DOI: 10.18698/1812-3368-2016-1-90-99

УДК 531.66

НЕЛИНЕЙНАЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОЛЛИНЕАРНОГО УДАРА

В.В. Лапшин, **Е.А. Юрин**

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: vladimir@lapshin.net; yrin-bob@mail.ru

Рассмотрена нелинейная упругопластическая модель коллинеарного удара тела о неподвижное препятствие, построенная на основе моделей удара Герца и Ханта – Кроссли. Получены первые интегралы уравнений движения в фазах деформации и восстановления. Определены коэффициент восстановления и потерянная при ударе кинетическая энергия, а также их зависимость от постоянной сухого трения. Получено решение уравнение движение тела в процессе удара в квадратурах. Приведены результаты математического моделирования.

Ключевые слова: коллинеарный удар, коэффициент восстановления, нелинейная динамика.

NONLINEAR ELASTOPLASTIC MODEL OF COLLINEAR IMPACT

V.V. Lapshin, **E.A. Yurin**

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: vladimir@lapshin.net; yrin-bob@mail.ru

A nonlinear elastoplastic model of collinear impact of a body with a fixed obstacle is investigated. This model is constructed on the basis of Hertz and Hunt – Crossley impact model. The first integrals of the equations for motion throughout the phases of deformation and restitution are obtained. The coefficient of restitution and kinetic energy lost at the impact as well as their dependence on the dry friction coefficient are determined. The solution to the equations of body motion in the process of impact is found in quadratures. The results of mathematical modeling are presented.

Keywords: collinear collision, coefficient of restitution, nonlinear dynamics.

Введение. В работе рассмотрен наиболее простой случай задачи об ударе тела о неподвижную поверхность (препятствие) в предположении, что до и после удара тело движется поступательно вдоль одной и той же оси. Формы тела и препятствия могут быть различными, но при этом ударные силы их взаимодействия сводятся к равнодействующей, направленной вдоль этой оси, и линия действия равнодействующей проходит через центр масс тела. Предполагается, что ударные силы взаимодействия существенно больше остальных сил и действием последних можно пренебречь [1–9]. Задача о коллинеарном соударении двух тел решается аналогично [1, 3].

Коэффициентом восстановления при ударе называется отношение модулей скоростей тела после (V^+) и до (V^-) удара [1–8]:

$$k = \left|\frac{V^+}{V^-}\right| = -\frac{V^+}{V^-}. \tag{1}$$

Наиболее точная модель удара связана с исследованием динамики движения вязко-упругопластических деформируемых тел сложна и требует большого объема численных расчетов [1–3].

Модель удара Ньютона (стереомеханический удар) основана на предположении, что время удара бесконечно мало и перемещением тела в процессе удара можно пренебречь [1–3]. И. Ньютон предположил, что коэффициент восстановления определяется материалом, из которого изготовлены тела и не зависит от скорости соударения. Он разбил процесс удара на две фазы. В фазе деформирования скорость тела уменьшается до нуля и накапливается энергия упругих деформаций. В фазе восстановления накопленная потенциальная энергия освобождается, и тело разгоняется в противоположном направлении.

С. Пуассон ввел другое определение коэффициента восстановления: это отношение импульсов ударной силы взаимодействия в фазах восстановления и деформирования. В рассматриваемой задаче эти два определения эквивалентны. В более сложных случаях, например при косом ударе тела о неподвижное препятствие (движение тела до и после удара произвольное), эти определения не эквивалентны и следует использовать определение Пуассона [1–3, 7].

Модель удара Ньютона не позволяет определить многие важные параметры удара, его продолжительность, максимальную силу взаимодействия тел, их деформацию и т.д.

Широкое распространение получила линейная вязкоупругая модель удара Кельвина – Фойхта, в которой предполагается, что контактная сила взаимодействия тел при ударе сводится к линейной силе упругости и линейной силе сопротивления [1–3]: $F = F(x, \dot{x}) = -cx - \mu\dot{x}$, где c и μ — постоянные коэффициенты упругости и сопротивления; x — деформация тела и препятствия при ударе. В процессе удара $x \geq 0$. Уравнение движения тела при ударе является линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами и имеет аналитическое решение. При этом коэффициент восстановления при ударе постоянный. Модель противоречит естественным физическим представлениям. Сила взаимодействия тел в начале и конце удара равна силе сопротивления и отлична от нуля. Если в процессе деформирования меняется пятно контакта, то представляется не естественным предположение о линейной зависимости упругой силы взаимодействия и силы сопротивления от деформации.

