DOI: 10.18698/1812-3368-2016-3-42-56

УДК 517.958

Решение смешанной краевой задачи Дирихле — Неймана для уравнения Пуассона в многомерном бесконечном слое

О.Д. Алгазин, А.В. Копаев

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: mopi66@yandex.ru; 5736234@mail.ru

Методом преобразования Фурье решена смешанная краевая задача Дирихле — Неймана для уравнения Пуассона в области, ограниченной двумя параллельными гиперплоскостями в пространстве $\mathbb{R}^n$. Решение представлено в виде суммы интегралов, ядра которых найдены в конечном виде. В частности построена функция Грина оператора Лапласа для задачи Дирихле — Неймана, через которую записывается решение задачи. Если заданные граничные значения являются обобщенными функциями медленного роста, то решение задачи для однородного (уравнения Лапласа) записывается в виде свертки ядер с этими функциями.

Ключевые слова: *преобразование Фурье, уравнение Пуассона, смешанная краевая задача, обобщенные функции медленного роста, функция Грина.*

The Solution of the Mixed Boundary Value Problem of Dirichlet — Neumann for the Poisson Equation in a Multidimensional Infinite Layer

O.D. Algazin, A.V. Kopaev

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: mopi66@yandex.ru; 5736234@mail.ru

In this research by the method of Fourier transform we solve the mixed boundary value problem of Dirichlet — Neumann for the Poisson equation in the domain bounded by two parallel hyperplanes in $\mathbb{R}^n$. The solution is represented as a sum of integrals whose kernels are found in the final form. In particular, we constructed Green's function of the Laplace operator for the mixed boundary value problem of Dirichlet — Neumann, by which the solution of the problem is written. If the given boundary values are tempered distributions, the solution of the mixed boundary value problem for the homogeneous equation (Laplace) is written as the convolution of the kernels with these distributions.

Keywords: *Fourier transform, Poisson equation, mixed boundary value problem, tempered distributions, Green's function.*

Введение. Настоящая работа является продолжением работы [1], в которой решена смешанная краевая задача для уравнения Лапласа в бесконечном многомерном слое. Здесь эта краевая задача решена для уравнения Пуассона (неоднородного уравнения Лапласа).

Двух- и трехмерное уравнения Пуассона описывают многие стационарные процессы при наличии источников (стоков) в различных областях механики и физики, например, в теории тепло- и массопереноса, гидро- и аэромеханике, электростатике и т.д. В связи с этим поиск решений различных краевых задач для уравнения Пуассона (и новых более простых форм решений) весьма актуален.

Для n-мерного полупространства основным методом решения краевых задач для линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами является преобразование Фурье по переменным в граничной гиперплоскости [2]. Этот метод применим и для бесконечного слоя. Для полосы и бесконечного слоя в трехмерном пространстве решения краевой задачи известны [3], причем функция Грина записывается в виде бесконечного ряда. Для бесконечного слоя в n-мерном пространстве задача Дирихле для уравнения Лапласа решена другим методом [4]. В настоящей работе решение получено в интегральной форме, ядра интегралов выражены в конечном виде через элементарные функции и функции Бесселя. При этом найдено рекуррентное соотношение, связывающее ядра интегралов для n-мерного и (n+2)-мерного слоев.

Обозначения. Постановка задачи. Введем следующие обозначения:

$$x=\left(x_1,\,\ldots,x_n\right)\in\mathbb{R}^n;\;\left(x,y\right)=\left(x_1,\,\ldots,x_n,y\right)\in\mathbb{R}^{n+1};$$

$$y\in\mathbb{R};\;\left|x\right|=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2};\;\; xt=x_1t_1+\ldots+x_nt_n,$$

$$dx=dx_1\ldots dx_n;\;\Delta u\left(x,y\right)=\Delta u=u_{x_1x_1}+\ldots+u_{x_nx_n}+u_{yy}$$

— оператор Лапласа; $F\left(t\right)=\mathcal{F}\left[f\right]\left(t\right)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}f\left(x\right)e^{ixt}dt$ — преобразование Фурье суммируемой функции $f\left(x\right)$. Если суммируемая по x функция $f\left(x,y\right)$ зависит от переменных x и y, то ее преобразование Фурье по x обозначим как

$$\mathcal{F}_x\left[f\right]\left(t,y\right)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}f\left(x,y\right)e^{ixt}dx.$$

Аналогично определяем обратное преобразование Фурье суммируемой функции $F\left(t\right)$

$$f\left(x\right)=\mathcal{F}^{-1}\left[F\right]\left(x\right)=\frac{1}{\left(2\pi\right)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}F\left(t\right)e^{-ixt}dt$$

и суммируемой по t функции $F(t,y)$

$$\mathcal{F}_t^{-1}[F](x,y) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} F(t,y)e^{-ixt}dt.$$

Определение преобразования Фурье обобщенных функций медленного роста приведено в работе [5].

