DOI: 10.18698/1812-3368-2016-3-16-26

УДК 517.925

К вопросу о симметричности решений линейных матричных дифференциальных уравнений

Д.А. Фетисов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: dfetisov@yandex.ru

Рассмотрена проблема симметричности решений задачи Коши для линейного матричного дифференциального уравнения, коэффициенты которого — функции, аналитические в некоторой области комплексной плоскости. Выведена формула, описывающая производные высших порядков любого решения такого уравнения. На основе полученной формулы доказаны достаточные условия симметричности решения задачи Коши для линейного матричного дифференциального уравнения. Проверка этих условий сведена к анализу свойств элементов специальной последовательности матриц. Показано, что при выполнении определенных условий такую проверку можно проводить не для бесконечного числа элементов последовательности, а лишь для первых нескольких ее элементов. Приведен пример линейного матричного дифференциального уравнения, для которого симметричность решения задачи Коши доказана с помощью предложенного условия. Полученные результаты могут быть использованы при решении различных задач теории управления.

Ключевые слова: *линейное матричное дифференциальное уравнение, симметричное решение, задача Коши.*

To the Problem of Solution Symmetry for Linear Matrix Differential Equations

D.A. Fetisov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: dfetisov@yandex.ru

The symmetry of Cauchy problem solution for linear matrix differential equations is under research in the present article. The coefficients of the equation in question are supposed to be analytical functions in some domain of the complex plane. We find a formula for high-order derivatives of an arbitrary solution of the equation. We prove the sufficient conditions for the symmetry of Cauchy problem solution for linear matrix differential equations on the basis of the devised formula. To check these conditions, we need to analyse the properties of the special matrix sequence. Since the sequence consists of the infinite number of elements, the check is difficult to implement. It is shown that if some requirements are met, then it is sufficient to check only first several elements of the sequence. The example of the linear matrix differential equation is given to illustrate how the proposed condition may be used in proving the solution symmetry. The obtained results may be used in solving various problems of the control theory.

Keywords: *linear matrix differential equation, symmetric solution, Cauchy problem.*

Введение. Задача исследования матричных дифференциальных уравнений возникает во многих областях науки и техники [1–3]. Так, матричные дифференциальные уравнения Ляпунова [4–8] широко используются при анализе свойств устойчивости динамических систем, а матричные дифференциальные уравнения Риккати [8–12] — при решении задач теории оптимального управления и в задачах фильтрации. В настоящей работе рассматриваются линейные матричные дифференциальные уравнения [13–17], к проблеме исследования которых приводят различные задачи теории управления. В частности, необходимость качественного анализа линейных матричных дифференциальных уравнений появляется при построении решений терминальных задач для аффинных систем [18, 19].

В настоящей работе для линейного матричного дифференциального уравнения

$$W' = A(z)W + B(z) \tag{1}$$

рассматривается задача установления условий, при выполнении которых решение $W(z)$ уравнения (1), удовлетворяющее условию $W(z_0) = W_0$, является симметрическим в области D. В уравнении (1) z — комплексная переменная; $W = W(z)$ — неизвестная матрица размерностью $n \times n$; $A(z)$ и $B(z)$ — заданные матрицы размерностью $n \times n$, аналитические в односвязной области D комплексной плоскости C. Простейшие примеры показывают, что симметричность матрицы W_0, а также симметричность матриц $A(z)$ и $B(z)$ в области D не являются достаточным условием симметричности в области D решения $W(z)$. Цель работы — получение условий симметричности решения $W(z)$, удобных для проверки на практике.

Производные высших порядков решения линейного матричного дифференциального уравнения. Из аналитичности в односвязной области D матриц $A(z)$ и $B(z)$ следует, что любое решение $W(z)$ уравнения (1) также является аналитическим в области D [15–17]. Установим формулу, которой описываются в области D производные высших порядков решения $W(z)$ уравнения (1).

Теорема 1. *Пусть матрицы $A(z)$ и $B(z)$ аналитичны в односвязной области D, а $W(z)$ — произвольное решение уравнения (1) в области D. Тогда для любого номера $k = 0, 1, 2, \ldots$ в области D выполнены равенства*

$$W^{(k)}(z) = P_k(z)W(z) + Q_k(z), \tag{2}$$

где $\{P_k(z)\}$, $\{Q_k(z)\}$ — последовательности матриц, построенные по формулам

$$P_0(z) = E, \quad P_{k+1}(z) = P_k'(z) + P_k(z)A(z), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

$$Q_0(z) = 0, \quad Q_{k+1}(z) = Q_k'(z) + P_k(z)B(z), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

E — единичная $n \times n$-матрица.

