DOI: 10.18698/1812-3368-2016-3-27-41

УДК 517.935.4

# О стабилизации аффинных систем при наличии возмущений

**А.В. Кавинов**

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: kavinov@newmail.ru

*Исследован вопрос о возможности глобальной стабилизации при наличии возмущений аффинных систем произвольной размерности со скалярным управлением и скалярным возмущением, для которых соответствующие системы без возмущений эквивалентны регулярным системам канонического вида. Получены легко проверяемые условия того, что построенная на основе регулярного канонического вида функция Ляпунова для системы с управлением будет функцией Ляпунова для системы с возмущениями. Приведены результаты численного моделирования процесса стабилизации трехмерной аффинной системы с возмущениями.*

***Ключевые слова:*** *стабилизация при наличии возмущений, стабилизация от входа к состоянию, аффинная система, преобразование к эквивалентному каноническому виду, функция Ляпунова, система с управлением.*

# On the Input-to-State Stabilization of Affine Systems

**A.V. Kavinov**

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: kavinov@newmail.ru

*The article examines the possibility of global stabilization of affine systems of arbitrary dimension with the scalar control and scalar disturbance. In this case the corresponding systems without disturbances are equivalent to regular systems of a canonical form. We obtain easily verifiable conditions implying that Lyapunov function built on the basis of the regular canonical form for the system with control is Lyapunov function for the system with disturbances. We provide the research with the results of numerical modeling of the stabilization process for three-dimensional affine systems with disturbances.*

***Keywords:*** *input-to-state stabilization, stabilization in the presence of disturbances, affine system, transformation to the equivalent canonical form, Lyapunov function, system with control.*

**Введение.** Рассмотрим систему

$$\dot{x}(t) = A(x) + C(x)w, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad w \in \mathbb{R}^k, \tag{1}$$

где $A(x)$ и $C(x)$ — гладкие функции; $A(0) = 0$; $w$ — возмущение. Систему

$$\dot{x}(t) = A(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \tag{2}$$

называют *невозмущенной системой*, а систему (1) — *возмущенной системой*.

Система (1) *глобально устойчива при наличии возмущений* (или *устойчива от входа к состоянию*), если существуют такие функции $\beta \in \mathcal{KL}$ и $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$, что для любого начального состояния $x(t_0)$ и любого кусочно непрерывного ограниченного возмущения $w = w(t)$, решение $x(t)$ системы определено при всех $t \geq t_0$ и удовлетворяет условию [1–7]

$$\|x(t)\| \leq \beta\left(\|x(t_0)\|,\ t - t_0\right) + \gamma\left(\sup_{[t,\ t_0]} \|w(\tau)\|\right) \text{ при } t \geq t_0. \tag{3}$$

Приведем следующую теорему [1–5].

**Теорема 1 (о глобальной устойчивости при наличии возмущений).** *Пусть для системы (1) существует функция* $V(x)$ *непрерывно дифференцируемая и удовлетворяющая в области* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ *условиям*

$$\alpha_1\left(\|x\|\right) \leq V(x) \leq \alpha_2\left(\|x\|\right), \tag{4}$$

*где* $\alpha_{1,2} \in \mathcal{K}_\infty$ — *функции*; $\forall x : \|x\| \geq \rho\left(\|w\|\right)$;

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} A(x) + \frac{\partial V(x)}{\partial x} C(x) w \leqslant -P(x). \tag{5}$$

*Здесь* $P(x)$ — *положительно определенная функция*, $\rho \in \mathcal{K}_\infty$. *Тогда система (1) глобально устойчива при наличии возмущений, а функцию* $\gamma$ *в (3) можно выбрать равной* $\alpha_1^{-1} \circ \alpha_2 \circ \rho$.

Функцию $V$, удовлетворяющую условию теоремы 1, называют *функцией Ляпунова системы с возмущением*.

*Аффинной системой с возмущениями* называют систему вида

$$\dot{x}(t) = A(x) + B(x)u + C(x)w, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad w \in \mathbb{R}^k, \quad u \in \mathbb{R}^m, \tag{6}$$

где $A(x) = \left(a_1(x), \ldots, a_n(x)\right)$; $B(x) = \left(b_1(x), \ldots, b_n(x)\right)$; $C(x) = \left(c_1(x), \ldots, c_n(x)\right) \in C^\infty(\Omega)$; $\Omega$ — открытое подмножество $\mathbb{R}^n$; $u$ — управление. Система (6) *глобально стабилизируема при наличии возмущений*, если существует такое непрерывное управление $u = u_*(x)$, $u(0) = 0$, что замкнутая им система (6) глобально устойчива при наличии возмущений.

Существуют различные способы стабилизации систем с возмущениями [8–12]. В настоящей работе предложен способ, основанный на преобразовании аффинных систем к эквивалентному каноническому виду [13] и на использовании функции Ляпунова для систем с управлением [6].