Рассмотрим смешанную краевую задачу для уравнения Пуассона (неоднородного уравнения Лапласа)

$$\Delta u(x,y) = f(x,y);\ x\in\mathbb{R}^n,\ 0<y<a;$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ x\in\mathbb{R}^n;$$

$$u_y(x,a) = \psi(x),\ x\in\mathbb{R}^n.$$

Решение будем искать в виде суммы $u(x,y) = v(x,y) + w(x,y)$. Здесь $v(x,y)$ удовлетворяет однородному уравнению и неоднородным краевым условиям

$$\Delta v(x,y) = 0,\ x\in\mathbb{R}^n,\ 0<y<a;$$

$$v(x,0) = \varphi(x),\ x\in\mathbb{R}^n;$$

$$v_y(x,a) = \psi(x),\ x\in\mathbb{R}^n,$$

а $w(x,y)$ — неоднородному уравнению и однородным краевым условиям

$$\Delta w(x,y) = f(x,y),\ \ x\in\mathbb{R}^n,\ \ 0<y<a;$$

$$w(x,0) = 0,\ \ x\in\mathbb{R}^n;$$

$$w_y(x,a) = 0, x\in\mathbb{R}^n.$$

Решение однородного уравнения с неоднородными краевыми условиями. Смешанная краевая задача для уравнения Лапласа является решением однородного уравнения с неоднородными краевыми условиями:

$$\Delta v(x,y) = 0,\ x\in\mathbb{R}^n,\ \ 0<y<a,$$

$$v(x,0) = \varphi(x),\ \ x\in\mathbb{R}^n,$$

$$v_y(x,a) = \psi(x),\ x\in\mathbb{R}^n.$$

Решение краевой задачи получено в работе [1]:

$$v(x,y)=\varphi(x)*K_n(x,y)+\psi(x)*L_n(x,y), \tag{1}$$

где

$$K_n(x,y)=\mathcal{F}_t^{-1}[k_n](x,y),\ k_n(|t|,y)=\frac{\operatorname{ch}(|t|(a-y))}{\operatorname{ch}(a|t|)},\ t\in\mathbb{R}^n;$$

$$L_n(x,y)=\mathcal{F}_t^{-1}[l_n](x,y),\ l_n(|t|,y)=\frac{\operatorname{sh}(|t|\,y)}{|t|\operatorname{ch}(a|t|)},\ t\in\mathbb{R}^n.$$

Свертка (1) существует для любых обобщенных функций медленного роста $\varphi(x)\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\psi(x)\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ и записывается в виде

$$\varphi(x)*K_n(x,y)+\psi(x)*L_n(x,y)=\varphi(t),$$
$$K_n(x-t,y)+\psi(t),\ L_n(x-t,y).$$

Когда $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — обычные функции полиномиального роста, свертку (1) представляют суммой интегралов

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(t)K_n(x-t,y)\,dt+\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(t)L_n(x-t,y)\,dt.$$

Для сферически симметричных функций

$$K_n(x,y)=K_n^*(|x|,y)=K_n^*(r,y)\ \text{и}\ L_n(x,y)=L_n^*(|x|,y)=L_n^*(r,y)$$

имеет место рекуррентная формула

$$H_{n+2}(r)=-\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial}{\partial r}H_n(r), \tag{2}$$

с помощью которой можно вычислить ядра при любом значении n, зная их для $n=1$ и $n=2$. Для указанных значений n ядра имеют вид

$$K_1(x,y)=\frac{1}{a}\frac{\sin\left(\frac{\pi y}{2a}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{\pi x}{2a}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi x}{a}\right)-\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)};$$

$$L_1(x,y)=\frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi x}{2a}\right)+\sin\left(\frac{\pi y}{2a}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi x}{2a}\right)-\sin\left(\frac{\pi y}{2a}\right)}\right);$$

$$K_2(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}(\rho(a-y))}{\operatorname{ch}(a\rho)}\rho J_0(\rho|x|)\,d\rho;$$

$$L_2(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}(\rho y)}{\operatorname{ch}(a\rho)}J_0(\rho|x|)\,d\rho,$$

где $J_0(\rho|x|)$ — функция Бесселя.