◄ Для доказательства утверждения теоремы будем использовать метод математической индукции. При $k = 0$ доказываемое утверждение очевидно. Предполагая, что для некоторого номера j справедливо равенство

$$W^{(j-1)}(z) = P_{j-1}(z)W(z) + Q_{j-1}(z), \tag{5}$$

покажем, что $W^{(j)}(z) = P_j(z)W(z) + Q_j(z)$. Дифференцируя по z соотношение (5) и учитывая равенство $W'(z) = A(z)W(z) + B(z)$, получаем

$$W^{(j)}(z) = P_{j-1}'(z)W(z) + P_{j-1}(z)W'(z) + Q_{j-1}'(z) =$$

$$= P_{j-1}'(z)W(z) + P_{j-1}(z)(A(z)W(z) + B(z)) + Q_{j-1}'(z) =$$

$$= (P_{j-1}'(z) + P_{j-1}(z)A(z))W(z) + Q_{j-1}'(z) + P_{j-1}(z)B(z) = P_j(z)W(z) + Q_j(z).$$

Из доказанного вытекает справедливость соотношений (2). ►

Условия симметричности решения задачи Коши для линейного матричного дифференциального уравнения. Докажем достаточное условие симметричности решения $W(z)$ уравнения (1).

Теорема 2. *Пусть $W(z)$ — решение уравнения (1) в односвязной области D, удовлетворяющее условию $W(z_0) = W_0$, $z_0 \in D$. Если матрицы $P_k(z_0)W_0$ и $Q_k(z_0)$, $k = 0, 1, 2, \ldots,$ симметричны, то решение $W(z)$ симметрично в области D.*

◄ Рассмотрим матрицу $V(z) = W(z) - W'(z)$. Из аналитичности в области D матрицы $W(z)$ следует, что матрица $V(z)$ также является аналитической в области D.

Согласно формуле (2), производная произвольного k-го порядка матрицы $W(z)$, вычисленная в точке z_0, описывается выражением

$$W^{(k)}(z_0) = P_k(z_0)W_0 + Q_k(z_0), \tag{6}$$

а производная k-го порядка матрицы $W(z)$ — соотношением $[W^{\text{т}}]^{(k)}(z) = (P_k(z)W(z))^{\text{т}} + Q_k^{\text{т}}(z)$.

С учетом симметричности матриц $P_k(z_0)W_0$ и $Q_k(z_0)$ производная k-го порядка матрицы $W(z)$, вычисленная в точке z_0, может быть найдена по формуле $[W^{\text{т}}]^{(k)}(z_0) = P_k(z_0)W_0 + Q_k(z_0)$. Вычитая последнее соотношение из равенства (6), получаем, что при всех $k=0, 1, 2, \ldots$ выполнены равенства $V^{(k)}(z_0)=0$. Из аналитичности в области D матрицы $V(z)$ следует, что $V(z)=0$ при всех $z\in D$, а это означает равенство $W(z)=W^{\mathrm{т}}(z)$ при всех $z\in D$. ►

Замечание 1. Условие симметричности матрицы $P_0(z_0)W_0$ с учетом равенства $P_0(z)=E$ означает, что симметрической является матрица W_0.

Согласно теореме 2, для доказательства симметричности в односвязной области D решения $W(z)$ уравнения (1) с начальным условием $W(z_0)=W_0$, $z_0\in D$, необходимо построить последовательности $\{P_k(z)\}$, $\{Q_k(z)\}$ и убедиться в симметричности матриц $P_k(z_0)W_0$ и $Q_k(z_0)$, $k=0, 1, 2, \ldots$ Покажем, что если матрицы $P_k(z)$ удовлетворяют некоторым дополнительным условиям, то все матрицы $Q_k(z)$, $k=0, 1, 2, \ldots$, симметричны. Следовательно, можно ограничиться построением и проверкой свойств только последовательности $\{P_k(z)\}$.