Гладкая положительно определенная бесконечно большая при $\|x\| \to \infty$ функция $V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ называется функцией Ляпунова аффинной системы (6) с возмущением, если существует такая функция $\rho \in \mathcal{K}_\infty$, что

$$\forall x \neq 0, w \in \mathbb{R}^k : \|x\| \geq \rho\left(\|w\|\right) \quad \inf_{u \in \mathbb{R}^m} \dot{V}|_{(6)} = \inf_{u \in \mathbb{R}^m} \left\{\mathbf{A}V + \mathbf{B}Vu + \mathbf{C}Vw\right\} < 0,$$

где $\mathbf{A}V$, $\mathbf{B}V$, $\mathbf{C}V$ — производные функции $V$ по векторным полям

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \mathbf{B} = \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \mathbf{C} = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Приведем следующие результаты [1].

**Теорема 2 (критерий функции Ляпунова для системы с возмущениями).** *Для того чтобы гладкая положительно определенная бесконечно большая при* $\|x\| \to \infty$ *функция* $V(x)$ *была функцией Ляпунова системы (6) с возмущением необходимо и достаточно существования такой функции* $\rho \in \mathcal{K}_\infty$, *что*

$$\forall x \neq 0 : \mathbf{B}V = 0 \quad \mathbf{A}V + \|\mathbf{C}V\| \rho^{-1}\left(\|x\|\right) < 0. \tag{7}$$

Функция Ляпунова $V(x)$ системы с управлением $\dot{x} = f(x, u)$ удовлетворяет свойству малых управлений, если выполнено следующее условие: для любого $\varepsilon > 0$ есть такое $\delta > 0$, что для любого $x \neq 0$, $\|x\| < \delta$, существует значение $u_x$, $\|u_x\| < \varepsilon$, управления, при котором

$$\dot{V}(x)|_{u=u_x} = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x, u_x) < 0.$$

**Теорема 3.** *Система (6) глобально стабилизируема при наличии возмущений тогда и только тогда, когда для нее существует функция Ляпунова системы с возмущением, удовлетворяющая свойству малых управлений. При этом стабилизирующее управление может быть вычислено по формуле*

$$u_s(x) = \begin{cases} -\dfrac{\omega(x) + \sqrt{(\omega(x))^2 + \|\mathbf{B}V(x)\|^4}}{\|\mathbf{B}V(x)\|^2} (\mathbf{B}V(x))^{\mathrm{T}}, & \mathbf{B}V(x) \neq 0; \\ 0, & \mathbf{B}V(x) = 0, \end{cases} \tag{8}$$

*где* $\omega(x) = \mathbf{A}V(x) + \|\mathbf{C}V\| \rho^{-1}\left(\|x\|\right)$.

**Преобразование аффинных систем с управлением к регулярному каноническому виду.** С помощью теоремы 3 можно найти стабилизирующее управление для аффинной системы с возмущениями в том случае, когда известна соответствующая функция Ляпунова. Если такая функция неизвестна, то вопрос о стабилизирующем управлении остается открытым. Существует ли вообще управление, стабилизирующее аффинную систему с возмущениями, и как его найти? Ответ на этот вопрос в некоторых случаях может быть дан с использованием преобразования аффинных систем к эквивалентному каноническому виду.

Рассмотрим систему вида

$$\dot{x} = A(x) + B(x)u + C(x)w, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}, w \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

где $A(x) = \left(a_1(x), \ldots, a_n(x)\right)^{\mathrm{т}}$; $B(x) = \left(b_1(x), \ldots, b_n(x)\right)^{\mathrm{т}}$; $C(x) = \left(c_1(x), \ldots, c_n(x)\right)^{\mathrm{т}}$; $A(0) = 0$; $a_i(x), b_i(x),\ c_i(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, $i = 1, \ldots, n.$

Функцию Ляпунова для невозмущенной системы

$$\dot{x} = A(x) + B(x)u \tag{10}$$

можно найти с помощью преобразования к эквивалентному каноническому виду.

**Теорема 4.** *Система (10) эквивалентна на подмножестве* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *системе канонического вида*

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2; \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-1} &= z_n; \\ \dot{z}_n &= f(z) + g(z)u \end{aligned} \tag{11}$$

*тогда и только тогда, когда на подмножестве* $\Omega$ *определена гладкая функция* $\varphi(x)$, *обладающая следующими свойствами:*

*1)* $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \mathrm{ad}_A^k \mathbf{B}\varphi = 0,\ k = 0, \ldots, n-2,$ *где* $\mathrm{ad}_{\mathbf{A}}^0 \mathbf{B} = \mathbf{B}$, $\mathrm{ad}_{\mathbf{A}}^{i+1} \mathbf{B} = [\mathbf{A}, \mathrm{ad}_{\mathbf{A}}^i \mathbf{B}]$;

*2) отображение* $\Phi(x) = (\varphi(x), \mathbf{A}\varphi(x), \ldots, \mathbf{A}^{n-1}\varphi(x))^{\mathrm{т}}$ *является диффеоморфизмом из подмножества* $\Omega$ *в* $\Phi(\Omega)$. *При этом*

$$z = \Phi(x),\ \ f(z) = \mathbf{A}^n \varphi(x)\Big|_{x=\Phi^{-1}(z)},\ \ g(z) = \mathbf{B}\mathbf{A}^{n-1}\varphi(x)\Big|_{x=\Phi^{-1}(z)}.$$

На практике процедура поиска канонического вида состоит из следующих этапов:

1) поиск функции $\varphi(x)$ как неконстантного решения системы уравнений в частных производных из первого пункта условия теоремы 4;

2) построение отображения $\Phi(x)$ в соответствии с пунктом 2;

3) выбор подмножества $\Omega$, на котором будет рассматриваться поведение системы. При этом отображение $\Phi(x)$ должно быть диффеоморфизмом из подмножества $\Omega$ в его образ $\Phi(\Omega)$.