Потерянная при ударе кинетическая энергия

$$\Delta T = \frac{m(V^-)^2}{2} - \frac{m(V^+)^2}{2} = \frac{m(V^-)^2}{2}(1 - k^2) \qquad (2)$$

при постоянном коэффициенте восстановления пропорциональна квадрату скорости соударения V^-. Экспериментальные данные, приведенные в работах [1, 9], опровергают этот результат и показывают, что с увеличением скорости соударения тел коэффициент восстановления монотонно убывает.

В волновой теории удара тела являются упругими и нет остаточной деформации тел [1–3]. Потеря энергии при ударе обусловлена возникающими при ударе упругими звуковыми волнами распространения деформации. Скорость распространения этих волн равна скорости звука и зависит от свойств материала. В инженерной практике волновая теория используется для расчета удара стержней о препятствие.

Если время прохождения упругих волн через все тело меньше продолжительности удара и происходит несколько отражений волн за время удара, то влиянием упругих волн можно пренебречь [1–4]. На таких предположениях строится контактная теория удара, разработанная Г. Герцом, который предположил, что упругая сила контактного взаимодействия тел при ударе зависит от деформации x так же, как и в случае статического равновесия [1–5]. Он показал, что если тело и препятствие в окрестности точки соприкосновения имеют сферическую поверхность и их деформации малы по сравнению с их радиусами, то с учетом увеличения пятна контакта в связи с возрастанием деформации x сила упругого взаимодействия равна $F(x) = -cx^{3/2}$, где c — константа, значение которой определяется радиусами сферических поверхностей и материалом, из которого изготовлены тела. Герц рассмотрел абсолютно упругий удар [4, 5]. При этом уравнение движение тела имеет интеграл энергии и интегрируется в квадратурах, т.е. его решение сводится к вычислению определенного интеграла. Результаты Герца хорошо согласуются с экспериментальными данными [1].

К. Хант и Ф. Кроссли обобщили модель удара Герца, ввели в нее силу вязкого трения между частицами соударяющихся тел [6]. Поскольку при увеличении пятна контакта возрастает число частиц трущихся друг о друга, они предположили, что сила вязкого трения увеличивается пропорционально упругой силе взаимодействия тел. Тогда контактная сила взаимодействия тела и препятствия определяется по соотношению $F = F(x, \dot{x}) = -cx^n - bcx^n\dot{x}$, где c — коэффициент упругости; b — коэффициент сопротивления; n — постоянная, которая определяется формой поверхности тела и препятствия в окрестности точки соприкосновения; x — перемещение тела (деформация), $x \geq 0$. В частности, для сферической поверхности тел $n = 3/2$, для плоской — $n = 1$. Коэффициент восстановления является монотонно убывающей функцией скорости соударения [6]. При малых скоростях соударения V^- коэффициент восстановления линейно зависит от этой скорости: $k = 1 - (2/3)bV^-$. При исследовании такой модели удара Хант и

Кроссли проводили численное интегрирование нелинейного уравнения движения тела в процессе удара. Эта модель является развитием модели Герца для случая, когда тело и препятствие подчиняются законам вязкоупругого деформирования. Модель построена в предположениях, что можно пренебречь волновыми процессами, деформации при ударе малы, остаточной деформацией можно пренебречь. Эти предположения обусловливают ограничения на скорость соударения, используемые материалы, форму и размеры тела. Рассматриваемая модель справедлива для компактных тел из достаточно жесткого материала при относительно небольших (до нескольких метров в секунду) скоростях соударения. К недостаткам этой модели удара можно отнести невозможность абсолютно неупругого удара и стремление коэффициента восстановления к единице при стремлении скорости соударения к нулю независимо от материала, из которого изготовлены тела.

Модель можно обобщить, приняв $F = F(x, \dot{x}) = -f(x) - bf(x)\dot{x}$, где $f(x)$ — упругая сила взаимодействия тел при ударе, $f(0) = 0$ и $f(x)$ является возрастающей функцией при $x \geq 0$ [8].