Теорема 3. *Пусть $W(z)$ — решение уравнения (1) в односвязной области D, удовлетворяющее условию $W(z_0)=W_0$, $z_0\in D$, матрицы $P_k(z_0)W_0$, $k=0, 1, 2, \ldots$, симметричны. Если в области D матрицы $P_k(z)B(z)$, $k=0, 1, 2, \ldots$, симметричны, то решение $W(z)$ симметрично в области D.*

◄ Для доказательства теоремы покажем методом математической индукции, что из симметричности в области D матриц $P_k(z)B(z)$ следует симметричность в области D матриц $Q_k(z)$, $k=0, 1, 2, \ldots$ При $k=0$ доказываемое утверждение очевидно, так как $Q_0(z)=0$. Предположим, что для некоторого номера j матрица $Q_j(z)$ является симметрической. Тогда симметрической будет и матрица $Q_{j+1}(z)$. Действительно, из симметричности матрицы $Q_j(z)$ следует симметричность матрицы $Q'_j(z)$, поэтому, используя (4) и учитывая симметричность матрицы $P_j(z)B(z)$, получаем $Q^{\mathrm{т}}{}_{j+1}(z)=\left(Q'_j(z)\right)^{\mathrm{т}}+\left(P_j(z)B(z)\right)^{\mathrm{т}}=$ $=Q'_j(z)+P_j(z)B(z)=Q_{j+1}(z)$. Таким образом, все матрицы $Q_k(z)$ являются симметрическими в области D. В частности, матрицы $Q_k(z)$ симметричны в точке $z_0\in D$. Применяя теорему 2, приходим к утверждению теоремы 3. ►

Замечание 2. В силу равенства $P_0(z)=E$ симметричность в области D матрицы $P_0(z)B(z)$ означает, что симметрической в области D является матрица $B(z)$.

Согласно теореме 3, чтобы убедиться в симметричности в односвязной области D решения $W(z)$ уравнения (1), удовлетворяющего условию $W(z_0)=W_0$, где $z_0 \in D$, требуется доказать симметричность матриц $P_k(z)B(z)$, $z \in D$, и $P_k(z_0)W_0$, $k=0, 1, 2, \ldots$ Покажем, что в некоторых случаях нет необходимости анализировать свойства всей последовательности $\{P_k(z)\}$, а можно ограничиться рассмотрением лишь первых нескольких ее элементов. При выполнении определенных условий можно утверждать, что, если матрицы $P_k(z)B(z)$, $z \in D$, и $P_k(z_0)W_0$ симметричны при $k=\overline{0, m-1}$, то они симметричны и при $k \geq m$.

Обозначим через M кольцо $n \times n$-матриц $P=P(z)$, аналитических в области D. Сопоставим системе (1) отображение $\Phi : M \to M$, действующее по правилу $\Phi(P)=P'+PA$. В соответствии с определением отображения Φ для любых двух матриц $\Lambda=\Lambda(z)$, $P=P(z) \in M$ выполняются равенства

$$\begin{gathered} \Phi(\Lambda+P)=\Phi(\Lambda)+\Phi(P); \\ \Phi(\Lambda P)=\Lambda' P+\Lambda\Phi(P), \end{gathered} \tag{7}$$

а элементы $P_k=P_k(z)$ последовательности $\{P_k(z)\}$ связаны соотношениями $P_0=E$, $P_{k+1}=\Phi(P_k)$, $k=0, 1, 2, \ldots$ Отметим, что из формулы (7) следует справедливость для любого $\mu \in C$ соотношения $\Phi(\mu P)=$ $=\mu\Phi(P)$.

Лемма 1. *Пусть* $\Lambda=\Lambda(z)$, $P=P(z) \in M$. *Тогда при всех* $k \in N$ *выполнено равенство*

$$\Phi^k(\Lambda P)=\sum_{j=0}^{k} C_k^j \Lambda^{(j)} \Phi^{k-j}(P), \tag{8}$$

где $C_k^j=\dfrac{k!}{j!(k-j)!}$ *— биномиальный коэффициент.*

◀ Применяем метод математической индукции. При $k=1$ доказываемое утверждение вытекает из свойства (7) отображения Φ. Предположив, что $\Phi^{k-1}(\Lambda P)=\sum_{j=0}^{k-1} C_{k-1}^j \Lambda^{(j)} \Phi^{k-1-j}(P)$, покажем выполнение равенства (8). Используя соотношение (7), получаем