В теоретических выкладках для простоты примем, что $\Omega = \Phi(\Omega) = \mathbb{R}^n$ (в противном случае необходимо учитывать ограничения на состояния системы, так как вне подмножества $\Omega$ управление, построенное с помощью канонического вида, не может быть использовано). Примем также, что на множестве $\mathbb{R}^n$ система (11) регулярна: $\forall z \in \Phi(\Omega)\ \ g(z) \neq 0$.

**Предполагаемая функция Ляпунова для системы с возмущением.** Метод построения функций Ляпунова для аффинных систем с возмущениями, эквивалентных регулярным системам канонического вида, известен [15]. Для системы (11) стабилизирующим (в обычном смысле) нулевое решение управлением будет управление [13]

$$\tilde{u}(z) = \frac{1}{g(z)}\left(-f(z) - \sum_{i=1}^{n} k_{i-1} z_i\right),$$

где $k_i$ — коэффициенты такие, что многочлен $\lambda^n + k_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + k_1\lambda + k_0$ устойчив. Изменяя коэффициенты $k_i$, можно варьировать характер переходных процессов в замкнутой системе

$$\dot{z} = Kz, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -k_0 & -k_1 & -k_2 & \ldots & -k_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Поскольку система (12) является линейной с постоянными коэффициентами, для нее будет существовать функция Ляпунова в виде квадратичной формы $\tilde{V}(z) = z^{\mathrm{T}} P z, \quad P > 0, \quad K^{\mathrm{T}} P + PK < 0.$ Тогда нулевое решение системы (10) будет стабилизироваться управлением

$$\tilde{u}(x) = \frac{1}{g(\Phi(x))}\left(-f(\Phi(x)) - \sum_{i=1}^{n} k_{i-1} \mathbf{A}^{i-1}\varphi(x)\right), \tag{13}$$

а функция

$$V(x) = \Phi(x)^{\mathrm{T}} P \Phi(x) \tag{14}$$

будет функцией Ляпунова системы с управлением (10), замкнутой управлением $\tilde{u}(x)$. Это означает, что функция $V(x)$ будет функцией Ляпунова для невозмущенной системы с управлением (10), причем для нее выполнено свойство малых управлений (управление $\tilde{u}$ и будет управлением $u_x$ из определения свойства). В свою очередь, это означает $\forall x \neq 0 \quad \mathbf{B}V(x) = 0 \Rightarrow \mathbf{A}V(x) < 0.$

Это иногда дает возможность для нахождение функции $\rho^{-1}(\| x \|)$, для которой выполняется условие критерия функции Ляпунова для системы с возмущением (7). В частности, для системы

$$\dot{x} = A(x) + B(x)(u + w) \tag{15}$$

условие (7) будет выполняться для любой допустимой функции $\rho^{-1}(\| x \|)$ [15].

**Постановка задачи.** Далее будет рассмотрена задача поиска функций Ляпунова для аффинных систем с возмущениями в случае скалярного управления и скалярного возмущения, эквивалентных на множестве $\mathbb{R}^n$ регулярным системам канонического вида.

В настоящей работе исследован вопрос о подмножестве систем (9), для которых функция Ляпунова $V(x)$ может быть получена в виде (14). Для таких систем глобальная стабилизация при наличии возмущений может быть осуществлена с помощью управления (8), построенного для функции $V(x)$. Далее для краткости назовем эти системы канонически стабилизируемыми. Как уже было отмечено, системы вида (15) являются канонически стабилизируемыми; оказывается, ими не исчерпывается подмножество канонически стабилизируемых систем. Критерий (7) ниже будет преобразован к виду, удобному для проверки канонической стабилизируемости аффинных систем, приводящихся к регулярному каноническому виду.

**Условия канонической стабилизируемости аффинных систем со скалярным управлением.** Рассмотрим систему (9), для которой соответствующая система (10) эквивалентна на множестве $\mathbb{R}^n$ регулярной системе канонического вида (11). Пусть соответствующий диффеоморфизм $z = \Phi(x)$ удовлетворяет условию

$$\psi_1\left(\|x\|\right) \le \|z\| \le \psi_2\left(\|x\|\right), \quad \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{K}_\infty, \tag{16}$$

или

$$\psi_2^{-1}\left(\|z\|\right) \le \|x\| \le \psi_1^{-1}\left(\|z\|\right). \tag{17}$$

Выполнение условий (16) и (17) гарантирует, что

$$\alpha_1\left(\|x\|\right) \le V(x) \le \alpha_2\left(\|x\|\right), \tag{18}$$

где $\alpha_1(\|x\|)=\lambda_{\min}(P)\psi_1(\|x\|)^2$; $\alpha_2(\|x\|)=\lambda_{\max}(P)\psi_2(\|x\|)^2$; $\lambda_{\min}(P)$ и $\lambda_{\max}(P)$ — наменьшее и наибольшее собственные числа матрицы квадратичной формы $P$.