Решение неоднородного уравнения с однородными краевыми условиями. Запишем решение уравнения с однородными краевыми условиями:

$$\Delta w(x,y)=f(x,y),\ x\in\mathbb{R}^n,\ \ 0<y<a;$$

$$w(x,0)=0,\ x\in\mathbb{R}^n;$$

$$w_y(x,a)=0,\ x\in\mathbb{R}^n.$$

Применим преобразование Фурье к уравнению Пуассона по x, обозначив $W(t,y)=\mathcal{F}_x[w](t,y);\ F(t,y)=\mathcal{F}_x[f](t,y).$ Получим краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения с параметром $t\in\mathbb{R}^n$:

$$-|t|^2W(t,y)+W_{yy}(t,y)=F(t,y);$$

$$W(t,0)=0;\ W_y(t,a)=0.$$

Решение рассматриваемой задачи будем искать в виде разложения в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля

$$z''(y)+\lambda^2 z(y)=0;$$

$$z(0)=0,\ z'(a)=0,$$

т. е. по функциям

$$\sin\frac{\pi(2k+1)y}{2a},\ \ k=0,1,2,3,\ldots;$$

$$W(t,y)=\sum_{k=0}^\infty b_k(t)\sin\frac{\pi(2k+1)y}{2a}.$$

Правую часть уравнения Пуассона разложим в ряд Фурье

$$F(t,y)=\sum_{k=0}^\infty f_k(t)\sin\frac{\pi(2k+1)y}{2a};$$

$$f_k(t) = \frac{2}{a}\int_0^a F(t,y)\sin\frac{\pi(2k+1)y}{2a}dy.$$

Подставив ряды в дифференциальное уравнение и приравняв коэффициенты, получим

$$b_k(t) = -\frac{4a^2 f_k(t)}{\pi^2(2k+1)^2 + 4a^2|t|^2}, \; k = 0, 1, 2, 3, \ldots;$$

$$W(t,y) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4a^2}{\pi^2(2k+1)^2 + 4a^2|t|^2} f_k(t)\sin\frac{\pi(2k+1)y}{2a}.$$

Применив обратное преобразование Фурье, найдем решение краевой задачи

$$w(x,y) = -\frac{2}{a}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{M_{nk}(x) * \int_0^a f(x,\tau)\sin\frac{\pi(2k+1)\tau}{2a}d\tau\right\}\sin\frac{\pi(2k+1)y}{2a} =$$

$$= -\int_0^a\int_{-\infty}^{\infty} f(t,\tau)\left\{\frac{2}{a}\sum_{k=0}^{\infty}M_{nk}(x-t)\sin\frac{\pi(2k+1)\tau}{2a}\sin\frac{\pi(2k+1)y}{2a}\right\}dtd\tau,$$

где

$$M_{nk}(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{4a^2}{\pi^2(2k+1)^2 + 4a^2|t|^2}\right](x);$$

$$\frac{2}{a}\int_0^a f(t,\tau)\sin\frac{\pi(2k+1)\tau}{2a}d\tau = \mathcal{F}^{-1}\left[f_k(t)\right](x).$$

Если правая часть уравнения Пуассона равна дельта-функции

$$f(x,y) = \delta(x - x_0,\, y - y_0) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0),$$

$$x_0 \in \mathbb{R}^n,\; 0 < y_0 < a,$$

то решением краевой задачи будет функция Грина оператора Лапласа для смешанной краевой задачи Дирихле — Неймана

$$G_n(x,y,x_0,y_0) = -\frac{2}{a}\sum_{k=0}^{\infty}M_{nk}(x - x_0)\sin\frac{\pi(2k+1)y_0}{2a}\sin\frac{\pi(2k+1)y}{2a}.$$

Здесь

$$M_{nk}(x) = \mathcal{F}^{-1}[m_{nk}](x); \ \ m_{nk}(t) = \frac{4a^2}{\pi^2(2k+1)^2 + 4a^2|t|^2}.$$

Поскольку $m_{nk}(t)$ — сферически симметричные функции (зависят только от $|t|$), то и функции $M_{nk}(x)$ сферически симметричные функции, $M_{nk}(x) = M_{nk}^*(|x|)$, а функция Грина зависит только от $|x - x_0|$: $G_n(x, y, x_0, y_0) = G_n^*(|x - x_0|, y, y_0) = G_n^*(r, y, y_0)$. По рекуррентной формуле (2) имеем

$$G_{n+2}^*(r, y, y_0) = -\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial}{\partial r}G_n^*(r, y, y_0).$$