$$\Phi^k(\Lambda P)=\Phi\left[\sum_{j=0}^{k-1} C_{k-1}^j \Lambda^{(j)} \Phi^{k-1-j}(P)\right]=\sum_{j=0}^{k-1} C_{k-1}^j \Phi\left[\Lambda^{(j)} \Phi^{k-1-j}(P)\right]=$$

$$=\sum_{j=0}^{k-1} C_{k-1}^j \Lambda^{(j+1)} \Phi^{k-1-j}(P)+\sum_{j=0}^{k-1} C_{k-1}^j \Lambda^{(j)} \Phi^{k-j}(P).$$

Выполнив замену индекса $l = j+1$ в первой сумме, запишем равенство

$$\Phi^k(\Lambda P) = \sum_{l=1}^{k} C_{k-1}^{l-1} \Lambda^{(l)} \Phi^{k-l}(P) + \sum_{j=0}^{k-1} C_{k-1}^{j} \Lambda^{(j)} \Phi^{k-j}(P) =$$

$$= \Lambda^{(k)} P + \sum_{l=1}^{k-1} \left(C_{k-1}^{l-1} + C_{k-1}^{l} \right) \Lambda^{(l)} \Phi^{k-l}(P) + \Lambda \Phi^k(P).$$

Поскольку $C_{k-1}^{l-1} + C_{k-1}^{l} = C_k^l$, получаем соотношение $\Phi^k(\Lambda P) = = \Lambda^{(k)} P + \sum_{l=1}^{k-1} C_k^l \Lambda^{(l)} \Phi^{k-l}(P) + \Lambda \Phi^k(P)$, которое совпадает с доказываемым равенством (8). ►

Теорема 4. *Пусть $W(z)$ — решение уравнения (1) в односвязной области D, удовлетворяющее условию $W(z_0) = W_0$, $z_0 \in D$, матрицы $P_k(z_0) W_0$, $k = \overline{0, m-1}$, симметричны. Если в области D матрицы $P_k(z) B(z)$, $k = \overline{0, m-1}$, симметричны и существуют такие аналитические в области D функции $\lambda_0(z), \ldots, \lambda_{m-1}(z)$, что*

$$P_m(z) = \sum_{l=0}^{m-1} \lambda_l(z) P_l(z), \tag{9}$$

то решение $W(z)$ симметрично в области D.

◄ Согласно условию теоремы, матрицы $P_k(z) B(z)$, $z \in D$, и $P_k(z_0) W_0$ симметричны при всех $k < m$, поэтому достаточно показать их симметричность и при $k \geq m$. Используем метод математической индукции. Если $k = m$, то из условия (9) и симметричности матриц $P_k(z) B(z)$, $z \in D$, и $P_k(z_0) W_0$ при $k = \overline{0, m-1}$ следует, что

$$P_m(z_0) W_0 = \sum_{l=0}^{m-1} \lambda_l(z_0) P_l(z_0) W_0 = \sum_{l=0}^{m-1} \lambda_l(z_0) (P_l(z_0) W_0)^{\mathrm{т}} =$$

$$= \sum_{l=0}^{m-1} \lambda_l(z_0) W_0^{\mathrm{т}} P_l^{\mathrm{т}}(z_0) = W^{\mathrm{т}}{}_0 \sum_{l=0}^{m-1} \lambda_l(z_0) P^{\mathrm{т}}{}_l(z_0) =$$

$$= W_0^{\mathrm{т}} P^{\mathrm{т}}{}_m(z_0) = (P_m(z_0) W_0)^{\mathrm{т}};$$

$$P_m(z) B(z) = \sum_{l=0}^{m-1} \lambda_l(z) P_l(z) B(z) = \sum_{l=0}^{m-1} \lambda_l(z) (P_l(z) B(z))^{\mathrm{т}} =$$

$$= \sum_{l=0}^{m-1} \lambda_l(z) B^{\text{т}}(z) P_l(z) = B^{\text{т}}(z) \sum_{l=0}^{m-1} \lambda_l(z) P^{\text{т}}{}_l(z) =$$