Вычислим производную $V(x)$ по векторному полю $\mathbf{B}$ (аргумент $x$ для краткости опустим):

$$\mathbf{B}V=\sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial V}{\partial x_i}=\sum_{i=1}^{n} b_i(x)\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^{\mathrm{T}} Pz+z^{\mathrm{T}}P\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{n} b_i(x)\left[\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial z_j}{\partial x_i}p_{jk}z_k+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} z_j p_{jk}\frac{\partial z_k}{\partial x_i}\right]=$$

$$=2\sum_{i=1}^{n} b_i(x)\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} z_j p_{jk}\frac{\partial z_k}{\partial x_i}=2\sum_{j=1}^{n} z_j\sum_{k=1}^{n} p_{jk}\sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial z_k}{\partial x_i}=2\sum_{j=1}^{n} z_j\sum_{k=1}^{n} p_{jk}\mathbf{B}\mathbf{A}^{k-1}\varphi;$$

но

$$\mathbf{B}\mathbf{A}^{k-1}\varphi=\begin{cases}0, & k=1,\ \ldots,\ n-1;\\ g(x), & k=n,\end{cases}$$

поэтому $\mathbf{B}V=2g(x)\sum_{j=1}^{n} z_j p_{jn}$, отсюда

$$\mathbf{B}V=0\Leftrightarrow\sum_{j=1}^{n} z_j p_{jn}=0\Leftrightarrow z_n=\frac{-1}{p_{nn}}\sum_{i=1}^{n-1} p_{in}z_i. \tag{19}$$

Аналогично

$$\mathbf{A}V=2\sum_{j=1}^{n} z_j\sum_{k=1}^{n} p_{jk}\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial z_k}{\partial x_i}=2\sum_{j=1}^{n} z_j\sum_{k=1}^{n} p_{jk}\mathbf{A}^{k}\varphi=$$

$$=2\sum_{j=1}^{n} z_j\left(\sum_{k=1}^{n-1} p_{jk}z_{k+1}+p_{jn}f(z)\right)=2\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n-1} z_j p_{jk}z_{k+1}+2f(z)\sum_{j=1}^{n} z_j p_{jn}.$$

С учетом (19) выражение

$$\mathbf{A}V\,|_{\mathbf{B}V=0}=2\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n-1} z_j p_{jk}z_{k+1}=2\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-2} z_j p_{jk}z_{k+1}-\frac{2}{p_{nn}}\sum_{k=1}^{n-2}\sum_{i=1}^{n-1} p_{in}z_i p_{nk}z_{k+1}-$$

$$-\frac{2}{p_{nn}}\sum_{j=1}^{n-1} z_j p_{jk}\sum_{i=1}^{n-1} p_{in}z_i+\frac{2p_{n,n-1}}{p_{nn}^2}\left(\sum_{i=1}^{n-1} p_{in}z_i\right)^2$$

представляет собой отрицательно определенную квадратичную форму $n-1$ переменной.

Пусть система (10) замкнута некоторым управлением $u(x)$, тогда, значения производной функции Ляпунова $\dot{V}(x)|_{(10),\, u=u(x)} = \mathbf{A}V + u(x)\mathbf{B}V$ на множестве $\{x : BV(x) = 0\}$ не зависят от управления $u(x)$: $\dot{V}(x)|_{(10),\, u=u(x),\, \mathbf{B}V=0} = \mathbf{A}V$. Этот факт можно использовать для оценки значения $\mathbf{A}V|_{\mathbf{B}V=0}$. С одной стороны, выбрав управление $u(x)$ по формуле (13), получим $\dot{V}(x)|_{(10), u=\tilde{u}(x)} = \Phi(x)^{\mathrm{т}}\left(K^{\mathrm{т}}P + PK\right)\Phi(x)$, поэтому $\mathbf{A}V|_{(10), \mathbf{B}V=0} = \Phi(x)^{\mathrm{т}}\left(K^{\mathrm{т}}P + PK\right)\Phi(x)$ и $\mathbf{A}V\big|_{(10),\, \mathbf{B}V=0} \le$ $\le \lambda_{\max}\left(K^{\mathrm{т}}P + PK\right)\|\Phi(x)\|^2$. С другой стороны,

$$\mathbf{C}V = 2\sum_{j=1}^{n} z_j \sum_{k=1}^{n} p_{jk} \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\frac{\partial z_k}{\partial x_i} = 2\sum_{j=1}^{n} z_j \sum_{k=1}^{n} p_{jk}\mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1}\varphi =$$

$$= 2\sum_{j=1}^{n} z_j \left(\sum_{k=1}^{n-1} p_{jk}\mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1}\varphi + p_{jn}\mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1}\varphi\right) =$$

$$= 2\sum_{j=1}^{n} z_j \sum_{k=1}^{n-1} p_{jk}\mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1}\varphi + 2\sum_{j=1}^{n} z_j p_{jn}\mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1}\varphi.$$

Учитывая (19), получаем $\mathbf{C}V\big|_{\mathbf{B}V=0} = 2\sum_{j=1}^{n} z_j \sum_{k=1}^{n-1} p_{jk}\mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1}\varphi = 2z^{\mathrm{т}}Pd$, где $d = (\mathbf{C}\varphi, \mathbf{C}\mathbf{A}\varphi, \ldots, \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-2}\varphi, 0)^{\mathrm{т}}$. Тогда $\left\|\mathbf{C}V|_{\mathbf{B}V=0}\right\| \le 2\|z\| \cdot \|P\|_2 \cdot \|d\| =$ $= 2\lambda_{\max}(P)\|z\|\,\|d\|$. Таким образом, если для $\rho^{-1}\left(\|x\|\right)$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n: \ \sum_{j=1}^{n} z_j(x) p_{jn} = 0 \quad \|d\|\,\rho^{-1}\left(\|x\|\right) < -\frac{\lambda_{\max}\left(K^T P + PK\right)}{2\lambda_{\max}(P)}\|\Phi(x)\|, \tag{20}$$

то условие (7) будет выполнено. Пусть

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|d\| \le M, \tag{21}$$

где $M > 0$.

В выражении (20) достаточно выбрать

$$\rho^{-1}\left(\|x\|\right) = \frac{\sigma\psi_1\left(\|x\|\right)}{M},$$

где $0 < \sigma < -\dfrac{\lambda_{\max}\left(K^{\mathrm{т}}P + PK\right)}{2\lambda_{\max}(P)}$.

При этом

$$\rho(r)=\psi_1^{-1}\left(\frac{Mr}{\sigma}\right) \text{ и } \gamma(r)=\psi_1^{-1}\left(\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}\psi_2\left(\psi_1^{-1}\left(\frac{Mr}{\sigma}\right)\right)\right).$$

Отметим, что этот результат является обобщением результата, полученного в работе [16].

Условие (20) во многих случаях проверяется значительно проще исходного критерия (7). Покажем это на примерах.

**Примеры.** В качестве примера для пояснения изложенного рассмотрим аффинную стационарную систему третьего порядка

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1^2 + x_2 + w;\\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_3 - 2x_1^3 - x_1 x_2 + u;\\ \dot{x}_3 &= x_1 - x_2 - x_1^2. \end{aligned}$$

Имеем

$$A(x)=\begin{pmatrix} x_1^2 + x_2 \\ x_1 + x_3 - 2x_1^3 - x_1 x_2 \\ x_1 - x_2 - x_1^2 \end{pmatrix}, \quad B(x)=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad C(x)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};$$

коммутатор $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \dfrac{\partial B(x)}{\partial x}A(x) - \dfrac{\partial A(x)}{\partial x}B(x) = (-1,\ x_1,\ 1)^{\text{т}}$. Система уравнений в частных производных для поиска функции $\varphi(x)$ примет вид

$$\mathbf{B}\varphi(x)=\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}=0, \quad [\mathbf{A},\mathbf{B}]\varphi(x) = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + x_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} = 0.$$

Поскольку одним из решений системы является $\varphi(x)=x_1+x_3$, исходная система без возмущений приводится к каноническому виду

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2;\\ \dot{z}_2 &= z_3;\\ \dot{z}_3 &= z_2(z_3 - z_2^2) + z_1 + u \end{aligned}$$

заменой $z_1=\varphi(x)=x_1+x_3$, $z_2=\mathbf{A}\varphi(x)=x_1$, $z_3=\mathbf{A}^2\varphi(x)=x_1^2+x_2$. Функцию Ляпунова будем искать для $k_0=6$, $k_1=11$, $k_2=6$; выберем $K^{\text{т}}P+PK=-120E$, тогда

$$K=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{pmatrix}, \quad P=\begin{pmatrix}218 & 138 & 10\\ 138 & 241 & 18\\ 10 & 18 & 13\end{pmatrix},$$

$\lambda_{\min}(P) \approx 11{,}58$, $\lambda_{\max}(P) \approx 369{,}1$ и можно выбрать $\sigma = 0{,}325 < 120/\lambda_{\max}(P)$.

Для возмущенной системы $\mathbf{C}\varphi = \mathbf{CA}\varphi = 1$, $M = \|d\| = \sqrt{2}$,

$$\|z\|^2 = 2x_1^2 + 2x_1x_3 + x_3^2 + x_1^4 + 2x_1^2x_2 + x_2^2;$$

так как

$$2x_1x_3 \le x_1^2 + x_3^2, \quad 2x_1^2x_2 \le x_1^4 + x_2^2, \quad x_1^4 \le \| x \|^4,$$

то

$$\|z\|^2 \le 3x_1^2 + 2x_3^2 + 2x_1^4 + 2x_2^2 \le 3\|x\|^2 + 2\|x\|^4;$$

аналогично $\|x\|^2 \le 3\|z\|^2 + 2\|z\|^4$; таким образом,

$$\psi_1^{-1}\left(\|z\|\right) = \|z\| \sqrt{3 + 2\| z \|^2}; \quad \psi_1\left(\|x\|\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{8\|x\|^2 + 9} - 3};$$

$$\psi_2\left(\|x\|\right) = \|x\| \sqrt{3 + 2\|x\|^2}; \quad \rho^{-1}\left(\|x\|\right) = \frac{\sigma\psi_1\left(\|x\|\right)}{\sqrt{2}};$$

$$\gamma(r) = \psi_1^{-1}\left(\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}\psi_2\left(\psi_1^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}r}{\sigma}\right)\right)\right).$$

Для выбранной функции Ляпунова получаем $\sqrt{\lambda_{\max}/\lambda_{\min}} \approx 5{,}64$, а при $\| w \|_{\max} = 0{,}01 - \gamma(0{,}01) \approx 1{,}49$.