Решение смешанной краевой задачи для полосы на плоскости. В случае двух переменных с учетом четности функций по $t\big(k_1(|t|, y) = k_1(t, y),\ l_1(|t|, y) = l_1(t, y),\ m_{1k}(t) = m_{1k}(|t|)\big)$ находим обратное преобразование Фурье по таблицам, приведенным в работе [8]:

$$K_1(x, y) = \mathcal{F}_t^{-1}[k_1](x, y) = \frac{1}{a}\frac{\sin\left(\frac{\pi y}{2a}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{\pi x}{2a}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi x}{a}\right) - \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)};$$

$$L_1(x, y) = \mathcal{F}_t^{-1}[l_1](x, y) = \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi x}{2a}\right) + \sin\left(\frac{\pi y}{2a}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi x}{2a}\right) - \sin\left(\frac{\pi y}{2a}\right)}\right);$$

$$M_{1k}(x) = \mathcal{F}^{-1}[m_{1k}](x) = \frac{a}{\pi(2k+1)}\exp\left(-\frac{\pi(2k+1)}{2a}|x|\right).$$

Просуммировав ряд

$$-\frac{2}{a}\sum_{k=0}^{\infty} M_{1k}(x - x_0)\sin\frac{\pi(2k+1)y_0}{2a}\sin\frac{\pi(2k+1)y}{2a} =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\exp\left(-\frac{\pi(2k+1)}{2a}|x - x_0|\right)\sin\frac{\pi(2k+1)y_0}{2a}\sin\frac{\pi(2k+1)y}{2a},$$

получим функцию Грина

$$G_1(x,\ y,\ x_0,\ y_0)=\frac{1}{4\pi}\ln\frac{\operatorname{ch}\left(\pi(x-x_0)/2a\right)+\cos\left(\pi(y+y_0)/2a\right)}{\operatorname{ch}\left(\pi(x-x_0)/2a\right)-\cos\left(\pi(y+y_0)/2a\right)}-$$

$$-\frac{1}{4\pi}\ln\frac{\operatorname{ch}\left(\pi(x-x_0)/2a\right)+\cos\left(\pi(y-y_0)/2a\right)}{\operatorname{ch}\left(\pi(x-x_0)/2a\right)-\cos\left(\pi(y-y_0)/2a\right)}.$$

Решение смешанной краевой задачи Дирихле — Неймана для уравнения Пуассона для полосы на плоскости запишем в виде

$$u(x,\ y)=\frac{1}{a}\sin\left(\frac{\pi y}{2a}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\frac{\operatorname{ch}\left(\pi(x-t)/2a\right)}{\operatorname{ch}\left(\pi(x-t)/a\right)-\cos\left(\pi y/a\right)}dt+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(t)\ln\left(\frac{\operatorname{ch}\left(\pi(x-t)/2a\right)+\sin\left(\pi y/2a\right)}{\operatorname{ch}\left(\pi(x-t)/2a\right)-\sin\left(\pi y/2a\right)}\right)dt+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{0}^{a}\int_{-\infty}^{\infty}f(t,\tau)\left\{\ln\frac{\operatorname{ch}\left(\pi(x-t)/2a\right)+\cos\left(\pi(y+\tau)/2a\right)}{\operatorname{ch}\left(\pi(x-t)/2a\right)-\cos\left(\pi(y+\tau)/2a\right)}-\right.$$

$$\left.-\ln\frac{\operatorname{ch}\left(\pi(x-t)/2a\right)+\cos\left(\pi(y-\tau)/2a\right)}{\operatorname{ch}\left(\pi(x-t)/2a\right)-\left(\pi(y-\tau)/2a\right)}\right\}dtd\tau.$$

Отметим, что

$$-\left[\frac{\partial}{\partial\tau}G_1(x,y,t,\tau)\right]_{\tau=0}=K_1(x-t,y),\quad -G_1(x,y,t,a)=L_1(x-t,y).$$

Тогда решение задачи может быть записано в виде

$$u(x,y)=-\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\left[\frac{\partial}{\partial\tau}G_1(x,y,t,\tau)\right]_{\tau=0}dt-\int_{-\infty}^{\infty}\psi(t)G_1(x,y,t,a)d\tau+$$

$$+\int_{0}^{a}\int_{-\infty}^{\infty}f(t,\tau)G_1(x,y,t,\tau)dtd\tau.$$

Решение смешанной краевой задачи для бесконечного слоя в трехмерном пространстве. Для трех переменных ядра не выражаются через элементарные функции

$$K_2(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\operatorname{ch}\left(\rho(a-y)\right)}{\operatorname{ch}(a\rho)}\rho J_0\left(\rho|x|\right)d\rho;$$

$$L_2(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}(\rho y)}{\operatorname{ch}(a\rho)}J_0(\rho|x|)\,d\rho.$$

Если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — функции полиномиального роста, то решение смешанной задачи записывается интегральной формулой

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\varphi(t)\,dt\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}(\rho(a-y))}{\operatorname{ch}(a\rho)}\rho J_0(\rho|x-t|)\,d\rho+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\psi(t)\,dt\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}(\rho y)}{\operatorname{ch}(a\rho)}J_0(\rho|x-t|)\,d\rho.$$

Просуммировав ряд

$$-\frac{2}{a}\sum_{k=0}^\infty M_{2k}(x-x_0)\sin\frac{\pi(2k+1)y_0}{2a}\sin\frac{\pi(2k+1)y}{2a},$$

где

$$M_{2k}(x)=\mathcal{F}^{-1}[m_{2k}](x)=\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{4a^2}{\pi^2(2k+1)^2+4a^2|t|^2}\right](x)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{4a^2}{\pi^2(2k+1)^2+4a^2\rho^2}\rho J_0(\rho|x|)\,d\rho=\frac{1}{2\pi}K_0\left(\frac{\pi(2k+1)}{2a}|x|\right);$$

$K_0(\xi)$ — функция Макдональда [9], получим функцию Грина

$$G_2(x,y,x_0,y_0)=-\frac{2}{a}\sum_{k=0}^\infty M_{2k}(x-x_0)\sin\frac{\pi(2k+1)y_0}{2a}\sin\frac{\pi(2k+1)y}{2a}=$$

$$=-\frac{1}{\pi a}\sum_{k=1}^\infty K_0\left(\frac{\pi(2k+1)}{2a}|x-x_0|\right)\sin\frac{\pi(2k+1)y_0}{2a}\sin\frac{\pi(2k+1)y}{2a}=-\frac{1}{\pi a}\times$$

$$\times\int_0^\infty\left\{\sum_{k=0}^\infty \exp\left(-\frac{\pi(2k+1)}{2a}|x-x_0|\operatorname{ch}\xi\right)\sin\frac{\pi(2k+1)y_0}{2a}\sin\frac{\pi(2k+1)y}{2a}\right\}d\xi=$$

$$=\frac{1}{2\pi a}\int_0^\infty\left\{\frac{\operatorname{sh}(\pi|x-x_0|\operatorname{ch}(\xi)/2a)\cos(\pi(y+y_0)/2a)}{\operatorname{ch}(\pi|x-x_0|\operatorname{ch}(\xi)/2a)-\cos(\pi(y+y_0)/2a)}-\right.$$

$$\left.-\frac{\operatorname{sh}(\pi|x-x_0|\operatorname{ch}(\xi)/2a)\cos(\pi(y-y_0)/2a)}{\operatorname{ch}(\pi|x-x_0|\operatorname{ch}(\xi)/2a)-\cos(\pi(y-y_0)/2a)}\right\}d\xi.$$

Нетрудно проверить, что

$$-\left[\frac{\partial}{\partial\tau}G_2(x,y,t,\tau)\right]_{\tau=0}=$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{\pi y}{2a}\right)}{a^2}\int\limits_0^\infty\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\pi|x-t|\operatorname{ch}(\xi)}{2a}\right)\left[\operatorname{ch}^2\left(\frac{\pi|x-t|\operatorname{ch}(\xi)}{2a}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi y}{2a}\right)\right]}{\left[\operatorname{ch}(\pi|x-t|\operatorname{ch}(\xi)/a)-\cos(\pi y/a)\right]^2}d\xi=$$

$$=K_2(x-t,y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty\frac{\operatorname{ch}(\rho(a-y))}{\operatorname{ch}(a\rho)}\rho J_0(\rho|x-t|)d\rho;$$

$$-G_2(x,y,t,a)=\frac{1}{\pi a}\int\limits_0^\infty\frac{\operatorname{sh}(\pi|x-t|\operatorname{ch}(\xi)/2a)\sin(\pi y/2a)d\xi}{\operatorname{ch}(\pi|x-t|\operatorname{ch}(\xi)/a)+\cos(\pi y/a))}=$$

$$=L_2(x-t,y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty\frac{\operatorname{sh}(\rho y)}{\operatorname{ch}(a\rho)}J_0(\rho|x-t|)d\rho.$$

Следовательно, решение смешанной краевой задачи для уравнения Пуассона в трехмерном бесконечном слое можно записать как

$$u(x,y)=-\int\limits_{\mathbb{R}^2}\varphi(t)\left[\frac{\partial}{\partial\tau}G_2(x,y,t,\tau)\right]_{\tau=0}dt-$$

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^2}\psi(t)G_2(x,y,t,a)d\tau+\int\limits_0^a\int\limits_{\mathbb{R}^2}f(t,\tau)G_2(x,y,t,\tau)dtd\tau,$$

где

$$G_2(x,y,t,\tau)=$$

$$=\frac{1}{2\pi a}\int\limits_0^\infty\left\{\frac{\operatorname{sh}(\pi|x-t|\operatorname{ch}(\xi)/2a)\cos(\pi(y+\tau)/2a)}{\operatorname{ch}(\pi|x-t|\operatorname{ch}(\xi)/a)-\cos(\pi(y+\tau)/a)}-\right.$$

$$\left.-\frac{\operatorname{sh}(\pi|x-t|\operatorname{ch}(\xi)/2a)\cos(\pi(y-\tau)/2a)}{\operatorname{ch}(\pi|x-t|\operatorname{ch}(\xi)/a)-\cos(\pi(y-\tau)/a)}\right\}d\xi.$$

В частности, для решения смешанной краевой задачи для уравнения Лапласа в трехмерном бесконечном слое имеет место формула другого вида

$$v(x,\ y)=\frac{\sin(\pi y/2a)}{a^2}=$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi(t)\,dt \int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{sh}\left(\pi|x-t|\operatorname{ch}(\xi)/2a\right)\left[\operatorname{ch}^2\left(\pi|x-t|\operatorname{ch}(\xi)/2a\right)+\cos^2(\pi y/2a)\right]}{\left[\operatorname{ch}\left(\pi|x-t|\operatorname{ch}(\xi)/a\right)-\cos(\pi y/a)\right]^2}\,d\xi +$$

$$+\frac{\sin(\pi y/2a)}{\pi a}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\psi(t)\,dt\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{sh}\left(\pi|x-t|\operatorname{ch}(\xi)/2a\right)}{\operatorname{ch}\left(\pi|x-t|\operatorname{ch}(\xi)/a\right)+\cos(\pi y/a)}\,d\xi\,.$$

Решение смешанной краевой задачи для бесконечного слоя в пространстве произвольной размерностью. Для пространства произвольной размерностью n решение смешанной краевой задачи Дирихле — Неймана для уравнения Пуассона в слое записывается с помощью функции Грина в следующем виде:

$$u(x,y) = -\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi(t)\left[\frac{\partial}{\partial\tau}G_{n-1}(x,y,t,\tau)\right]_{\tau=0} dt - \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \psi(t)\,G_{n-1}(x,y,t,a)\,d\tau +$$

$$+\int\limits_0^a \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} f(t,\tau)\,G_{n-1}(x,y,t,\tau)\,dt\,d\tau.$$

В случае четной размерности $n = 2k$ имеем

$$G_{2k-1}(x,y,t,\tau) = G^*_{2k-1}\left(|x-t|,\ y,\ \tau\right) = G^*_{2k-1}(r,y,\tau) =$$

$$=\frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi)^{k-1}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1}\left[\frac{1}{4\pi}\ln\frac{\operatorname{ch}(\pi r/2a)+\cos\left(\pi(y+\tau)/2a\right)}{\operatorname{ch}(\pi r/2a)-\cos\left(\pi(y+\tau)/2a\right)} -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4\pi}\ln\frac{\operatorname{ch}(\pi r/2a)+\cos\left(\pi(y-\tau)/2a\right)}{\operatorname{ch}(\pi r/2a)-\cos\left(\pi(y-\tau)/2a\right)}\right];$$

$$-\left[\frac{\partial}{\partial\tau}G_{2k-1}(x,y,t,\tau)\right]_{\tau=0} = K^*_{2k-1}\left(|x-t|,\ y\right) = K^*_{2k-1}(r,y) =$$

$$=\frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi)^{k-1}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{a}\frac{\sin(\pi y/2a)\operatorname{ch}(\pi r/2a)}{\operatorname{ch}(\pi y/a)-\cos(\pi y/a)}\right);$$

$$-G_{2k-1}(x,y,t,a) = L^*_{2k-1}\left(|x-t|,y\right) = L^*_{2k-1}(r,y) =$$

$$=\frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi)^{k-1}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{\operatorname{ch}(\pi r/2a)+\sin(\pi y/2a)}{\operatorname{ch}(\pi r/2a)-\sin(\pi y/2a)}\right)\right),$$

для нечетной размерности $n = 2k+1$ —

$$G_{2k}\left(x, y, t, \tau\right) = G_{2k}^{*}\left(\left|x-t\right|, y, \tau\right) = G_{2k}^{*}\left(r, y, \tau\right) =$$

$$= \frac{\left(-1\right)^{k-1}}{\left(2\pi\right)^{k-1}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1}\left[\frac{1}{2\pi a}\int_{0}^{\infty}\left\{\frac{\mathrm{sh}\left(\pi r\,\mathrm{ch}\left(\xi\right)/2a\right)\cos\left(\pi\left(y+\tau\right)/2a\right)}{\mathrm{ch}\left(\pi r\,\mathrm{ch}\left(\xi\right)/a\right)-\cos\left(\pi\left(y+\tau\right)/a\right)}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\mathrm{sh}\left(\pi r\,\mathrm{ch}\left(\xi\right)/2a\right)\cos\left(\pi\left(y-\tau\right)/2a\right)}{\mathrm{ch}\left(\pi r\,\mathrm{ch}\left(\xi\right)/a\right)-\cos\left(\pi\left(y-\tau\right)/a\right)}\right\}d\xi\right];$$

$$-\left[\frac{\partial}{\partial\tau}G_{2k}\left(x, y, t, \tau\right)\right]_{\tau=0} = K_{2k}^{*}\left(\left|x-t\right|,\ y\right) = K_{2k}^{*}\left(r, y\right) = \frac{\left(-1\right)^{k-1}}{\left(2\pi\right)^{k-1}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1}\times$$

$$\times\left[\frac{\sin\left(\pi y/2a\right)}{a^{2}}\int_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{sh}\left(\pi r\,\mathrm{ch}\left(\xi\right)/2a\right)\left[\mathrm{ch}^{2}\left(\pi r\,\mathrm{ch}\left(\xi\right)/2a\right)+\cos^{2}\left(\pi y/2a\right)\right]}{\left[\mathrm{ch}\left(\pi r\,\mathrm{ch}\left(\xi\right)/a\right)-\cos\left(\pi y/a\right)\right]^{2}}d\xi\right];$$

$$-\left[\frac{\partial}{\partial\tau}G_{2k}\left(x, y, t, \tau\right)\right]_{\tau=a} = L_{2k}^{*}\left(\left|x-t\right|, y\right) = L_{2k}^{*}\left(r, y\right) =$$

$$= \frac{\left(-1\right)^{k-1}}{\left(2\pi\right)^{k-1}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1}\left[\frac{\sin\left(\pi y/2a\right)}{\pi a}\int_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{sh}\left(\pi r\,\mathrm{ch}\left(\xi\right)/2a\right)}{\mathrm{ch}\left(\pi r\,\mathrm{ch}\left(\xi\right)/a\right)+\cos\left(\pi y/a\right)\right)}d\xi\right].$$

Так, для бесконечного слоя в четырехмерном пространстве запишем

$$K_{3}\left(x, y\right) = -\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial}{\partial r}K_{1}\left(r, y\right) = -\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{a}\frac{\sin\left(\pi y/2a\right)\mathrm{ch}\left(\pi y/2a\right)}{\mathrm{ch}\left(\pi r/a\right)-\cos\left(\pi y/a\right)}\right) =$$

$$= \frac{\left(2+\cos\left(\pi y/a\right)+\mathrm{ch}\left(\pi y/a\right)\right)\sin\left(\pi y/2a\right)\mathrm{sh}\left(\pi y/2a\right)}{4a^{2}r\left(\cos\left(\pi y/a\right)-\mathrm{ch}\left(\pi y/a\right)\right)^{2}};$$

$$L_{3}\left(x, y\right) = -\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial}{\partial r}L_{1}\left(r, y\right) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{\mathrm{ch}\left(\pi y/2a\right)+\sin\left(\pi y/2a\right)}{\mathrm{ch}\left(\pi y/2a\right)-\sin\left(\pi y/2a\right)}\right)\right) =$$

$$= \frac{\sin\left(\pi y/2a\right)\mathrm{sh}\left(\pi y/2a\right)}{2\pi a r\left(\cos\left(\pi y/a\right)+\mathrm{ch}\left(\pi y/a\right)\right)};$$

$$r = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2};$$

$$G_3(x, y, x_0, y_0) = G_3^*(r, y, y_0) = -\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial}{\partial r} G_1^*(r, y, y_0) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{4\pi}\ln\frac{\operatorname{ch}(\pi r/2a) + \cos(\pi(y + y_0)/2a)}{\operatorname{ch}(\pi r/2a) - \cos(\pi(y + y_0)/2a)} -\right.$$

$$\left. -\frac{1}{4\pi}\ln\frac{\operatorname{ch}(\pi r/2a) + \cos(\pi(y - y_0)/2a)}{\operatorname{ch}(\pi r/2a) - \cos(\pi(y - y_0)/2a)}\right] = \frac{\operatorname{sh}(\pi r/a)}{4\pi a r} \times$$

$$\times \left[\frac{\cos(\pi(y + y_0)/2a)}{\operatorname{ch}(\pi r/a) - \cos(\pi(y + y_0)/a)} - \frac{\cos(\pi(y - y_0)/2a)}{\operatorname{ch}(\pi r/a) - \cos(\pi(y - y_0)/a)}\right],$$

где $r = |x - x_0|$.

Нетрудно проверить, что

$$-\left[\frac{\partial}{\partial \tau} G_3(x, y, t, \tau)\right]_{\tau=0} = K_3(x - t, y).$$

Тогда решение смешанной краевой задачи для уравнения Пуассона для бесконечного слоя в четырехмерном пространстве можно записать как

$$u(x, y) = -\int_{\mathbb{R}^3} \varphi(t) \left[\frac{\partial}{\partial \tau} G_3(x, y, t, \tau)\right]_{\tau=0} dt + \int_{\mathbb{R}^3} \psi(t) G_3(x, y, t, a)\, d\tau +$$

$$+\int_0^a \int_{\mathbb{R}^3} f(t, \tau) G_3(x, y, t, \tau)\, dt d\tau,$$

где

$$G_3(x, y, t, \tau) = \frac{\operatorname{sh}(\pi r/a)}{4\pi a r} \times$$

$$\times \left[\frac{\cos(\pi(y + \tau)/2a)}{\operatorname{ch}(\pi r/a) - \cos(\pi(y + \tau)/2a)} - \frac{\cos(\pi(y - \tau)/2a)}{\operatorname{ch}(\pi r/a) - \cos(\pi(y - \tau)/a)}\right],$$

$$r = |x - t|.$$

Заключение. Полученные формулы для решения смешанной краевой задачи Дирихле — Неймана для уравнения Лапласа в бесконечном слое применимы и в том случае, когда граничные значения являются обобщенными функциями медленного роста. Тогда решение является обобщенным: слабо сходится в пространстве к заданным граничным значениям. При трех переменных функция Грина получена в виде однократного интеграла.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алгазин О.Д., Копаев А.В.* Решение смешанной краевой задачи для уравнения Лапласа в многомерном бесконечном слое // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2015. № 1. С. 3–13.
   DOI: 10.18698/1812-3368-2015-1-3-13
2. *Комеч А.И.* Линейные уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики: Фундаментальные направления. 1988. Т. 31. С. 127–261.
3. *Полянин А.Д.* Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001. 576 с.
4. *Касьянов Е.Ю., Копаев А.В.* О решении задачи Дирихле для некоторых многомерных областей методом воспроизводящих ядер // Изв. вузов. Математика. 1991. № 6. С. 17–20.
5. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979. 320 с.
6. *Бохнер С.* Лекции об интегралах Фурье. М.: Физматгиз, 1962. 360 с.
7. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ им. М.В. Ломоносова, 1999. 798 с.
8. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Физматгиз, 1961. 524 с.
9. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.

REFERENCES

[1] Algazin O.D., Kopaev A.V. Solution to the mixed boundary-value problem for Laplace equation in multidimentional infinite layer. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2015, no. 1, pp. 3–13 (in Russ.).
DOI: 10.18698/1812-3368-2015-1-3-13

[2] Komech A.I. Linear differential equations in partial derivatives with constant coefficients. *Itogi Nauki Tekhn*., 1988, vol. 31, pp. 127–261 (in Russ.).

[3] Polyanin A.D. Spravochnik po lineynym uravneniyam matematicheskoy fiziki [Linear Equations of Mathematical Physics. Handbook]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2001. 576 p.

[4] Kas'yanov E.Yu., Kopaev A.V. On the solution of the Dirichlet problem for some multidimensional domains by the method of reproducing kernels. *Soviet Mathematics* [Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.], 1991, vol. 35, no. 6, pp. 16–18.

[5] Vladimirov V.S. Obobshchennye funktsii v matematicheskoy fizike [Generalized Functions in Mathematical Physics]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 320 p.

[6] Bochner S. Vorlesungen über Fouriersche Integrale. Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft m.b. H. VIII, 1932. 229 p.

[7] Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. Uravneniya matematicheskoy fiziki [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, MGU im. M.V. Lomonosova Publ., 1999. 798 p.

[8] Ditkin V.A., Prudnikov A.P. Integral'nye preobrazovaniya i operatsionnoe ischislenie [Integral Transformations and Operational Calculus]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1961. 524 p.

[9] Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedeniy [Tables of Integrals, Sums, Series and Products]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 1108 p.

Статья поступила в редакцию 29.10.2015

Алгазин Олег Дмитриевич — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5).

Algazin O.D. — Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Professor of Computational Mathematics and Mathematical Physics Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation).

Копаев Анатолий Владимирович — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5).

Kopaev A.V. — Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Professor of Higher Mathematics Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:
Алгазин О.Д., Копаев А.В. Решение смешанной краевой задачи Дирихле — Неймана для уравнения Пуассона в многомерном бесконечном слое // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2016. № 3. С. 42–56. DOI: 10.18698/1812-3368-2016-3-42-56

Please cite this article in English as:
Algazin O.D., Kopaev A.V. The solution of the mixed boundary value problem of Dirichlet — Neumann for the Poisson equation in a multidimensional infinite layer. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2016, no. 3, pp. 42–56.
DOI: 10.18698/1812-3368-2016-3-42-56