$$= B^{\text{т}}(z) P^{\text{т}}{}_m(z) = (P_m(z) B(z))^{\text{т}}.$$

Предположим, что для некоторого номера s матрицы $P_k(z)B(z)$, $z \in D$, и $P_k(z_0)W_0$ симметричны при всех $k = \overline{0, m+s-1}$. Покажем, что матрицы $P_k(z)B(z)$, $z \in D$, и $P_k(z_0)W_0$ симметричны и при $k = m+s$. Согласно лемме 1,

$$P_{m+s}(z) = \Phi^s\left(P_m(z)\right) = \Phi^s\left(\sum_{l=0}^{m-1} \lambda_l(z) P_l(z)\right) = \sum_{l=0}^{m-1} \Phi^s\left(\lambda_l(z) P_l(z)\right) =$$

$$= \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{s} C_s^j \lambda_l^{(j)}(z) \Phi^{s-j}(P_l(z)) = \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{s} C_s^j \lambda_l^{(j)}(z) P_{l+s-j}(z)$$

и в полученной сумме присутствуют лишь матрицы $P_0(z), \ldots, P_{m+s-1}(z)$, тогда, воспользовавшись предположением индукции, имеем

$$P_{m+s}(z) B(z) = \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{s} C_s^j \lambda_l^{(j)}(z) P_{l+s-j}(z) B(z) =$$

$$= \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{s} C_s^j \lambda_l^{(j)}(z) \left(P_{l+s-j}(z) B(z)\right)^{\text{т}} = \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{s} C_s^j \lambda_l^{(j)}(z) B^{\text{т}}(z) P^{\text{т}}{}_{l+s-j}(z) =$$

$$= B(z) \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{s} C_s^j \lambda_l^{(j)}(z) P^{\text{т}}{}_{l+s-j}(z) = B^{\text{т}}(z) P^{\text{т}}{}_{m+s}(z) = \left(P_{m+s}(z) B(z)\right)^{\text{т}}.$$

Аналогично проверяется, что $P_{m+s}(z_0)W_0 = (P_{m+s}(z_0)W_0)^{\text{т}}$. Таким образом, матрицы $P_k(z)B(z)$, $z \in D$, и $P_k(z_0)W_0$ симметричны при всех k. Из теоремы 3 следует, что решение $W(z)$ симметрично в области D. ►

Согласно теореме 4, чтобы убедиться в симметричности в односвязной области D решения $W(z)$ уравнения (1) с начальным условием $W(z_0) = W_0$, $z_0 \in D$, необходимо доказать существование такого номера m, что при $k \le m-1$ матрицы $P_k(z)B(z)$, $z \in D$, и $P_k(z_0)W_0$ являются симметрическими, а матрица $P_m(z)$ представима в виде (9). С учетом замечаний 1 и 2 проверка симметричности матриц $P_0(z)B(z)$ и $P_0(z_0)W_0$ сводится к проверке симметричности матриц $B(z)$ и W_0.

Пример. Рассмотрим уравнение (1), в котором матрицы $A(z)$ и $B(z)$ имеют вид:

$$A(z)=\begin{pmatrix} z & e^{-z^2} \\ 0 & z \end{pmatrix}, \quad B(z)=\begin{pmatrix} z^2 & \sin z \\ \sin z & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $W(z)$ — решение, удовлетворяющее условию $W(0)=W_0$, где

$$W_0=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно заметить, что матрицы $B(z)$ и W_0 симметричны. Поскольку $P_1(z)=A(z)$, то

$$P_1(z)B(z)=A(z)B(z)=\begin{pmatrix} z^3+e^{-z^2}\sin z & z\sin z \\ z\sin z & 0 \end{pmatrix};$$

$$P_1(0)W_0=A(0)W_0=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и условие симметричности матриц $P_1(z)B(z)$, $P_1(0)W_0$ выполнено. Непосредственные вычисления показывают, что матрица $P_2(z)$ имеет вид

$$P_2(z)=P_1'(z)+P_1(z)A(z)=A'(z)+A^2(z)=\begin{pmatrix} 1+z^2 & 0 \\ 0 & 1+z^2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $P_2(z)=\lambda_0(z)E=\lambda_0(z)P_0(z)$, где $\lambda_0(z)=1+z^2$. Следовательно, условия теоремы 4 выполнены, поэтому решение $W(z)$ является симметрическим в плоскости C.