Результаты моделирования процесса управления при различных ограниченных возмущениях приведены на рис. 1. Представленные результаты показывают, что условие $\| x(t) \| \le 1{,}49$ выполняется на заданных отрезках интегрирования для всех трех выбранных типов возмущений с большим запасом.

Рассмотрим простой прикладной пример. Обобщенная модель левитации под воздействием электромагнита (рис. 2) приведена в работе [17].

Исходные уравнения математической модели

$$L\dot{I} + RI = u; \quad m\ddot{y} = mg - F; \quad F = \lambda(y)I^2, \tag{22}$$

где $L$, $R$ — индуктивность и сопротивление обмотки электромагнита; $u$ — напряжение на обмотке; $I$ — ток, проходящий через обмотку; $m$ — масса шара; $g$ — ускорение свободного падения; $y$ — координата шара, $y > 0$; $F$ — сила притяжения; $\lambda(y)$ — некоторая гладкая функция,

$$\forall y > 0 \quad \lambda(y) > 0, \quad \lambda'(y) < 0. \tag{23}$$

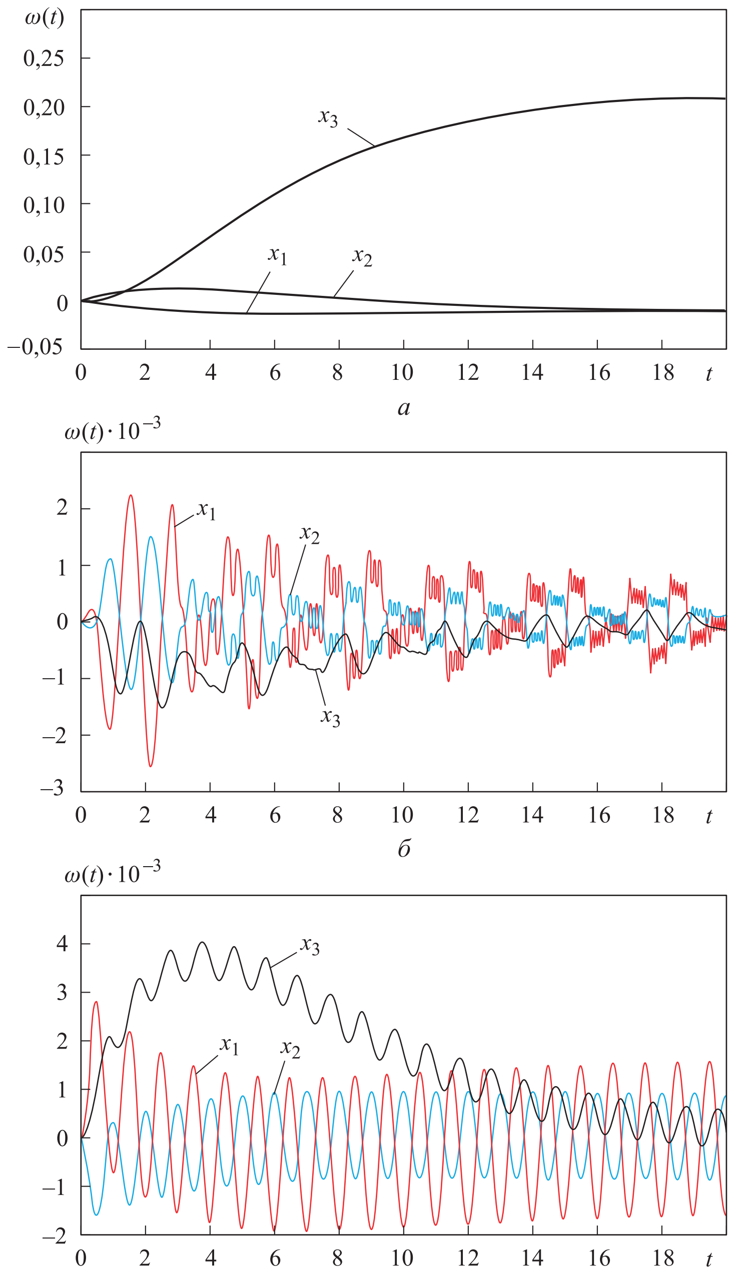


**Рис. 1.** Результаты моделирования процесса стабилизации при $w(t)=0{,}01$ (*а*), $w(t)=0{,}01\sin(t\cos 5t)$ (*б*) и при $w(t)=0{,}01\sin 2\pi t$ (*в*)

Пусть требуется стабилизировать положение шара $y=r$, $r>0$. Этому положению соответствует состояние равновесия $y=r$, $\dot{y}=0$, $I_r=\sqrt{mg/\lambda(r)}$ системы (22). Выполним замену переменных $x_1=y-r$,

$x_2 = \dot{y}$, $x_3 = I - \sqrt{mg/\lambda(r)}$; тогда стабилизируемое положение равновесия исходной системы будет соответствовать нулевому положению равновесия системы в новых переменных

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = x_2; \\
&\dot{x}_2 = g - \frac{\lambda(x_1 + r)}{m}\left( x_3 + \sqrt{\frac{mg}{\lambda(r)}} \right)^2; \\
&\dot{x}_3 = -\frac{R}{L}\left( x_3 + \sqrt{\frac{mg}{\lambda(r)}} \right) + \frac{1}{L}u.
\end{aligned} \tag{24}$$

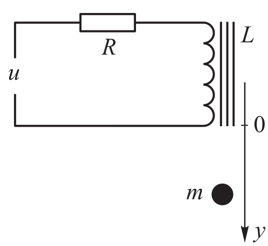


**Рис. 2.** Обобщенная модель левитации под воздействием электромагнита

Получим эквивалентную систему канонического вида для системы без возмущений (24)

$$A(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ g - \dfrac{\lambda\left(x_1 + r\right)}{m}\left( x_3 + \sqrt{\dfrac{mg}{\lambda(r)}} \right)^2 \\ -\dfrac{R}{L}\left( x_3 + \sqrt{\dfrac{mg}{\lambda(r)}} \right) \end{pmatrix}, \quad B(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{L} \end{pmatrix};$$

решая систему в частных производных $\mathbf{B}\varphi = 0$, $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]\varphi = 0$, находим $\varphi(x) = x_1$, отсюда

$$\begin{gathered}
z_1 = \varphi = x_1, \quad z_2 = A\varphi = x_2, \\
z_3 = A^2\varphi = g - \frac{\lambda\left(x_1 + r\right)}{m}\left( x_3 + \sqrt{\frac{mg}{\lambda(r)}} \right)^2.
\end{gathered} \tag{25}$$

Если $x_3 + \sqrt{\dfrac{mg}{\lambda(r)}}$, т. е. ток $I$, сохраняет свой знак, то система (25) является гладкой невырожденной заменой переменных. Для определенности в окрестности положения равновесия будем полагать ток $I$ положительным. Тогда за область определения диффеоморфизма

$$\Phi(x) = \left( x_1,\ x_2,\ g - \frac{\lambda\left(x_1 + r\right)}{m}\left( x_3 + \sqrt{\frac{mg}{\lambda(r)}} \right)^2 \right)$$

можно принять множество $\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x_3 + \sqrt{\frac{mg}{\lambda(r)}} > 0 \right\}.$

Рассмотрим систему с возмущениями во втором уравнении $L\dot{I} + RI = u, \quad m\ddot{y} = mg - F + w, \quad F = \lambda(y)I^2$. В переменных $x$ эта система имеет вид

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2; \\ &\dot{x}_2 = g - \frac{\lambda\left(x_1 + r\right)}{m}\left( x_3 + \sqrt{\frac{mg}{\lambda(r)}} \right)^2 + \frac{1}{m}w; \\ &\dot{x}_3 = -\frac{R}{L}\left( x_3 + \sqrt{\frac{mg}{\lambda(r)}} \right) + \frac{1}{L}u. \end{aligned} \tag{26}$$

Оставляя за рамками настоящей работы вопросы поиска функций $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ и оценки на состояние возмущенной системы, покажем, что для любой удовлетворяющей условиям (23) функции $\lambda(y)$ система (26) удовлетворяет условию (21). Поскольку $C(x) = \left( 0,\ \frac{1}{m},\ 0 \right)^{\mathrm{T}}$, то

$$\mathbf{C}\varphi = \frac{1}{m}\frac{\partial x_1}{\partial x_2} = 0, \quad \mathbf{CA}\varphi = \frac{1}{m}\frac{\partial x_2}{\partial x_2} = \frac{1}{m}.$$

Следовательно, $\|d\| = 1/m$, условия (20) (с учетом существования соответствующих функций $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$) и (21) выполняются.

**Заключение.** Предложен критерий глобальной стабилизируемости двумерных аффинных систем с возмущениями с помощью функций Ляпунова, полученных преобразованием этих систем к регулярному каноническому виду. Приведены примеры, иллюстрирующие полученные результаты.

*Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 14-01-00424 А и № 14-07-00813 А.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Krstic M., Deng H.* Stabilization of Nonlinear Uncertain Systems. London: Springer-Verlag, 1998. 193 p.
2. *Sontag E.D.* A “universal” construction of Artstein's theorem on nonlinear stabilization // Systems Control Lett. 1989. Vol. 13(2). P. 117–123.

3. *Sontag E.D., Wang Y.* On characterizations of the input-to-state stability property // Systems Control Lett. 1995. Vol. 24(5). P. 351–359.
4. *Дашковский С.Н., Ефимов Д.В., Сонтаг Э.Д.* Устойчивость от входа к состоянию и смежные свойства систем // Автоматика и телемеханика. 2011. № 8. С. 3–40.
5. *Sontag E.D*. Input to state stability: basic concepts and results // Nonlinear and optimal control theory. 2008. Vol. 1932. P. 163–220.
6. *Sontag E.D.* Further facts about input to state stabilization // IEEE Trans. Automat. Control. 1990. Vol. 35(4). P. 473–476.
7. *Freeman R.A., Kokotovic P.V.* Robust nonlinear control design. Boston: Birkhauser, 1996. 257 p.
8. *Efimov D.V., Fradkov A.L.* Input-to-output stabilization of nonlinear systems via backstepping // Int. J. Robust Nonlinear Control. 2009. Vol. 19(6). P. 613–633.
9. *Efimov D.V., Fradkov A.L.* Adaptive input-to-output stabilization of nonlinear systems // Int. J. Adaptive Control and Signal Processing. 2008. Vol. 22(10). P. 949–967.
10. *Krstic M., Li Z.-H.* Inverse optimal design of input-to-state stabilizing nonlinear controllers // IEEE Trans. Automat. Control. 1998. Vol. 43(3). P. 336–350.
11. *Byrnes C.I., Isidori A., Willems J.C.* Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1991. Vol. 36(11). P. 1228–1240.
12. *Liberzon D., Sontag E.D., Wang Y.* On integral input to state stabilization // Proc. Amer. Control Conf., San Diego, USA. June 1999. P. 1598–1602.
13. *Краснощеченко В.И., Крищенко А.П.* Нелинейные системы: геометрические методы анализа и синтеза. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. 520 с.
14. *Isidori A*. Nonlinear control systems. London: Springer-Verlag, 1995. 550 p.
15. *Khalil H.K*. Nonlinear systems. New York: Prentice-Hall, 1996. 750 p.
16. *Кавинов А.В*. О стабилизации аффинных систем второго порядка при наличии возмущений // Математика и математическое моделирование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журнал. 2015. № 3. С. 27–38.
URL: http://mathmjournal.ru/doc/789645.html
DOI: 10.7463/mathm.0315.0789645
17. *Krstic M., Kanellakopoulos I., Kokotovic P.* Nonlinear and Adaptive Control Design. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1995. 576 p.


## REFERENCES


[1] Krstic M., Deng H. Stabilization of Nonlinear Uncertain Systems. London, Springer-Verlag, 1998. 193 p.

[2] Sontag E.D. A “universal” construction of Artstein's theorem on nonlinear stabilization. *Systems Control Lett*., 1989, vol. 13(2), pp. 117–123.

[3] Sontag E.D., Wang Y. On characterizations of the input-to-state stability property. *Systems Control Lett.*, 1995, vol. 24(5), pp. 351–359.

[4] Dashkovskiy S.N., Efimov D.V., Sontag E.D. Input to state stability and allied system properties. *Avtomatika i telemehanika* [Automation and Remote Control], 2011, vol. 72, iss. 8, pp. 1579–1614. DOI: 10.1134/S0005117911080017

[5] Sontag E.D. Input to state stability: basic concepts and results. *Nonlinear and optimal control theory*, 2008, vol. 1932, pp. 163–220.

[6] Sontag E.D. Further facts about input to state stabilization. *IEEE Trans. Automat. Control*, 1990, vol. 35(4), pp. 473–476.

[7] Freeman R.A., Kokotovic P.V. Robust nonlinear control design. Boston, Birkhauser, 1996. 257 p.

[8] Efimov D.V., Fradkov A.L. Input-to-output stabilization of nonlinear systems via backstepping. *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 2009, vol. 19(6), pp. 613–633.
[9] Efimov D.V., Fradkov A.L. Adaptive input-to-output stabilization of nonlinear systems. *Int. J. Adaptive Control and Signal Processing*, 2008, vol. 22(10), pp. 949–967.
[10] Krstic M., Li Z.-H. Inverse optimal design of input-to-state stabilizing nonlinear controllers. *IEEE Trans. Automat. Control*, 1998, vol. 43(3), pp. 336–350.
[11] Byrnes C.I., Isidori A., Willems J.C. Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 1991, vol. 36(11), pp. 1228–1240.
[12] Liberzon D., Sontag E.D., Wang Y. On integral input to state stabilization. *Proc. Amer. Control Conf.*, San Diego, USA. June 1999, pp. 1598–1602.
[13] Krasnoshchechenko V.I., Krishchenko A.P. Nelineynye sistemy: geometricheskie metody analiza i sinteza [Nonlinear systems: geometric methods of analysis and synthesis]. Moscow, MGTU im. N.E. Baumana Publ., 2005. 520 p.
[14] Isidori A. Nonlinear control systems. London, Springer Verlag, 1995. 550 p.
[15] Khalil H.K. Nonlinear systems. N.Y., Prentice-Hall, 1996. 750 p.
[16] Kavinov A.V. On the Problem of 2d Affine Systems Input to State Stabilization. *Matematika i matematicheskoe modelirovanie. MGTU im. N.E. Baumana. Elektron. zhurnal* [Mathematics & Mathematical Modelling. Electronic Journal of the Bauman MSTU], 2015, no. 3, pp. 27–38. DOI: 10.7463/mathm.0315.0789645 Available at: http://mathmjournal.ru/en/doc/789645.html
[17] Krstic M., Kanellakopoulos I., Kokotovic P. Nonlinear and Adaptive Control Design. N.Y., John Wiley & Sons, Inc., 1995. 576 p.

Статья поступила в редакцию 21.12.2015

Кавинов Алексей Владимирович — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Математическое моделирование» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5).

Kavinov A.V. — Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Professor of Mathematical Modelling Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:**
Кавинов А.В. О стабилизации аффинных систем при наличии возмущений // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2016. № 3. С. 27–41. DOI: 10.18698/1812-3368-2016-3-27-41

**Please cite this article in English as:**
Kavinov A.V. On the input-to-state stabilization of affine systems. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2016, no. 3, pp. 27–41.
DOI: 10.18698/1812-3368-2016-3-27-41