Первый интеграл уравнений движения тела при ударе получен в работе [8]. Аналитически построена зависимость коэффициента восстановления и потерянной при ударе кинетической энергии от скорости соударения. Получено решение уравнения движения тела в квадратурах.

В настоящей статье рассмотрена нелинейная упругопластическая модель коллинеарного удара тела о неподвижное препятствие, построенная на основе моделей удара Герца и Ханта – Кроссли. Предположено, что трение между частицами деформируемых в процессе удара тел является сухим. Получены первые интегралы уравнений движения в фазах деформирования и восстановления, коэффициент восстановления и потерянная при ударе кинетическая энергия, их зависимость от постоянной сухого трения, решение уравнения движения тела в квадратурах. Представлены результаты математического моделирования.

В такой модели удара возможен абсолютно неупругий удар. Коэффициент восстановления меньше единицы и не зависит от скорости соударения. Последний результат не согласуется с экспериментальными данными. В связи с этим в дальнейшем предполагается рассмотреть вязко-упругопластическую модель удара.

Нелинейная упругопластическая модель удара. Рассмотрим модель удара аналогичную модели Ханта – Кроссли [3, 6, 8], но предположим, что трение между частицами тела деформируемого при ударе является сухим. Тогда контактная сила взаимодействия тела и препятствия определяется по соотношению $F = F(x, \dot{x}) = -f(x) - df(x)\operatorname{sgn}\dot{x}$, где x — перемещение тела в процессе удара (деформация); $f(x)$ —

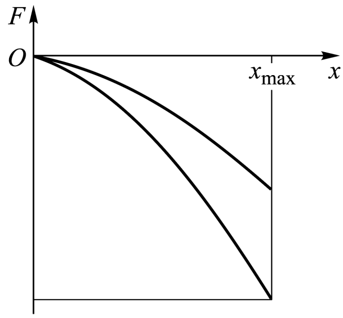

Рис. 1. Зависимость контактной силы от деформации при упругом ударе

упругая сила взаимодействия тел при ударе; d — постоянная сухого трения.

В процессе удара $x \geq 0$, в начале и в конце — $x = 0$. Упругая сила взаимодействия тел при ударе равна нулю в начале и конце удара $f(0) = 0$ и является возрастающей функцией деформации x.

Как уже было отмечено, в моделях удара Герца и Ханта–Кроссли предполагается, что упругая сила взаимодействия тел при ударе равна $f(x) = cx^n$. Уравнение движения тела в фазе деформирования (при $V = \dot{x} > 0$) имеет вид

$$m\ddot{x} = F(x, \dot{x}) = -f(x)(1 + d), \tag{3}$$

где m – масса тела.

В конце фазы деформирования $V = \dot{x} = 0$. Если постоянная сухого трения $d \geq 1$, то в конце фазы деформирования тело останавливается. Контактная сила взаимодействия равна нулю. Удар абсолютно неупругий. Если $d < 1$, то удар является упругим и в фазе восстановления (при $V = \dot{x} > 0$) уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} = F(x, \dot{x}) = -f(x)(1 - d). \tag{4}$$

Зависимость контактной силы от деформации при упругом ударе приведена на рис. 1.

Обозначим через $\Pi(x)$ потенциальную энергию упругой деформации $\Pi(x) = \int\limits_0^x f(x)dx$. В частности, $\Pi(x) = \dfrac{cx^{n+1}}{n+1}$ при $f(x) = cx^n$.

Исключим время t из дифференциальных уравнений движения (3), (4) с помощью преобразования $\ddot{x} = \dfrac{dV}{dt} = \dfrac{dV}{dx}\dfrac{dx}{dt} = V\dfrac{dV}{dx}$. Разделяя переменные в полученных уравнениях и интегрируя их, находим первые интегралы — интегралы энергии. В фазе деформирования имеем

$$V^2 = (V^-)^2 - \frac{2(1 + d)\Pi(x)}{m}, \tag{5}$$

в фазе восстановления —

$$V^2 = \frac{2(1 - d)(\Pi(x_{\max}) - \Pi(x))}{m}. \tag{6}$$

Здесь $x_{\max}$ — максимальное перемещение тела при ударе или значение x в конце фазы деформирования. Значение $x_{\max}$ определяется из решения уравнения $V(x_{\max}) = 0$. В силу (5) значение $x_{\max}$ является решением уравнения

$$\Pi(x_{\max}) = \frac{m(V^-)^2}{2(1+d)}. \tag{7}$$

Как уже было отмечено, при $f(x) = cx^n$ потенциальная энергия упругой деформации составляет $\Pi(x) = \dfrac{cx^{n+1}}{n+1}$, а решение уравнения (7) — $x_{\max} = \left[\dfrac{(n+1)m(V^-)^2}{2c(1+d)}\right]^{1/(n+1)}$.

