической ячейке, которая, в свою очередь [7], связана с эксцессом простым соотношением

$$
H = \frac{\kappa_4}{16}. \tag{7}
$$

При расчете эксцесса функции распределения флуктуаций напряжения U на электролитической ячейке необходимо учитывать, что эти флуктуации возникают вследствие броуновского движения достаточно большого числа ионов в малом объеме электролита, находящегося в отверстиях в тонкой пленке, которая разделяет сосуды электролитической ячейки [8, 10]. Кроме того, необходимо учесть низкочастотную фильтрацию флуктуаций напряжения, связанную с наличием собственной электрической емкости электролитической ячейки. Для описания флуктуаций напряжения вместо уравнения (1) необходимо использовать систему уравнений

$$dV_\Sigma = -\gamma_0 V_\Sigma dt + dW_{\Sigma\xi}(t)\,; \tag{8}$$

$$dU = -\beta U dt + \beta A V_\Sigma dt. \tag{9}$$

Здесь $V_\Sigma = \sum\limits_{i=1}^{N} V_i$ — сумма скоростей ионов в малом объеме электролита; N — число ионов; $W_{\Sigma\xi} = \sum\limits_{i=1}^{N} W_{\xi i}$ — сумма независимых пуассоновских процессов $W_{\xi i}$, воздействующих на каждый ион в электролите; $\beta = 1/(CR)$ — верхняя частота флуктуаций напряжения, снимаемого с электролитической ячейки; R и C — сопротивление и емкость электролитической ячейки; $A = h/(\mu N)$ — коэффициент (h — толщина пленки; μ — подвижность всех ионов в электролите, которая для простоты полагается одинаковой).

Характеристическая функция пуассоновского процесса $W_{\Sigma\xi}(t)$ имеет вид

$$g_{\Sigma\xi}(\mu_{\Sigma\xi}, t) = \exp\left[\left(\exp\left(-\frac{1}{2}D_\xi \mu_{\Sigma\xi}^2\right) - 1\right) N\nu_\tau t\right].$$

Решение системы уравнений (8) и (9)

$$U(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} G_U(t,\tau)\, dW_{\Sigma\xi}(\tau)\,,$$

где $G_U(t,\tau) = \dfrac{\beta A}{\gamma_0 - \beta}\{\exp[-\beta(t-\tau)] - \exp[-\gamma_0(t-\tau)]\}$. Тогда одномерная характеристическая функция флуктуаций напряжения U на электролитической ячейке принимает вид

$$g_U(\lambda_U; t) = \exp\left\{\nu_\tau N \int\limits_{-\infty}^{t} \left[\exp\left(-\frac{1}{2}D_\xi G_U^2(t,\tau)\,\lambda_U^2\right) - 1\right] d\tau\right\}. \tag{10}$$

В первом приближении из формулы (10) при условии, что $\beta \ll \gamma_0$, можно определить второй (D_{U2}) и четвертый (D_{U4}) моменты функции распределения флуктуаций напряжения на электролитической ячейке:

$$D_{U2} = \left.\frac{\partial^2 g_U(\lambda_U)}{(i\partial\lambda_U)^2}\right|_{\lambda_U=0} = \nu_\tau N D_\xi \int\limits_{-\infty}^{t} G_U^2(t,\tau)\, d\tau = \frac{\beta}{\gamma_0}\frac{kTh^2}{m\mu^2 N};$$

$$D_{U4} = \left.\frac{\partial^4 g_U(\lambda_U)}{(i\partial\lambda_U)^4}\right|_{\lambda=0} =$$

$$= 3\nu_\tau^2 N^2 D_\xi^2 \left[\left(\int\limits_{-\infty}^{t} G_U^2(t,\tau)\, d\tau \right)^2 + \frac{1}{N} \int\limits_{-\infty}^{t} G_U^4(t,\tau)\, d\tau \right] =$$

$$= 3\left(\frac{\beta}{\gamma_0}\frac{kTh^2}{m\mu^2 N}\right)^2 \left(1 + \frac{\beta}{\nu_\tau N}\right).$$

В соответствии с формулой (6) получим выражение для эксцесса функции распределения флуктуаций напряжения на электролитической ячейке

$$\kappa_{U4} = 3\frac{\beta}{\nu_\tau N}. \tag{11}$$

Согласно выражению (11), эксцесс для флуктуаций напряжения на электролитической ячейке, а следовательно, и мера Кульбака (7), пропорциональна верхней частоте β фильтрации сигнала электролитической ячейкой и обратно пропорциональна числу ионов N в малом объеме электролита.

Проведенное описание основывалось на предположении, что в правой части уравнения (1) второе слагаемое, характеризующее случайное воздействие частиц среды на броуновскую частицу, представляет собой производную общего пуассоновского процесса $W_\xi(t)$. Однако в работе [7] рассмотрен более общий случай, когда уравнение (1) имеет вид $dV = -V dW_\gamma(t) + dW_\xi(t)$. Здесь $W_\gamma(t)$ — процесс, описывающий флуктуации коэффициента вязкого трения и задаваемый характеристической функцией

$$g_\gamma(\mu_\gamma, t) = \exp\left[\left(\exp(iD_\gamma\mu_\gamma) - 1\right)\nu_\tau t\right], \tag{12}$$

где $D_\gamma = \gamma_0\tau_0$ — дисперсия пуассоновского процесса $W_\gamma(t)$, $\tau_0{=}1/\nu_\tau$ — постоянная времени, характеризующая среднее время между очередными соударениями частиц среды с броуновской частицей.

Для указанного случая в работе [7] в предположении, что процесс $W_\xi(t)$ является винеровским процессом, а в разложении экспоненты $\exp(iD_\gamma\mu_\gamma)$ из формулы (12) сохранены первые три слагаемых, было получено уравнение

$$\lambda\frac{d^2 g(\lambda)}{d\lambda^2} - \frac{\nu_\tau}{2\gamma_0}\frac{dg(\lambda)}{d\lambda} - \frac{2\nu_\tau kT}{\gamma_0 m}\lambda g(\lambda) = 0. \tag{13}$$

В общем случае решение уравнения (13) имеет вид [11]

$$g(\lambda) = \lambda^{a+1/2} Z_{a+1/2}\left(i\sqrt{b}\lambda\right), \tag{14}$$

где $a = \dfrac{\nu_\tau}{\gamma_0}$; $b = 2\dfrac{\nu_\tau}{\gamma_0}\dfrac{kT}{m}$; $Z_{a+1/2}\left(i\sqrt{b}\lambda\right)$ — цилиндрическая функция [12].

Характеристическая функция (14) должна удовлетворять условию [5]

$$g(\lambda)|_{\lambda=0} = 1. \quad (15)$$

Представим решение (14) в виде [11]

$$g(\lambda) = \lambda^{a+1/2}\left(C_1 J_{a+1/2}\left(i\sqrt{b}\lambda\right) + C_2 N_{a+1/2}\left(i\sqrt{b}\lambda\right)\right), \quad (16)$$

где $J_{a+1/2}\left(i\sqrt{b}\lambda\right)$, $N_{a+1/2}\left(i\sqrt{b}\lambda\right)$ — функции Бесселя первого и второго рода; C_1, C_2 — произвольные константы. Применение условия (15) для выражения (16) дает следующие значения констант:

$$C_1 = 0; C_2 = -\frac{\pi}{\Gamma(a+1/2)}\left(\frac{i\sqrt{b}}{2}\right)^{a+1/2},$$

где $\Gamma(a+1/2)$ — гамма-функция. Тогда окончательно получаем решение (16):

$$g(\lambda) = -\frac{\pi}{\Gamma(a+1/2)}\left(\frac{i\sqrt{b}\lambda}{2}\right)^{a+1/2} N_{a+1/2}\left(i\sqrt{b}\lambda\right).$$

Первые четыре момента функции распределения флуктуаций скорости броуновской частицы имеют вид

$$D_1 = \left.\frac{\partial g(\lambda)}{i\partial\lambda}\right|_{\lambda=0} = 0;$$

$$D_2 = \left.\frac{\partial^2 g(\lambda)}{(i\partial\lambda)^2}\right|_{\lambda=0} = \frac{2\nu_\tau}{2\nu_\tau - \gamma_0}\frac{kT}{m}; \quad (17)$$

$$D_3 = \left.\frac{\partial^3 g(\lambda)}{(i\partial\lambda)^3}\right|_{\lambda=0} = 0;$$

$$D_4 = \left.\frac{\partial^4 g(\lambda)}{(i\partial\lambda)^4}\right|_{\lambda=0} = \frac{12\nu_\tau^2}{(2\nu_\tau - 3\gamma_0)(2\nu_\tau - \gamma_0)}\frac{k^2T^2}{m^2}. \quad (18)$$

В этом случае второй (D_2 (17)) и четвертый (D_4 (18)) моменты совпадают со вторым (k_2) и четвертым (k_4) кумулянтами [13]. Эксцесс функции распределения приобретает вид

$$\kappa_4 = \frac{k_4 - 3k_2^2}{k_2^2} = \frac{D_4 - 3D_2^2}{D_2^2} = \frac{6\gamma_0}{2\nu_\tau - 3\gamma_0},$$

а при условии $\nu_\tau \gg \gamma_0$ запишем формулу $\kappa_4 = 3\gamma_0/\nu_\tau$, совпадающую с выражением (6) и с формулой, полученной в работе [7] для первого приближения.

Следовательно, проведенное описание броуновского движения при воздействии пуассоновского случайного процесса позволило получить в общем виде выражения для характеристических функций флуктуаций скорости движения броуновской частицы и флуктуаций напряжения на электролитической ячейке, а также уточнить эти выражения для случая пуассоновских флуктуаций коэффициента вязкого трения. Показано, что эксцесс функции распределения для всех рассмотренных случаев обратно пропорционален интенсивности пуассоновского процесса, воздействующего на броуновскую частицу.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Морозов А.Н.* Описание диффузии и броуновского движения как пуассоновских случайных процессов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 1999. № 2. С. 85–90.
2. *Бункин Н.Ф.*, *Морозов А.Н.* Стохастические системы в физике и технике. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 366 с.
3. *Калинкин А.В.* Стационарное распределение для стохастической системы частиц, взаимодействующих комплексами // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2014. № 4. С. 3–17.
4. *Марков Ю.Г.*, *Синицын И.Н.* Одно- и многомерные распределения флуктуаций неравномерности вращения Земли // ДАН. 2009. Т. 428. № 5. С. 616–619.
5. *Пугачев В.С.*, *Синицын И.Н.* Стохастические дифференциальные системы. М.: Наука, 1990. 632 с.
6. *Морозов А.Н.* Метод описания немарковских процессов, задаваемых линейным интегральным преобразованием // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2004. № 3. С. 47–56.
7. *Морозов А.Н.* Стационарные распределения флуктуаций скорости броуновской частицы в среде с флуктуирующим коэффициентом вязкого трения // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2014. № 3. С. 26–38.
8. *Морозов А.Н.* Необратимые процессы и броуновское движение: Физико-технические проблемы. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. 332 с.
9. *Коротаев С.М.*, *Морозов А.Н.*, *Сердюк В.О.*, *Сорокин М.О.* Проявление макроскопической нелокальности в некоторых естественных диссипативных процессах // Известия вузов. Физика. 2002. № 5. С. 3–14.
10. *Морозов А.Н.* Предварительные результаты измерений меры Кульбака флуктуаций напряжения на электролитической ячейке // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2011. № 2. С. 16–24.
11. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.
12. *Никифоров А.Ф.*, *Уваров В.Б.* Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1984. 344 с.
13. *Малахов А.Н.* Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. М.: Сов. радио, 1978. 370 с.

REFERENCES

[1] Morozov A.N. Description of diffusion and Brownian motion as accidental Poisson processes. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 1999, no. 2, pp. 85–90 (in Russ.).

[2] Bunkin N.F., Morozov A.N. Stokhasticheskie sistemy v fizike i tekhnike [Stochastic Systems in Physics and Technology]. Moscow, MGTU im. N.E. Baumana Publ., 2011. 366 p.

[3] Kalinkin A.V. Stationary Distribution for a Stochastic System of Complexes Interacting Particles. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2014, no. 4, pp. 3–17 (in Russ.).

[4] Markov Yu.G., Sinitsyn I.N. One- and Multidimensional Distributions of Fluctuations in the Earth's Irregular Rotation. *Dokl. Akad. Nauk* [Proc. Russ. Acad. Sci.], 2009, vol. 428, no. 5, pp. 616–619 (in Russ.).

[5] Pugachev V.S., Sinitsyn I.N. Stokhasticheskie differentsial'nye sistemy [Stochastic Differential Systems]. Moscow, Nauka Publ., 1990. 632 p.

[6] Morozov A.N. Method of Describing Non-Markovian Processes Defined by Linear Integral Transformation. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2004, no. 3, pp. 47–56 (in Russ.).

[7] Morozov A.N. Stationary Fluctuations Distributions of Brownian Particle Velocity in a Medium with Fluctuating Viscous Friction Coefficient. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2014, no. 3, pp. 26–38 (in Russ.).

[8] Morozov A.N. Neobratimye protsessy i brounovskoe dvizhenie: Fiziko-tekhnicheskie problemy [Irreversible Processes and Brownian Motion: Physical and Technical Problems]. Moscow, MGTU im. N.E. Baumana Publ., 1997. 332 p.

[9] Korotaev S.M., Morozov A.N., Serdyuk V.O., Sorokin M.O. Manifestation of the Macroscopic Nonlocality in Some Natural Dissipation Processes. *Russian Physics Journal*, 2002, no. 5, pp. 431–444.

[10] Morozov A.N. Preliminary Results of Recording the Kullback Measure of Voltage Fluctuations on Electrolytic Cell. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2011, no. 2, pp. 16–24 (in Russ.).

[11] Kamke E. Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen, I, Gewohnliche Differentialgleichungen [Handbook of ordinary differential equations]. Leipzig, B.G. Teubner, 1977.

[12] Nikiforov A.F., Uvarov V.B. Spetsial'nye funktsii matematicheskoy fiziki [Special Functions of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka Publ., 1984. 344 p.

[13] Malakhov A.N. Kumulyantnyy analiz sluchaynykh negaussovykh protsessov i ikh preobrazovaniy [Cumulant Analysis of Non-Gaussian Random Processes and Their Transforms]. Moscow, Sov. Radio Publ., 1978. 370 p.

Статья поступила в редакцию 23.09.2015

Морозов Андрей Николаевич — д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой "Физика" МГТУ им. Н.Э. Баумана.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Morozov A.N. — Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Head of Physics department, Bauman Moscow State Technical University.
Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Морозов А.Н. Описание флуктуаций скорости броуновской частицы при воздействии пуассоновского случайного процесса // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2016. № 1. С. 27–35.
DOI: 10.18698/1812-3368-2016-1-27-35

Please cite this article in English as:

Morozov A.N. Fluctuations of the Brownian particle velocity influenced by a random Poisson process. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2016, no. 1, pp. 27–35.
DOI: 10.18698/1812-3368-2016-1-27-35