Заключение. Для линейного матричного дифференциального уравнения с аналитическими коэффициентами установлена формула для производных высших порядков любого решения. С помощью полученной формулы доказаны достаточные условия симметричности решения задачи Коши. Проверка этих условий сведена к анализу свойств специальной последовательности матриц. Приведен пример линейного матричного дифференциального уравнения, для которого симметричность решения задачи Коши установлена с помощью предложенного условия.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 14-07-00813, № 16-07-01153) и Министерства образования и науки РФ (проект № 1711 государственного задания РФ).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Varga A.* On solving periodic differential matrix equations with applications to periodic system norms computation // 44th IEEE Conference on Decision and Control 2005 and 2005 European Control Conference CDC-ECC '05. 2005. P. 6545–6550.
2. *Kyrchei I.* Explicit formulas for determinantal representations of the Drazin inverse solutions of some matrix and differential matrix equations // Applied Mathematics and Computation. 2013. Vol. 219. Iss. 14. P. 7632–7644.
3. *Lang N., Mena H., Saak J.* On the benefits of the LDL factorization for large-scale differential matrix equation solvers // Linear Algebra and its Applications. 2015. Vol. 480. P. 44–71.
4. *Mori T., Fukuma N., Kuwahara M.* On the Lyapunov matrix differential equation // IEEE Transactions on Automatic Control. 1986. Vol. 31. P. 868–869.
5. *Davis J.M., Gravagne I.A., Marks R.J., Ramos A.* Algebraic and dynamic Lyapunov equations on time scales // Proceedings 42nd Southeastern Symposium on System Theory, Tyler, TX. 2010. P. 329–334.
6. *Zhang J., Liu J.* New estimates for the solution of the Lyapunov matrix differential equation // Electronic journal of linear algebra. 2010. Vol. 20. P. 6–19.
7. *Yongliang Zhu, Pagilla P.R.* Bounds on the solution of the time-varying linear matrix differential equation $\dot{P}(t) = A^{\mathrm{H}}(t)P(t) + P(t)A(t) + Q(t)$ // 43rd IEEE Conference on Decision and Control. 2004. Vol. 5. P. 5392–5396.
8. *Hai-Jun Peng, Zhi-Gang Wu, Wan-Xie Zhong.* Fourier expansion based recursive algorithms for periodic Riccati and Lyapunov matrix differential equations // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2011. Vol. 235. Iss. 12. P. 3571–3388.
9. *Nguyen T., Gajic Z.* Solving the matrix differential Riccati equation: a Lyapunov equation approach // IEEE Transactions on Automatic Control. 2010. Vol. 55. Iss. 1. P. 191–194.
10. *Gajic Z., Koskie S., Coumarbatch C.* On the singularly perturbed matrix differential Riccati equation // Proceedings IEEE Conference Decision and Control. 2005. P. 3638–3644.
11. *Kittipeerachon K., Hori N., Tomita Y.* Exact discretization of a matrix differential Riccati equation with constant coefficients // IEEE Transactions on Automatic Control. 2009. Vol. 54. Iss. 5. P. 1065–1068.
12. *Garrett C.K., Ren-Cang Li.* GIP integrators for Matrix Riccati Differential Equations // Applied Mathematics and Computation. 2014. Vol. 241. P. 283–297.
13. *Verde-Star L.* On linear matrix differential equations // Advances in Applied Mathematics. 2007. Vol. 39. Iss. 3. P. 329–344.
14. *Bin Z., Guangren D.* Closed form solutions for matrix linear systems using double matrix exponential functions // Control Conference CCC-2007. 2007. P. 123–127.
15. *Айнс Э.Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков: Гос.-научно-техническое изд-во Украины, 1939. 719 с.
16. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
17. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Издательство иностранной литературы, 1958. 474 с.
18. *Фетисов Д.А.* Решение терминальных задач для многомерных аффинных систем на основе преобразования к квазиканоническому виду // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2014. № 5. С. 16–31.

19. *Фетисов Д.А.* Об одном методе решения терминальных задач для аффинных систем // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журнал. 2013. № 11. DOI: 10.7463/1113.0622543 URL: http://technomag.bmstu.ru/doc/622543.html

REFERENCES

[1] Varga A. On solving periodic differential matrix equations with applications to periodic system norms computation. *44th IEEE Conference on Decision and Control 2005*; *European Control Conference CDC-ECC '05*, 2005, pp. 6545–6550.

[2] Kyrchei I. Explicit formulas for determinantal representations of the Drazin inverse solutions of some matrix and differential matrix equations. *Applied Mathematics and Computation*, 2013, vol. 219, iss. 14, pp. 7632–7644.

[3] Lang N., Mena H., Saak J. On the benefits of the LDL factorization for large-scale differential matrix equation solvers. *Linear Algebra and its Applications*, 2015, vol. 480, pp. 44–71.

[4] Mori T., Fukuma N., Kuwahara M. On the Lyapunov matrix differential equation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1986, vol. 31, pp. 868–869.

[5] Davis J.M., Gravagne I.A., Marks R.J., Ramos A. Algebraic and dynamic Lyapunov equations on time scales. *Proceedings 42nd Southeastern Symposium on System Theory*, Tyler, TX, 2010, pp. 329–334.

[6] Zhang J., Liu J. New estimates for the solution of the Lyapunov matrix differential equation. *Electronic journal of linear algebra*, 2010, vol. 20, pp. 6–19.

[7] Yongliang Zhu, Pagilla P.R. Bounds on the solution of the time-varying linear matrix differential equation $\dot{P}(t) = A^{\mathrm{H}}(t)P(t) + P(t)A(t) + Q(t)$. *43rd IEEE Conference on Decision and Control*, 2004, vol. 5, pp. 5392–5396.

[8] Hai-Jun Peng, Zhi-Gang Wu, Wan-Xie Zhong. Fourier expansion based recursive algorithms for periodic Riccati and Lyapunov matrix differential equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2011, vol. 235, iss. 12, pp. 3571–3588.

[9] Nguyen T., Gajic Z. Solving the matrix differential Riccati equation: a Lyapunov equation approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010. vol. 55, iss. 1, pp. 191–194.

[10] Gajic Z., Koskie S., Coumarbatch C. On the singularly perturbed matrix differential Riccati equation. *Proceedings IEEE Conference Decision and Control*, 2005, pp. 3638–3644.

[11] Kittipeerachon K., Hori N., Tomita Y. Exact discretization of a matrix differential Riccati equation with constant coefficients. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, vol. 54, iss. 5, pp. 1065–1068.

[12] Garrett C.K., Ren-Cang Li. GIP integrators for Matrix Riccati Differential Equations. *Applied Mathematics and Computation*, 2014, vol. 241, pp. 283–297.

[13] Verde-Star L. On linear matrix differential equations. *Advances in Applied Mathematics*, 2007, vol. 39, iss. 3, pp. 329–344.

[14] Bin Z., Guangren D. Closed form solutions for matrix linear systems using double matrix exponential functions. *Control Conference CCC-2007*, 2007, pp. 123–127.

[15] Ince E.L. Ordinary differential equations. London, N.Y., Longmans, Green and Co., 1927. 558 p.

[16] Hartman P. Ordinary differential equation. N.Y., London, Sydney, John Wiley & Sons, 1964. 612 p.

[17] Coddington E.A., Levinson N. Theory of ordinary differential equations. N.Y., Toronto, London, McGrow-Hill Book Company, Inc., 1955. 429 p.

[18] Fetisov D.A. Solving terminal problems for multidimensional affine systems based on transformation to a quasicanonical form. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2014, no. 5, pp. 16–31 (in Russ.).

[19] Fetisov D.A. A method for solving terminal control problems for affine systems. *Nauka i obrazovanie. MGTU im. N.E. Baumana* [Science & Education of the Bauman MSTU. Electronic Journal], 2013, no. 11. DOI: 10.7463/1113.0622543 Available at: http://technomag.bmstu.ru/en/doc/622543.html

Статья поступила в редакцию 14.12.2015

Фетисов Дмитрий Анатольевич — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Математическое моделирование» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5).

Fetisov D.A. — Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Professor of Mathematical Modelling Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Фетисов Д.А. К вопросу о симметричности решений линейных матричных дифференциальных уравнений // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2016. № 3. С. 16–26. DOI: 10.18698/1812-3368-2016-3-16-26

Please cite this article in English as:

Fetisov D.A. To the problem of solutions symmetry for linear matrix differential equations. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2016, no. 3, pp. 16–26. DOI: 10.18698/1812-3368-2016-3-16-26