

DOI: 10.18698/1812-3368-2016-3-70-81

УДК 519.71:517.938

**Движение летательного аппарата в вертикальной  
плоскости при наличии ограничений на состояния**

**М.А. Велищанский**

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация  
e-mail: velmiha@bmstu.ru

*Рассмотрена задача автоматической прокладки траектории летательного аппарата в вертикальной плоскости при наличии ограничений на переменные состояния. Время маневра полагается известным. Большинство методов решения подобных задач не позволяют учитывать ограничения, наложенные на переменные состояния. Используемый в настоящей работе подход позволяет автоматически учесть имеющиеся ограничения на этапе конструирования требуемой траектории без применения каких-либо итерационных процедур. Построение программной траектории осуществлено в некотором классе функций. Предложен оптимизационный подход к выбору траектории. Реализующее ее программное управление построено на основе концепции обратных задач динамики. Приведены результаты численного моделирования.*

**Ключевые слова:** терминальное управление, фазовая кривая, ограничения на состояния.

**Aircraft Movement in a Vertical Plane  
with State Constraints**

**M.A. Velishchanskiy**

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation  
e-mail: velmiha@bmstu.ru

*The problem under consideration is trajectory planning of an aircraft in a vertical plane with variable state constraints. The time of maneuver is considered to be known. The main problem is to find the permissible trajectory which meets given requirements. The most developed methods for solving similar problems do not allow us to take into account the restrictions on the system condition. The approach applied in this work allows us to automatically take into account the current restrictions during the required trajectory construction, not using any iterative methods. Building a program trajectory is carried out in a certain class of functions. The paper proposes an optimization approach to choosing the trajectory. The program control implementing this trajectory is based on the concept of inverse dynamic problems. It enables us to synthesize a proper program control, to build the control stabilizing program trajectories and to choose numerical optimization of the trajectory by a*

*definite criterion. We describe a nonlinear mathematical model of the plane movement as a material point in the trajectory reference frame. We illustrate the findings of the research with examples and show the results of numerical modeling.*

**Keywords:** terminal control, phase curve, state constraints.

**Введение.** Одной из известных задач для летательных аппаратов (ЛА) как пилотируемых, так и беспилотных, является задача автоматического синтеза законов управления, которые реализуют движение ЛА вдоль пространственных траекторий, проходящих через заданные путевые точки [1, 2]. Эта задача достаточно сложна и основные трудности в ней связаны с необходимостью учета ограничений, наложенных на переменные состояния и управления.

Задачу движения ЛА между двумя соседними путевыми точками в большинстве случаев можно рассматривать как терминальную задачу. Однако большинство разработанных методов решения терминальных задач не позволяют учитывать ограничения, наложенные на состояние системы [3–7]. В некоторых методах процесс поиска требуемой программной траектории в целях учета наложенных ограничений может быть итерационным [8].

Для нахождения требуемых траекторий достаточно широко используется подход, основанный на концепции обратных задач динамики, включающий два этапа: 1) задание кинематической траектории движения объекта; 2) определение управлений, реализующих указанную траекторию [9]. Преимущество такого подхода — возможность непосредственного формирования желаемой траектории, удовлетворяющей заданным ограничениям, и исследования ее реализуемости. Однако именно задача синтеза траектории, удовлетворяющей наложенным ограничениям, и представляет собой наибольшую трудность. Кроме того, для нахождения программного управления, реализующего заданную программную траекторию, отображение «вход–выход» математической модели, описывающей движение, должно быть обратимым. Обратимость отображения «вход–выход» подразумевает, что для любой программной траектории в пространстве выходов существует реализующее ее программное управление. При этом учет ограничений зачастую ведет к итерационной процедуре, когда в некотором классе функций по тому или иному алгоритму перебираются возможные траектории, пока не будет найдена такая траектория, которая бы удовлетворяла наложенным ограничениям.

Для проектирования сложных пространственных траекторий можно использовать метод, основанный на выборе траектории из определенного набора более простых траекторий, которые соответствуют типовым маневрам (смена эшелона, разворота, прямолинейного движения и т. д.) [1]. Однако и при таком методе проектирования траекторий, являющихся базовыми, возникает задача по учету ограничений.

В настоящей работе предложено использовать метод, описанный в работах [10, 11]. Подобный метод позволяет в некотором классе функций построить фазовую траекторию, удовлетворяющую наложенным ограничениям на фазовые переменные. При этом процесс построения траектории не связан с итерационными процедурами и позволяет построить параметрическое семейство траекторий по заданным ограничениям на переменные состояния и заданным граничным условиям. Наличие целого класса решений терминальной задачи позволяет рассматривать задачу о нахождении наилучшего из решений. Предложено использовать подобную возможность для минимизации применяемых ресурсов управления.

**Постановка задачи.** Математическая модель, описывающая движение ЛА как движение материальной точки, представляет собой систему из шести дифференциальных уравнений [12, 13]. При движении в вертикальной плоскости углы курса и крена равны нулю, а боковая дальность постоянна. Поэтому движение ЛА в вертикальной плоскости может быть описано следующей системой, состоящей из четырех дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= (n_x - \sin \theta)g; \\ \dot{\theta} &= \frac{(n_y - \cos \theta)g}{V}; \\ \dot{H} &= V \sin \theta; \\ \dot{L} &= V \cos \theta, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $V$  — путевая скорость;  $n_x$  — продольная перегрузка;  $n_y$  — поперечная перегрузка;  $\theta$  — угол наклона траектории;  $g$  — ускорение свободного падения;  $H$  — высота;  $L$  — продольная дальность. При этом высота  $H$  и продольная дальность  $L$  представляют собой координаты положения центра масс самолета в выбранной вертикальной плоскости в нормальной земной неподвижной системе координат, а скорость  $V$  и угол  $\theta$  задают движение в траекторной системе координат. В качестве управлений рассмотрим перегрузки  $n_x$ ,  $n_y$ .

Рассмотрим задачу снижения и набора высоты ЛА в вертикальной плоскости при наличии ограничений на переменные состояния: на скорость снижения  $\dot{H}$  и продольную скорость  $\dot{L}$  ЛА. Будем полагать, что время маневра  $t_*$  известно. Таким образом, требуется построить управление, переводящее ЛА из заданного начального состояния

$$(H_0, L_0, V_0, \theta_0), (n_{x0}, n_{y0}) \quad (2)$$

в заданное конечное состояние

$$(H_*, L_*, V_*, \theta_*), (n_{x*}, n_{y*}) \quad (3)$$

за время  $t_*$  при наличии следующих ограничений на переменные состояния:

$$\dot{H}_{\min} < \dot{H} < \dot{H}_{\max}, \quad \dot{L}_{\min} < \dot{L} < \dot{L}_{\max}. \quad (4)$$

Решение поставленной задачи будем искать на основе концепции обратных задач динамики [9, 13], а также методом, приведенным в работах [10, 11].

**Движение летательного аппарата в вертикальной плоскости.** Запишем систему (1) в новых переменных, в качестве которых выберем следующие функции

$$y_1 = H, \quad y_2 = L, \quad y_3 = \dot{H} = V \sin \theta, \quad y_4 = \dot{L} = V \cos \theta. \quad (5)$$

Указанный набор переменных в области  $\Omega \in R^4$ , заданной неравенствами  $|\theta| < \pi/2$ ,  $V > 0$ , определяет гладкую невырожденную замену переменных, поскольку старые переменные состояния выражаются через новые с помощью соотношений

$$H = y_1, \quad L = y_2; \\ V = \sqrt{y_3^2 + y_4^2}, \quad \sin \theta = \frac{y_3}{\sqrt{y_3^2 + y_4^2}}. \quad (6)$$

В выбранных переменных (5) система (1) примет канонический вид [14]

$$\dot{y}_1 = y_3; \\ \dot{y}_3 = -g + gn_x \sin \theta + gn_y \cos \theta; \\ \dot{y}_2 = y_4; \\ \dot{y}_4 = gn_x \cos \theta - gn_y \sin \theta. \quad (7)$$

Исключая из системы (7) переменные  $y_3$ ,  $y_4$  и учитывая, что  $\ddot{y}_1 = \ddot{H}$ ,  $\ddot{y}_2 = \ddot{L}$ , получаем следующую систему из двух дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\ddot{H} = -g + gn_x \sin \theta + gn_y \cos \theta; \\ \ddot{L} = gn_x \cos \theta - gn_y \sin \theta, \quad (8)$$

где  $\sin \theta = \frac{\dot{H}}{\sqrt{\dot{L}^2 + \dot{H}^2}}$ ;  $\cos \theta = \frac{\dot{L}}{\sqrt{\dot{L}^2 + \dot{H}^2}}$ .

Предложенный в работах [10, 11] метод позволяет строить фазовую траекторию, удовлетворяющую наложенным ограничениям на фа-

зовые переменные и являющуюся решением терминальной задачи для дифференциального уравнения второго порядка. Согласно (8), движение ЛА в вертикальной плоскости описывается системой из двух дифференциальных уравнений второго порядка. Формально, метод, приведенный в работах [10, 11], применить к системе (8) нельзя, поскольку управления  $n_x$  и  $n_y$  входят в правые части каждого дифференциального уравнения второго порядка указанной системы. Однако, учитывая, что матрица

$$A = \begin{pmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ \cos \theta & -\sin \theta \end{pmatrix}$$

является невырожденной, можно ввести новые «виртуальные» управления

$$u_1 = -g + gn_x \sin \theta + gn_y \cos \theta; \quad u_2 = gn_x \cos \theta - gn_y \sin \theta, \quad (9)$$

в которых система (8) примет вид

$$\begin{aligned} \ddot{H} &= u_1; \\ \ddot{L} &= u_2. \end{aligned} \quad (10)$$

Решение поставленной терминальной задачи (2)–(4) для системы (10) можно получить (см. работы [10, 11]). При этом управления  $n_x$  и  $n_y$  выражаются через новые «виртуальные» управления (9) с помощью соотношений

$$\begin{aligned} n_x &= \left( \frac{u_1}{g} + 1 \right) \sin \theta + \frac{u_2}{g} \cos \theta; \\ n_y &= \left( \frac{u_1}{g} + 1 \right) \cos \theta - \frac{u_2}{g} \sin \theta, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\sin \theta = \frac{\dot{H}}{\sqrt{\dot{L}^2 + \dot{H}^2}}$ ;  $\cos \theta = \frac{\dot{L}}{\sqrt{\dot{L}^2 + \dot{H}^2}}$ .

**Расчет «виртуальных» управлений.** Опишем процедуру нахождения «виртуальных» управлений  $u_1$  и  $u_2$  на примере управления  $u_1$ . Для динамической системы

$$\ddot{H} = u_1 \quad (12)$$

рассмотрим задачу терминального управления при наличии ограничений на переменные состояния

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{ (H, \dot{H}) \in R^2 : H \in [H_0, H_*], \\ 0 &< \psi_-(H) < \dot{H} < \psi_+(H), \psi_{\pm}(H) \in C^1[y_0, y_*] \} \end{aligned} \quad (13)$$

и граничных условий

$$H(0) = H_0, \dot{H}(0) = \dot{H}_0, \quad H(t_*) = H_*, \dot{H}(t_*) = \dot{H}_*, \quad (14)$$

полагая, что управление является непрерывной функцией времени.

Для решения задачи (12)–(14) находится функция  $\psi(H) = \dot{H}$ ,  $\psi(H) \in C^1[y_0, y_*]$ , удовлетворяющая условиям

$$\int_{H_0}^{H_*} \frac{dH}{\psi(H)} = t_*; \quad (15)$$

$$0 < \psi_-(H) < \psi(H) < \psi_+(H), \quad H \in [H_0, H_*]; \quad (16)$$

$$\psi(H_0) = \psi_0 = \dot{H}_0, \quad \psi(H_*) = \psi_* = \dot{H}_*. \quad (17)$$

Функция  $\psi(H)$  имеет вид [10, 11]

$$\psi(H) = \frac{\psi_{+\bar{\varepsilon}}(H)\psi_{-\hat{\varepsilon}}(H)}{c_*\psi_{-\hat{\varepsilon}}(H) + (1-c_*)\psi_{+\bar{\varepsilon}}(H)}. \quad (18)$$

Здесь  $\psi_{-\hat{\varepsilon}}(H)$ ,  $\psi_{+\bar{\varepsilon}}(H)$  — функции, которые строятся как линейные комбинации функций-ограничений  $\psi_-(H)$  и  $\psi_+(H)$  [10, 11]. При этом

$$c_* = \frac{t_* - t_-(\hat{\varepsilon})}{t_+(\bar{\varepsilon}) - t_-(\hat{\varepsilon})} \in (0, 1),$$

где

$$t_-(\hat{\varepsilon}) = \int_{H_0}^{H_*} \frac{dH}{\psi_{-\hat{\varepsilon}}(H)}; \quad t_+(\bar{\varepsilon}) = \int_{H_0}^{H_*} \frac{dH}{\psi_{+\bar{\varepsilon}}(H)}.$$

Функция  $\psi(H)$ , вычисляемая по (18), является аналитической функцией, так как функции  $\psi_{-\hat{\varepsilon}}(H)$  и  $\psi_{+\bar{\varepsilon}}(H)$  аналитические по построению. Производные этих функций также могут быть получены в аналитическом виде. С помощью функции  $\psi(H)$  искомое управление можно записать в следующем виде:

$$u_1 = u_1(H) = \ddot{H} = \frac{d\psi(H)}{dt} = \frac{d\psi(H)}{dH}\psi(H), \quad (19)$$

где  $H = H(t)$  — функция, которая может быть вычислена по (15) для любого момента времени как решение задачи Коши  $\dot{H} = \psi(H)$ ,  $H(0) = H_0$ . Соответствующее стабилизирующее управление можно найти по формуле  $u_1(H, t) = [\ddot{H}(t) - k_1(\dot{H} - \dot{H}(t)) - k_2(H - H(t))]$ , где

$k_1, k_2 > 0$  — некоторые константы, задающие динамику убывания ошибки  $e = H - H(t)$ ,  $\dot{H}(t) = \psi(H(t))$ ,  $\ddot{H}(t) = \frac{d\psi(H)}{dH}\psi(H)$ .

Каждая функция  $\psi_{-\hat{\varepsilon}}(y)$  и  $\psi_{+\hat{\varepsilon}}(y)$  зависит от трех параметров  $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_+, \varepsilon_0, \varepsilon_*) > 0$  и  $\hat{\varepsilon} = (\varepsilon_-, \varepsilon_0, \varepsilon_*) > 0$ , удовлетворяющих некоторым условиям [10, 11]. Наличие такой зависимости позволяет изменяя данные параметры, влиять на свойства получаемого решения задачи. Программное управление  $u_2$  строится аналогичным способом.

**Оптимизационный подход к построению управления.** Приведенная выше функция  $\psi(H)$  зависит, в общем случае, от шести параметров, поскольку параметры  $\varepsilon_0$  и  $\varepsilon_*$  могут быть различными для функций  $\psi_{+\bar{\varepsilon}}(H)$  и  $\psi_{-\hat{\varepsilon}}(H)$ . При фиксировании всех шести параметров  $\tilde{\varepsilon} = (\varepsilon_+, \varepsilon_-, \varepsilon_0^+, \varepsilon_0^-, \varepsilon_0^+, \varepsilon_0^-)$  получаем единственную фазовую траекторию  $\psi(H)$  вида (18), являющуюся решением задачи (15)–(17). Изменяя указанные параметры, определяем другую фазовую траекторию, являющуюся решением задачи (15)–(17). Таким образом, имеем параметрическое семейство функций  $\psi_{\tilde{\varepsilon}}(H)$ , представляющее решение терминальной задачи (15)–(17). Наличие подобного множества решений позволяет строить искомую фазовую траекторию как решение некоторой оптимизационной задачи

$$J(\tilde{\varepsilon})|_{\tilde{\varepsilon} \in \Upsilon} \rightarrow \min, \quad (20)$$

где за оптимизируемые параметры приняты значения  $\tilde{\varepsilon} = (\varepsilon_+, \varepsilon_-, \varepsilon_0^+, \varepsilon_0^-, \varepsilon_0^+, \varepsilon_0^-)$  с множеством допустимых значений  $\Upsilon$ . В качестве критерия оптимизации можно принять абсолютное максимальное значение программного управления, среднее значение программного управления и т. д. Если в дополнение к ограничениям (13) имеются ограничения, например, на значение программного управления, то оптимизационную задачу (20) следует дополнить соответствующим ограничением

$$J(\tilde{\varepsilon})|_{\tilde{\varepsilon} \in \Upsilon, u \in U} \rightarrow \min. \quad (21)$$

Здесь  $U$  — множество допустимых значений программного управления. В этом случае зависимость программного управления от параметров  $\tilde{\varepsilon}$  достаточно сложная, что приводит к оптимизационной задаче при наличии нелинейных ограничений в виде неравенств.

**Моделирование.** В качестве оптимизационного критерия при моделировании в среде Matlab было рассмотрено абсолютное максимальное значение программного управления  $n_x$ :

$$J(\tilde{\varepsilon}) = \max(|n_x(t)|) \Big|_{\tilde{\varepsilon} \in Y, t \in [0, t_*]} \rightarrow \min, \quad (22)$$

где  $Y$  — множество, заданное допустимыми значениями параметров  $\tilde{\varepsilon} = (\varepsilon_+, \varepsilon_-, \varepsilon_0^+, \varepsilon_0^-, \varepsilon_*, \varepsilon_*^-)$ . Для решения оптимизационной задачи при наличии ограничений использована стандартная функция среды `fmincon`. В качестве алгоритма численного решения задачи применен алгоритм Interior Point [15–17]. Отметим, что при нахождении программных управлений согласно (11) необходимости в вычислении  $\sin \theta$  и  $\cos \theta$  через функции  $\dot{L}$  и  $\dot{H}$  в процессе моделирования нет, поскольку при интегрировании исходной системы (1) рассчитывается текущее значение угла  $\theta$ .

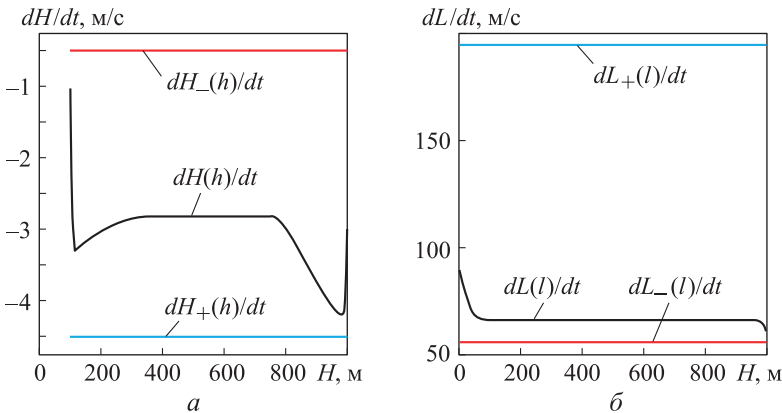
При моделировании использованы граничные условия

$$\begin{aligned} H(0) &= 1000 \text{ м}, \quad L(0) = 0 \text{ м}, \quad H(t_*) = 100 \text{ м}, \\ L(t_*) &= 20000 \text{ м}, \quad \dot{H}(0) = -3 \text{ м/с}, \quad \dot{L}(0) = 90 \text{ м/с}, \\ \dot{H}(t_*) &= -1 \text{ м/с}, \quad \dot{L}(t_*) = 61 \text{ м/с}, \quad t_* = 300 \text{ с} \end{aligned}$$

и ограничения на переменные состояния

$$\begin{aligned} \dot{H}_-(H) &= -0,5 \text{ м/с}, \quad \dot{H}_+(H) = -4,5 \text{ м/с}, \\ \dot{L}_-(L) &= 200 / 3,6 \text{ м/с}, \quad \dot{L}_+(L) = 700 / 3,6 \text{ м/с}. \end{aligned}$$

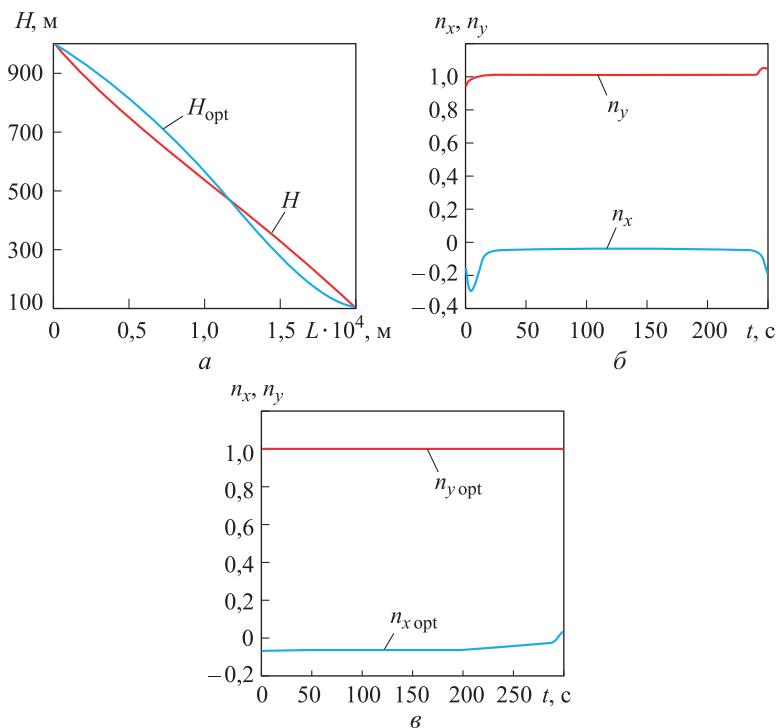
Фазовые траектории по переменным состояниям с учетом наложенных на них ограничений, построенные с помощью метода, приведенного в работах [10, 11], представлены на рис. 1.



**Рис. 1.** Фазовые траектории по высоте (а) и по дальности (б), а также ограничения на них

Зависимость высоты от дальности до и после оптимизации показана на рис. 2, а, зависимости программных управлений от времени, полученные до и после решения оптимизационной задачи (22), — на рис. 2, б, в.





**Рис. 2.** Зависимости высоты от дальности до и после оптимизации (а), программных управлений от времени до (б) и после (в) оптимизации

В результате решения задачи (22) абсолютное максимальное значение управления  $n_x$  удалось уменьшить с  $|n_x(t)| = 0,285$  до  $|n_x(t)| = 0,07$ , что соответствует снижению целевого критерия (22) в 4 раза.

**Заключение.** Рассмотрена задача автоматической прокладки траектории ЛА в вертикальной плоскости при наличии ограничений на скорость снижения и на линейную скорость ЛА. Предложенный метод гарантирует, что при реализации программного движения ЛА будут выполнены все наложенные на переменные состояния ограничения. При этом построение программной траектории не требует больших вычислительных затрат, а указанный метод работает при различных видах ограничений на переменные состояния. Наличие параметрического семейства функций, являющихся решением поставленной задачи, позволяет рассматривать вопрос об улучшении тех или иных свойств получаемой программной траектории. Приведены расчетные формулы для вычисления программного и стабилизирующего управлений, а также результаты численного моделирования, подтверждающие работоспособность предложенного метода.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 14-01-00424 и № 15-07-06484) и Минобрнауки РФ (проект 1.644.2014/К).*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Канатников А.Н., Крищенко А.П., Ткачев С.Б. Допустимые пространственные траектории беспилотного летательного аппарата в вертикальной плоскости // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журнал. 2012. № 3. URL: <http://technomag.edu.ru/doc/367724.html>
2. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Терминальное управление пространственным движением летательных аппаратов // ТиСУ. 2008. № 5. С. 51–64.
3. Levine J., Martin Ph., Rouchon P. Flat systems. Mini-Course // ECC' 97 European Control Conference. