DOI: 10.18698/1812-3368-2016-3-3-15

УДК 517.91

Построение приближенных решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка в области аналитичности

А.З. Пчелова

Чувашский государственный педагогический университет
им. И.Я. Яковлева, Чебоксары, Российская Федерация
e-mail: apchelova@mail.ru

Нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения представляют собой математические модели самых разнообразных процессов и явлений окружающего мира, являются одной из сложных категорий дифференциальных уравнений в силу наличия у их интегралов подвижных особых точек. Рассмотрен класс нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с полиномиальной правой частью не ниже третьей степени, решения которых обладают подвижными особыми точками, в общем случае не интегрируемые в квадратурах. Применен приближенный метод решения нелинейных дифференциальных уравнений с подвижными особыми точками алгебраического типа, предложенный В.Н. Орловым. Приведено доказательство теоремы существования и единственности решения задачи Коши для рассматриваемого класса дифференциальных уравнений в области аналитичности. В доказательстве этой теоремы метод мажорант использован для решения нелинейных дифференциальных уравнений, а не правой части дифференциальных уравнений, как это сделано в классической литературе. Предложена структура аналитических приближенных решений рассматриваемых уравнений с точными и возмущенными значениями начальных условий, приведены оценки погрешностей этих приближенных решений. Дано сравнение результатов расчетов с аналогичными результатами расчетов, выполненными другими авторами.

Ключевые слова: *нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение, подвижная особая точка, задача Коши, аналитическое приближенное решение, погрешность приближенного решения, возмущение начального условия, область аналитичности.*

Constructing the Approximate Solutions for a Class of First-Order Nonlinear Differential Equations in the Analyticity Region

A.Z. Pchelova

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russian Federation
e-mail: apchelova@mail.ru

Nonlinear ordinary differential equations are mathematical models of various processes and phenomena of the real world; they belong to one of the most complicated categories of differential equations due to the presence of integrals of movable singular points. The study tested a class of first-order nonlinear ordinary differential equations with polynomial right part of not lower than the third degree. The solutions of these equations have movable singular points. The equations are not integratable in quadratures in a common case. For solving nonlinear differential equations with movable singular points of the algebraic type, we use the approximate method proposed by V.N. Orlov. We prove the existence and uniqueness of Cauchy problem solution for the class of differential equations in the analyticity region. In proving this theorem, we use the method of majorants for solving the examined nonlinear differential equations, rather than for solving the right part of differential equations, as it is done in classic literature. We offer the structure of approximate analytical solutions to the equations under study with the exact and perturbed values of the initial conditions, and we estimate the errors for these approximate solutions. The findings of the research are illustrated with the examples of calculations which are compared with similar results performed by other researchers.

Keywords: *nonlinear ordinary differential equation, movable singular point, Cauchy problem, analytical approximate solution, error of the approximate solution, perturbation of the initial condition, analyticity region.*

Введение. Многие задачи науки и техники сводятся к решению либо линейных, либо нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Теория линейных обыкновенных дифференциальных уравнений достаточно полно разработана и содержит как точные, так и приближенные методы решения. В настоящее время для нелинейных дифференциальных уравнений такой разработанной теории пока нет. Особенность нелинейных дифференциальных уравнений — наличие подвижных особых точек у их решений. Нелинейные дифференциальные уравнения относятся к категории уравнений, не разрешимых в квадратурах в общем случае. Наличие подвижных особых точек не позволяет применять к нелинейным дифференциальным уравнениям известные аналитические и численные приближенные методы, поскольку последние не адаптированы к такому виду особых точек. В связи с этим задача нахождения приближенных решений указанного выше класса нелинейных дифференциальных уравнений является актуальной.

Материалы и методы решения задачи, принятые допущения. В настоящей работе применен приближенный метод решения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с подвижными особыми точками алгебраического типа, основанный на методах аналитической теории дифференциальных уравнений, математического анализа и вычислительной математики. Идея метода изложена в работах [1–6] и заключается в разделении области поиска решения дифференциального уравнения на область аналитичности и окрестность подвижной особой точки, а затем в построении аналитических приближенных решений в этих областях. Приближенный метод основан на решении следующих задач:

1) доказательство теоремы существования и единственности решения дифференциального уравнения в области аналитичности;

2) построение аналитического приближенного решения рассматриваемого уравнения в области аналитичности;

3) исследование влияния возмущения начального условия на приближенное решение в области аналитичности;

4) доказательство теоремы существования и единственности решения дифференциального уравнения в окрестности подвижной особой точки;

5) построение аналитического приближенного решения рассматриваемого уравнения в окрестности подвижной особой точки;

6) исследование влияния возмущения подвижной особой точки на приближенное решение в окрестности подвижной особой точки;

7) нахождение точных границ области применения приближенного решения рассматриваемого уравнения в окрестности возмущенного значения подвижной особой точки;

8) получение необходимых и достаточных условий существования подвижных особых точек уравнения;

9) разработка алгоритма и программы нахождения подвижной особой точки с заданной точностью на конечном промежутке.

Следует отметить, что ранее такой метод применялся не только к скалярным дифференциальным уравнениям Риккати, Абеля и Пенлеве, но и к матричным дифференциальным уравнениям Риккати [1–6]. В последнее время появились работы [7–10], в которых упомянутый выше приближенный метод получил дальнейшее развитие.

В настоящей работе предложено решение первых трех перечисленных задач для класса нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка с полиномиальной правой частью.

Результаты. Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение, в общем случае не разрешимое в квадратурах, решение которого обладает подвижными особыми точками алгебраического типа [11]:

$$y'(x) = \sum_{i=0}^{k} f_i \, y^i(x), \;\; k \geq 3. \tag{1}$$

Здесь $f_i, \; i = 0, 1, \ldots, k$ — функции вещественной переменной x.

С помощью подстановки $y = w(x)\, u(\xi) - \dfrac{f_{k-1}}{k\, f_k}$ при условиях

$$\frac{f_{k-1}}{k\, f_k} = \frac{2 f_{k-2}}{(k-1) f_{k-1}} = \frac{3 f_{k-3}}{(k-2) f_{k-2}} = \frac{4 f_{k-4}}{(k-3) f_{k-3}} = \ldots =$$

$$= \frac{(k-4) f_4}{5 f_5} = \frac{(k-3) f_3}{4 f_4} = \frac{(k-2) f_2}{3 f_3},$$

где $w=\exp\left(\int\left(f_1-\frac{f_2 f_{k-1}}{C_k^{k/2} f_k}\right)dx\right)$; $\xi=\int f_k\, w^{k-1}dx$, уравнение (1) приводится к нормальной форме $u'(\xi)=u^k(\xi)+I(x)$, при этом

$$f_k\, w^k I =\frac{1}{k}\frac{d}{dx}\left(\frac{f_{k-1}}{f_k}\right)+f_0-\frac{1}{k}\frac{f_1 f_{k-1}}{f_k}+\frac{k-1}{k^k}\frac{f_{k-1}^k}{f_k^{k-1}}.$$

Рассмотрим задачу Коши

$$y'(x)=y^k(x)+r(x),\ \ k\ge 3; \tag{2}$$

$$y(x_0)=y_0. \tag{3}$$

Докажем существование и единственность аналитического решения задачи (2), (3). Известная теорема Коши о существовании и единственности решения задачи Коши, относящаяся к одному подходу доказательства теоремы, не позволяет решить поставленную задачу. В работах [1–6] предложен другой подход в доказательстве теорем — метод мажорант, который применяется не к правой части дифференциального уравнения как в классическом случае, а к решению уравнения. Такой подход позволяет получить решение поставленной задачи.

Теорема 1. *Пусть функция $r(x)$ задачи Коши (2), (3) удовлетворяет следующим условиям:*

1) $r(x)\in C^\infty$ в области

$$|x-x_0|<\rho_1, \tag{4}$$

где $\rho_1=\mathrm{const}>0$;

2) $\exists\, M_1$:

$$\frac{|r^{(n)}(x)|}{n!}\le M_1 \tag{5}$$

$\forall x$ *из области (4), где* $M_1=\mathrm{const}$, $n=0,1,2\ldots$ *Тогда решение этой задачи Коши является аналитической функцией*

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\left(x-x_0\right)^n \tag{6}$$

в области $|x-x_0|<\rho_2$, *где*

$$\rho_2=\min\left\{\rho_1,\frac{1}{k\left(M_2^{k-1}+1\right)}\right\},\qquad M_2=\max\left\{|y_0|,\ \sup_n\frac{|r^{(n)}\left(x_0\right)|}{n!}\right\},$$

$$n=0,1,2,\ldots$$

◀ Из условия теоремы следует, что функция $r(x)$ является аналитической функцией в области (4) и может быть представлена в виде

$$r(x)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n\left(x-x_0\right)^n . \tag{7}$$

Подставляя ряд (6) в уравнение (2) с учетом (7), получаем

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n\left(x-x_0\right)^n\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n\left(x-x_0\right)^n\right)^k+\sum_{n=0}^{\infty} A_n\left(x-x_0\right)^n .$$

Выполнив соответствующие преобразования, имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, C_n\left(x-x_0\right)^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty} B_n\left(x-x_0\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty} A_n\left(x-x_0\right)^n,$$

или

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, C_n\left(x-x_0\right)^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(B_n+A_n\right)\left(x-x_0\right)^n. \tag{8}$$

Здесь

$$B_n=\sum_{i_{k-1}=0}^{n} C_{n-i_{k-1}} \times$$

$$\times\left(\sum_{i_{k-2}=0}^{i_{k-1}} C_{i_{k-1}-i_{k-2}}\left(\sum_{i_{k-3}=0}^{i_{k-2}} C_{i_{k-2}-i_{k-3}}\left(\ldots\left(\sum_{i_2=0}^{i_3} C_{i_3-i_2}\left(\sum_{i_1=0}^{i_2} C_{i_2-i_1} C_{i_1}\right)\right)\ldots\right)\right)\right).$$

Равенство (8) обратится в тождество при условиях

$$n\, C_n=B_{n-1}+A_{n-1}, \quad n=1,2, \ldots \tag{9}$$

Рекуррентное соотношение (9) позволяет однозначно определить все коэффициенты $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ Таким образом, получено формальное единственное представление решения задачи Коши (2), (3) в области $|x-x_0|<\rho_1$ в виде степенного ряда (6).

На основе соотношения (9) для коэффициентов структуры решения (6), получим $C_n=P_{n(k-1)+1}(C_0, A_0, A_1, \ldots, A_{n-1})$, $n=1,2,\ldots$, где $P_{n(k-1)+1}$ — полином степени $n(k-1)+1$ от $C_0, A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ с положительными рациональными коэффициентами.

Докажем сходимость ряда (6) в области $|x-x_0|<\rho_2$. Примем

$$M_2=\max\left\{|y_0|, \sup_n \frac{|r^{(n)}(x_0)|}{n!}\right\}, \quad n=0,1,2,\ldots,$$

что возможно в силу (5).

Учитывая выражения для коэффициентов C_n, полученные с помощью программного обеспечения, приходим к следующей гипотезе оценок:

$$|C_n|\le \frac{1}{n}\ k^{n-1}\,M_2\left(M_2^{k-1}+1\right)^n,\ n=1,\,2,\,3,\ \ldots \tag{10}$$

Доказательство оценок (10) проведено методом математической индукции на основании рекуррентного соотношения (9).

Составим вспомогательный ряд $M_2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\ k^{n-1}M_2\left(M_2^{k-1}+1\right)^n\times$ $\times(x-x_0)^n$, который является мажорирующим для ряда (6). По признаку Даламбера получаем сходимость мажорирующего ряда в области $|x-x_0|<\dfrac{1}{k\left(M_2^{k-1}+1\right)}$. Следовательно, эта область будет являться областью сходимости и для ряда (6). Полагая,

$$\rho_2=\min\left\{\rho_1,\ \frac{1}{k\left(M_2^{k-1}+1\right)}\right\},$$

получаем сходимость ряда (6) в области $|x-x_0|<\rho_2$, что и завершает доказательство теоремы. ►

Оценки для коэффициентов C_n ряда (6), полученные в теореме 1, позволяют построить приближенное решение задачи Коши (2), (3) в виде

$$y_N(x)=\sum_{n=0}^{N}C_n\left(x-x_0\right)^n. \tag{11}$$

Теорема 2. *Пусть выполняются условия 1 и 2 теоремы 1, тогда для аналитического приближенного решения (11) задачи Коши (2), (3) справедлива оценка погрешности*

$$\Delta\,y_N(x)\le\frac{k^N}{N+1}\ \frac{M_2\left(M_2^{k-1}+1\right)^{N+1}|x-x_0|^{N+1}}{1-k\left(M_2^{k-1}+1\right)|x-x_0|}$$

в области $|x-x_0|<\rho_2$, *где* ρ_2 *и* M_2 *— величины, введенные в теореме 1.*

◀ С учетом оценок (10) для коэффициентов C_n имеем

$$\Delta y_N(x) = |y(x) - y_N(x)| =$$

$$= \left| \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-x_0)^n - \sum_{n=0}^{N} C_n (x-x_0)^n \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} C_n \left(x - x_0\right)^n \right| \leq$$

$$\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |C_n| |x-x_0|^n \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n} k^{n-1} M_2 \left(M_2^{k-1}+1\right)^n \|x-x_0\|^n \leq$$

$$\leq \frac{k^N}{N+1} \frac{M_2 \left(M_2^{k-1}+1\right)^{N+1} |x-x_0|^{N+1}}{1 - k\left(M_2^{k-1}+1\right) |x-x_0|},$$

при этом $k\left(M_2^{k-1}+1\right)|x-x_0| < 1$. Следовательно, теорема доказана. ▶

Пример 1. Рассмотрим задачу Коши (2), (3), где $k=5$, $r(x) \equiv 0$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1/2$. Эта задача имеет точное решение $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{16-4x}}$. Вычислим радиус области аналитичности с учетом начального условия задачи Коши $\rho_2 = 0{,}188235294$.

Выберем значение $x_1 = 0{,}09$, принадлежащее области $|x - x_0| < \rho_2$. Расчеты, связанные с оценкой приближенного решения уравнения в случае точного значения начального условия, приведены ниже:

x_1	$y(x_1)$	$y_3(x_1)$	Δ	Δ_1	Δ_2
0,09	0,502852731	0,502852718	$1{,}2 \cdot 10^{-8}$	0,002503452	10^{-6}

Здесь введены следующие обозначения: $y(x_1)$ — значение точного решения данного уравнения; $y_3(x_1)$ — значение приближенного решения; Δ — абсолютная погрешность; Δ_1 — априорная погрешность, найденная по теореме 2; Δ_2 — апостериорная погрешность.

С использованием теоремы 2 можно решить обратную задачу теории погрешности, связанную с нахождением апостериорной погрешности, т. е. определить значение N по заданной точности ε_1 приближенного решения. Для $\varepsilon_1 = 10^{-6}$ получаем значение $N = 12$. Фактически, для $N = 4, 5, 6, \ldots, 12$ определяем уточнения приближенного решения $y_3(x_1)$, которые в общей сумме не превышают требуемой точности ε_1. В связи с этим можно ограничиться в структуре приближенного решения значением $N=3$. Таким образом, находим апостериорную погрешность Δ_2 для приближенного решения $y_3(x_1)$, равную значению $\varepsilon_1 = 10^{-6}$.

Для задачи Коши (2), (3) выше рассмотрен случай точного значения начального условия и было построено приближенное решение (11). При осуществлении аналитического продолжения возникает задача исследования влияния возмущения начального условия на приближенное решение

$$\tilde{y}_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \tilde{C}_n (x - x_0)^n , \tag{12}$$

где $\tilde{C}_n$ — возмущенные значения коэффициентов.

Рассмотрим задачу Коши с возмущенным начальным условием

$$y'(x) = y^k(x) + r(x), \ \ k \geq 3; \tag{13}$$

$$\tilde{y}(x_0) = \tilde{y}_0 . \tag{14}$$

Теорема 3. *Пусть выполняются условия 1 и 2 теоремы 1 и известна абсолютная величина возмущения начального условия* $|\tilde{y}_0 - y_0| = \Delta \tilde{y}_0$. *Тогда для аналитического приближенного решения (12) задачи Коши (13), (14) справедлива оценка погрешности*

$$\Delta \tilde{y}_N(x) \leq \frac{k^N}{N+1} \frac{M_3\left(M_3^{k-1}+1\right)^{N+1}\left|x-x_0\right|^{N+1}}{1-k\left(M_3^{k-1}+1\right)\left|x-x_0\right|} +$$

$$+\Delta M\left(1+\frac{k\left(\left(M_3+\Delta M\right)^{k-1}+1\right)\left|x-x_0\right|}{1-k\left(\left(M_3+\Delta M\right)^{k-1}+1\right)\left|x-x_0\right|}\right)$$

в области $\left|x-x_0\right| < \rho_5$, *где*

$$\Delta M = \Delta \tilde{y}_0 , \ \ M_3 = \max\left\{\left|\tilde{y}_0\right|, \sup_n \frac{\left|r^{(n)}\left(x_0\right)\right|}{n!}\right\}, \ n = 0,1,2, \ \ldots ,$$

$$\rho_5 = \min\left\{\rho_3, \rho_4\right\}, \tag{15}$$

$$\rho_3 = \min\left\{\rho_1, \frac{1}{k\left(M_3^{k-1}+1\right)}\right\}; \quad \rho_4 = \frac{1}{k\left(\left(M_3+\Delta M\right)^{k-1}+1\right)} .$$

◄ Используя классический подход к оценке погрешности, запишем

$$\Delta\,\tilde{y}_N(x) = \left|y(x) - \tilde{y}_N(x)\right| \le \left|y(x) - \tilde{y}(x)\right| + \left|\tilde{y}(x) - \tilde{y}_N(x)\right| =$$

$$= \left|\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{C}_n \left(x - x_0\right)^n - \sum_{n=0}^{N} \tilde{C}_n \left(x - x_0\right)^n\right| + \left|\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{C}_n \left(x - x_0\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(x - x_0\right)^n\right| =$$

$$= \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} \tilde{C}_n \left(x - x_0\right)^n\right| + \left|\sum_{n=0}^{\infty} \left(\tilde{C}_n - C_n\right)\left(x - x_0\right)^n\right| \le$$

$$\le \sum_{n=N+1}^{\infty} \left|\tilde{C}_n\right| \left|x - x_0\right|^n + \sum_{n=0}^{\infty} \Delta\tilde{C}_n \left|x - x_0\right|^n = \Delta^{(1)} + \Delta^{(2)},$$

где $\left|\tilde{C}_n - C_n\right| = \Delta\tilde{C}_n$.

Для выражения $\Delta^{(1)}$ с учетом (10) по теореме 2 имеем

$$\Delta^{(1)} \le \frac{k^N}{N+1} \frac{M_3\left(M_3^{k-1} + 1\right)^{N+1} \left|x - x_0\right|^{N+1}}{1 - k\left(M_3^{k-1} + 1\right)\left|x - x_0\right|}.$$

Предполагая следующую оценку $\Delta\tilde{C}_n \le k^n\,\Delta M\left(\left(M_3 + \Delta M\right)^{k-1} + 1\right)^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, где $\Delta M = \Delta\,\tilde{y}_0$, доказываем ее справедливость методом математической индукции. Таким образом, для выражения $\Delta^{(2)}$ получаем оценку

$$\Delta^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta\tilde{C}_n \left|x - x_0\right|^n = \Delta\tilde{C}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Delta\tilde{C}_n \left|x - x_0\right|^n \le$$

$$\le \Delta M + \sum_{n=1}^{\infty} k^n\,\Delta M\left(\left(M_3 + \Delta M\right)^{k-1} + 1\right)^n \left|x - x_0\right|^n \le$$

$$\le \Delta M\left(1 + \frac{k\left(\left(M_3 + \Delta M\right)^{k-1} + 1\right)\left|x - x_0\right|}{1 - k\left(\left(M_3 + \Delta M\right)^{k-1} + 1\right)\left|x - x_0\right|}\right),$$

справедливую в области

$$\left|x - x_0\right| < \rho_4 = \frac{1}{k\left(\left(M_3 + \Delta M\right)^{k-1} + 1\right)}.$$

С учетом области действия оценки для погрешности $\Delta^{(1)}$ окончательно для выражения $\Delta\tilde{y}_N(x)$ получаем область $\left|x - x_0\right| < \rho_5$, где $\rho_5 =$

$$= \min\{\rho_3, \rho_4\};\quad \rho_3 = \min\left\{\rho_1, \frac{1}{k\left(M_3^{k-1} + 1\right)}\right\};\ \rho_4 = \frac{1}{k\left(\left(M_3 + \Delta M\right)^{k-1} + 1\right)}.$$

Следовательно, теорема доказана. ►

Пример 2. Построим первое аналитическое продолжение для приближенного решения задачи Коши, рассмотренной в примере 1. Начальное условие задачи Коши (13), (14): $\tilde{y}_0(0{,}09) = 0{,}502852718.$ Значение возмущения ΔM не превышает абсолютной погрешности $\Delta = 1{,}2 \cdot 10^{-8}.$ Вычислим $\rho_5 = 0{,}18798077.$

Выберем значение $x_2 = 0{,}18,$ принадлежащее области аналитичности $|x - x_0| < \rho_5.$ Расчеты, связанные с оценкой приближенного решения уравнения в случае возмущенного значения начального условия, приведены ниже:

x_2	$y(x_2)$	$\tilde{y}_3(x_2)$	Δ'	Δ'_1	Δ'_2
0,18	0,505788745	0,505788719	$2{,}7 \cdot 10^{-8}$	0,002534567	10^{-7}

Здесь введены следующие обозначения: $y(x_2)$ — значение точного решения; $\tilde{y}_3(x_2)$ — значение приближенного решения; Δ' — абсолютная погрешность; Δ'_1 — априорная погрешность, найденная по теореме 3; Δ'_2 — апостериорная погрешность.

Получаем решение обратной задачи теории погрешности (см. решение, приведенное в примере 1), и апостериорную погрешность. Определяем значение N по заданной точности ε_2 приближенного решения (12). При $\varepsilon_2 = 10^{-7}$ $N = 15.$ Фактически, для $N = 4, 5, 6, \ldots, 15$ получаем уточнения аналитического приближенного решения, которые в общей сумме не превышают требуемой точности $\varepsilon_2.$ Следовательно, в структуре аналитического приближенного решения можно ограничиться значением $N = 3.$ При этом находим апостериорную погрешность Δ'_2 для приближенного решения $\tilde{y}_3(x_2),$ равную значению $\varepsilon_2 = 10^{-7}.$

Обсуждение полученных результатов и их сопоставление с ранее найденными результатами. Результаты позволяют построить приближенное решение задачи Коши для уравнения (2) в области аналитичности с любой заданной точностью. Для оптимизации структуры приближенного аналитического решения используется апостериорная погрешность.

Следует отметить, что ранее в работах [6, 7] были получены и изучены приближенные решения для уравнений $y'(x) = y^3(x) + r(x)$ и $y'(x) = y^4(x) + r(x)$ в области аналитичности, представляющих собой частные случаи уравнения (2). Анализ результатов, приведенных в этих работах, и результатов, полученных в настоящей работе, позволяет сделать следующие выводы. Оценки коэффициентов C_n, найденные по формуле (10) для случаев $k = 3$ и $k = 4$, являются улучшенными по сравнению с оценками этих коэффициентов, полученными в указанных выше работах. Что касается областей сходимости соответствующих регулярных рядов, то они существенно увеличены по сравнению с результатами, изложенными в работах [6, 7]. Проиллюстрируем это на следующем примере.

Пример 3. Рассмотрим задачу Коши из работы [7]: $y'(x) = y^4(x)$, $y(0{,}1) = 1\big/\sqrt[3]{3{,}7}$. Эта задача имеет точное решение $y(x) = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{3x-4}}$. Вычислим $\rho_2 = 0{,}1968085106$.

Выберем значение $x_1 = 0{,}12$, принадлежащее области $|x - x_0| < \rho_2$. Имеем $y(0{,}12)$ = 0,6500791026 и $y_3(0{,}12)$ = 0,6500790961, $\Delta = 6{,}5 \cdot 10^{-9}$ — абсолютная погрешность приближенного решения. Обозначим значения, взятые из работы [7], индексом «*». Результаты расчетов приведены ниже (Δ_1 — априорная погрешность, найденная по теореме 2):

ρ_2	ρ_2^*	Δ_1	Δ_1^*
0,1968085106	0,0560039177	0,0000047969	0,0109049371

Построим аналитическое продолжение для приближенного решения рассматриваемой задачи Коши. Начальные данные: $x_0 = 0{,}12$, $\tilde{y}_0 = 0{,}650079096$. По формуле (15) $\rho_5 = 0{,}1961206909$. Выберем значение $x_2 = 0{,}143$, принадлежащее области $|x - x_0| < \rho_5$. Имеем $y(0{,}143) = 0{,}6542394327$, $\tilde{y}_3(0{,}143) = 0{,}6542394137$, $\Delta' = 1{,}9 \cdot 10^{-8}$ — абсолютная погрешность соответствующего приближенного решения. Результаты расчетов представлены ниже (Δ_2 — априорная погрешность, найденная по теореме 3):

ρ_5	ρ_5^*	Δ_2	Δ_2^*
0,1961206909	0,0556449448	0,0000087138	0,02115635599

В результате проведенных расчетов имеем значение априорной погрешности, значительно меньшее значения, указанного в работе [7].

Заключение. Доказана теорема существования и единственности решения рассматриваемого нелинейного дифференциального уравнения в области аналитичности, для которого построено аналитическое приближенное решение и исследовано влияние возмущения начального условия на приближенное решение. Получены оценки приближенных решений. Теоретические результаты подтверждены расчетами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лукашевич Н.А., Орлов В.Н.* Исследование приближенного решения второго уравнения Пенлеве // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25. № 10. С. 1829–1832.
2. *Орлов В.Н.* О приближенном решении первого уравнения Пенлеве // Вестник Казанского гос. тех. ун-та им. А.Н. Туполева. 2008. № 2. С. 42–46.
3. *Орлов В.Н.* Метод приближенного решения дифференциального уравнения Риккати // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского гос. политех. ун-та. 2008. № 63. С. 102–108.
4. *Орлов В.Н.* Об одном методе приближенного решения матричных дифференциальных уравнений Риккати // Вестник Московского авиац. ин-та. 2008. Т. 15. № 5. С. 128–135.
5. *Орлов В.Н.* Точные границы области применения приближенного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности приближенного значения подвижной особой точки // Вестник Воронежского гос. тех. ун-та. 2009. Т. 5. № 10. С. 192–195.
6. *Орлов В.Н.* Метод приближенного решения первого, второго дифференциальных уравнений Пенлеве и Абеля. М.: МПГУ, 2013. 174 с.
7. *Орлов В.Н., Гузь М.П.* Приближенное решение в области аналитичности одного нелинейного дифференциального уравнения // Вестник Мордовского гос. ун-та. Сер. Физико-математические науки. 2012. № 2. С. 187–191.
8. *Орлов В.Н., Леонтьева Т.Ю.* Построение приближенного решения одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка в окрестности подвижной особой точки // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2015. № 2. С. 26–37. DOI: 10.18698/1812-3368-2015-2-26-37
9. *Орлов В.Н., Иванов С.А.* Приближенное решение в области аналитичности одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка // Вестник Чувашского гос. пед. ун-та им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. 2014. № 4 (22). С. 204–214.
10. *Орлов В.Н., Редкозубов С.А., Пчелова А.З.* Исследование приближенного решения задачи Коши одного нелинейного дифференциального уравнения в окрестности подвижной особой точки // Известия института инженерной физики. 2013. № 2 (28). С. 21–27.
11. *Голубев В.В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.–Л.: Гостехиздат, 1950. 436 с.

REFERENCES

[1] Lukashevich N.A., Orlov V.N. Studies of the approximate solution of the second Painleve. *Differ. Uravn.* [Differential Equations], 1989, vol. 25, no. 10, pp. 1829–1832 (in Russ.).

[2] Orlov V.N. About the approximate solution of the first Painleve equation. *Vestn. Kazan. Gos. Tekh. Univ. im. A.N. Tupoleva* [Herald of the A. Tupolev Kazan State Technical University], 2008, no. 2, pp. 42–46 (in Russ.).

[3] Orlov V.N. The method for the approximate solution of Riccati differential equation. *Nauch.-tekh. vedomosti Sankt-Peterb. Politekh. Univ.* [Scientific and technical statements of the St. Petersburg State Polytechnical University], 2008, no. 63, pp. 102–108 (in Russ.).

[4] Orlov V.N. About a teachnique to solve approximately matrix differential Riccati equations. *Vestn. Moskovskogo aviatsionnogo inst.* [Bull. of Moscow Aviation. Inst.], 2008, vol. 15, no. 5, pp. 128–135 (in Russ.). Available at: http://www.mai.ru/science/vestnik/eng/publications.php?ID=7837&eng=Y

[5] Orlov V.N. The exact application area borders of Abel differential equation approximate solution in the area of the movable special point approximate meaning. *Vestn. Voronezh. Gos. Tekh. Univ.* [Herald of the Voronezh State Technical University], 2009, vol. 5, no. 10, pp. 192–195 (in Russ.).

[6] Orlov V.N. Metod priblizhennogo resheniya pervogo, vtorogo differentsial'nykh uravneniy Penleve i Abelya [Method of approximate solution of the first, second differential Painleve's and Abel's equations]. Moscow, MPGU Publ., 2013. 174 p.

[7] Orlov V.N., Guz M.P. The approximate solution of nonlinear differential equation in the domain of analyticity. *Vestn. Mordovsk. Gos. Univ. im. N.P. Ogareva, Fiz.-Matem. Nauki* [Bull. of the Ogarev Mordovia State University, Phys.-Math. Sci.], 2012, no. 2, pp. 187–191 (in Russ.).

[8] Orlov V.N., Leontieva T.Yu. Construction of approximate solution of one nonlinear differential second-order equation in the neighborhood of movable singular point. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2015, no. 2, pp. 26–37 (in Russ.). DOI: 10.18698/1812-3368-2015-2-26-37

[9] Orlov V.N., Ivanov S.A. Numerical Solution of Three-Dimensional Problems of Seismic Stability of Large Structures. *Vestn. Chuvash Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva, Mekh. predel. sost.* [I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University Bulletin, Mechanics of Limit State], 2014, no. 4, pp. 204–214 (in Russ.).

[10] Orlov V.N., Redkozubov S.A., Pchelova A.Z. The research of the approximate solution of the Cauchy problem of a nonlinear differential equation in the neighborhood of movable singular point. *Izvestiya Inst. inzhener. fiziki* [Proceedings of the Institute of Engineering Physics], 2013, no. 2, pp. 21–27 (in Russ.).

[11] Golubev V.V. Lektsii po analiticheskoi teorii differentsial'nykh uravnenii [Lectures on the analytic theory of differential equations]. Moscow–Leningrad, Gostechizdat Publ., 1950. 436 p.

Статья поступила в редакцию 21.07.2015

Пчелова Алевтина Зиноновна — старший преподаватель кафедры математического анализа, алгебры и геометрии Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева (Российская Федерация, 428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, д. 38).

Pchelova A.Z. — Senior Lecturer of Mathematical Analysis, Algebra & Geometry Department, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University (ul. K. Marksa 38, Cheboksary, 428000 Russian Federation).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:
Пчелова А.З. Построение приближенных решений одного класса нелинейных дифференциальных решений первого порядка в области аналитичности // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2016. № 3. С. 3–15. DOI: 10.18698/1812-3368-2016-3-3-15

Please cite this article in English as:
Pchelova A.Z. Construction of approximate solutions for a class of first-order nonlinear differential equations in the analyticity region. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2016, no. 3, pp. 3–15. DOI: 10.18698/1812-3368-2016-3-3-15