Соотношения (5), (6) позволяют получить решение уравнений движения (3), (4) в квадратурах как решение уравнения с разделяющимися переменными $\dot{x} = V(x)$. В фазе деформирования имеем

$$\int\limits_0^x \sqrt{\frac{m}{m(V^-)^2 - 2(1+d)\Pi(x)}}\,dx = t,$$

а в фазе восстановления —

$$\int\limits_0^{x_{\max}} \sqrt{\frac{m}{m(V^-)^2 - 2(1+d)\Pi(x)}}\,dx - \\ - \int\limits_{x_{\max}}^x \sqrt{\frac{m}{2(1-d)\left(\Pi(x_{\max}) - \Pi(x)\right)}}\,dx = t,$$

где $x_{\max}$ — решение уравнения (7). Эти уравнения определяют в неявном виде закон движения тела при ударе.

Коэффициент восстановления и потерянная кинетическая энергия. В силу того, что в начале и в конце удара $x = 0$ из первых интегралов уравнений движения (5), (6) получим соотношение, связывающее начальную и конечную безразмерные скорости при ударе: $\dfrac{(V^+)^2}{1+d} = \dfrac{(V^-)^2}{1-d} = \dfrac{2\Pi(x_{\max})}{m}$.

Согласно (1), коэффициент восстановления равен $k = \sqrt{\dfrac{1-d}{1+d}}$. Зависимость коэффициента восстановления от постоянной сухого трения d приведена на рис. 2, *а*. С увеличением постоянной d коэффициент восстановления монотонно убывает и становится равным нулю при $d = 1$ (т.е. удар абсолютно неупругий). При этом коэффициент восстановления не зависит от скорости соударения, что противоречит экспериментальным данным [1, 9].

Потерянная при ударе кинетическая энергия ΔT определяется по соотношению (2). Обозначим через T^- кинетическую энергию тела

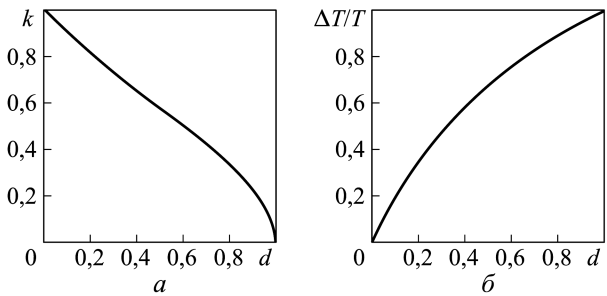

Рис. 2. Зависимости коэффициента восстановления k (*а*) и отношения $\Delta T/T^-$ (*б*) от постоянной d сухого трения

до удара, тогда $\dfrac{\Delta T}{T^-} = 1 - k^2 = \dfrac{2d}{1+d}$ зависит только от постоянной сухого трения (рис. 2, *б*).

Результаты математического моделирования. Если поверхности тела и препятствия в окрестности точки соприкосновения сферические, то сила упругой деформации в соответствии с результатами, полученными Герцем [4, 5], имеет вид $f(x) = cx^{3/2}$, где $\dfrac{1}{c} = \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1-\mu_1^2}{E_1} + \dfrac{1-\mu_2^2}{E_2}\right)\sqrt{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}}$, $E_{1,2}$ — модули упругости; $\mu_{1,2}$ — коэффициенты Пуассона; $R_{1,2}$ — радиусы поверхностей тела и препятствия.

В качестве примера рассмотрим удар резинового шарика массой $m = 0{,}1$ кг о массивную бетонную плиту. Для резины $\rho_1 = 1800$ кг/м^3, $E_1 = 0{,}8\cdot 10^7$ Н/м^2, $\mu_1 = 0{,}5$; для бетона $E_2 = 2750\cdot 10^7$ Н/м^2, $\mu_2 = 0{,}15$, радиус шарика $R_1 = 2{,}367$ см, коэффициент упругости $c = 2{,}1873 \times \times 10^6$ Н/м$^{3/2}$. В расчетах примем, что постоянная сухого трения $d = 0{,}3$. Тогда коэффициент восстановления $k = 0{,}73$.

Зависимости перемещения тела (деформации) и контактной силы взаимодействия тела и препятствия от времени при $V^- = 0{,}5; 1; 2; 3; 4$ и 5 м/с показаны на рис. 3, *а, б*, зависимости максимального перемещения тела (максимальной деформации) и продолжительности удара от скорости соударения V^- — на рис. 3, *в, г*.

Заключение. На основе моделей удара Герца и Ханта – Кроссли построена нелинейная упругопластическая модель коллинеарного удара тела о неподвижное препятствие. Трение между частицами деформируемых в процессе удара тел является сухим. Получены первые интегралы уравнений движения в фазах деформирования и восстановления, решение уравнения движения тела в процессе удара в квадратурах. В модели удара Герца удар абсолютно упругий. В вязкоупругой модели удара Ханта – Кроссли удар упругий, коэффициент восстановления уменьшается с увеличением скорости и стремится к единице при уменьшении скорости соударения. В рамках построенной упругопластической модели удара возможен абсолютно неупругий и упругий

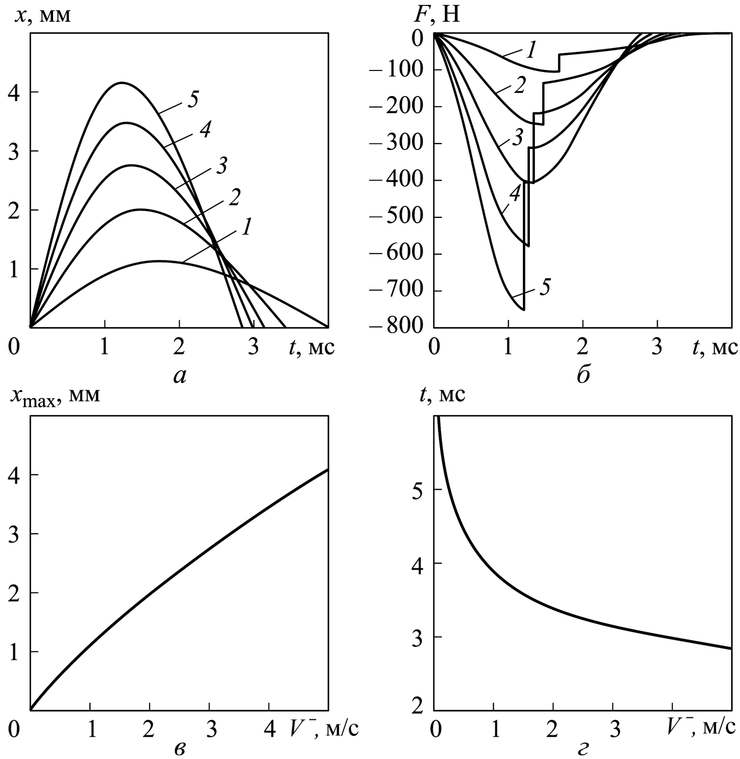

Рис. 3. Зависимости деформации (*а*), контактной силы (*б*) от времени при $V^- = 0{,}5$ (*1*), 1 (*2*), 3 (*3*), 4 (*4*) и 5 (*5*) м/с, максимальной деформации (*в*) и продолжительности удара (*г*) от скорости соударения

удары. При упругом ударе коэффициент восстановления уменьшается при увеличении постоянной трения и не зависит от скорости соударения. Последнее противоречит экспериментальным данным. Этот недостаток позволит устранить переход к более сложной вязко-упругопластической модели удара, учитывающей и вязкое, и сухое трение между частицами соударяющихся тел.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 13-01-00655а) и гранта президента РФ для ведущих научных школ (НШ-4748.2012.8).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольдсмит В.* Удар. Теоретические и физические свойства соударяемых тел. М.: Стройиздат, 1965. 448 с.
2. *Пановко Я.Г.* Введение в теорию механического удара. М.: Наука, 1977. 232 с.
3. *Иванов А.П.* Динамика систем с механическими соударениями. М.: Международная программа образования. 1997. 336 с.
4. *Hertz H.* Über die Berührung Fester Elastischer Körper // Journal für die Reine und Angewandte Mathematik. 1881. B. 92. S. 156–171.

5. *Герц Г.* Принципы механики, изложенные в новой связи. М.: АН СССР, 1959. 387 с.
6. *Hunt K.H., Crossley F.R.E.* Coefficient of Restitution Interpreted as Damping in Vibroimpact // ASME Journal of Applied Mechanics. 1975. No. 6. P. 440–445.
7. *Лапшин В.В.* Удар тела о препятствие // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. Вып. 12. 17 с. URL: http://engjournal.ru/catalog/eng/ teormech/1134.html DOI: 10.18698/2308-6033-2013-12-1134
8. *Дягель Р.В.*, *Лапшин В.В.* О нелинейной вязкоупругой модели коллинеарного удара Ханта – Кроссли // Известия РАН. Механика твердого тела. 2011. № 5. С. 164–173.
9. *Кочетков А.В.*, *Федотов П.В.* Некоторые вопросы теории удара // Интернет-журнал "Науковедение". 2013. № 5. 15 с. URL: http://naukovedenie.ru/110tnv513.pdf

REFERENCES

[1] Gol'dsmit V. Udar. Teoreticheskie i fizicheskie svoystva soudaryaemykh tel [Collision. Theoretical and Physical Properties of the Colliding Bodies]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1965. 448 p.

[2] Panovko Ya.G. Vvedenie v teoriyu mekhanicheskogo udara [Introduction to Mechanical Shock Theory]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 232 p.

[3] Ivanov A.P. Dinamika sistem s mekhanicheskimi soudareniyami [Dynamics of Systems with Mechanical Collisions]. Moscow, Mezhdunarodnaya programma obrazovaniya [International Program of Education], 1997. 336 p.

[4] Hertz H. Über die Berührung Fester Elastischer Körper. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 1881, B. 92, ss. 156–171.

[5] Hertz H.R. Die Prinzipien der Mechanik in neuem Zusammenhang dargestellt. Leipzig, Barth, 1894, 352 s. (English Transl. Hertz H.R. The Principles of Mechanics Presented in a New Form. London, MacMillan and Co., 1899).

[6] Hunt K.H., Crossley F.R.E. Coefficient of Restitution Interpreted as Damping in Vibroimpact. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1975, no. 6, pp. 440–445.

[7] Lapshin V.V. A body collision with an obstacle. *Jelektr. nauchno-tekh. izd. "Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovacii"* [El. Sc.-Tech. Publ. "Eng. J.: Science and Innovation], 2013, iss. 12. Available at: http://engjournal.ru/catalog/eng/teormech/1134.html DOI: 10.18698/2308-6033-2013-12-1134

[8] Dyagel R.V., Lapshin V.V. On a nonlinear viscoelastic model of Hunt – Crossley impact. *Mechanics of Solides*, 2011, vol. 46, no. 5, pp. 798–806.

[9] Kochetkov A.V., Fedotov P.V. Some questions of the theory of blow. *On-line Journal "Naukovedenie"*, 2013, no. 5. Available at: http://naukovedenie.ru/110tnv513.pdf

Статья поступила в редакцию 14.10.2014

Лапшин Владимир Владимирович — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры "Теоретическая механика" МГТУ им. Н.Э. Баумана.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Lapshin V.V. — Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor of Theoretical Mechanics department, Bauman Moscow State Technical University.
Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Юрин Евгений Александрович — студент кафедры “Космические аппараты и ракеты-носители” МГТУ им. Н.Э. Баумана.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Yurin E.A. — student of Spacecrafts and Space Vehicles department, Bauman Moscow State Technical University.
Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Лапшин В.В., Юрин Е.А. Нелинейная упругопластическая модель коллинеарного удара // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2016. № 1. С. 90–99. DOI: 10.18698/1812-3368-2016-1-90-99

Please cite this article in English as:

Lapshin V.V., Yurin E.A. Nonlinear elastoplastic model of collinear impact. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2016, no. 1, pp. 90–99. DOI: 10.18698/1812-3368-2016-1-90-99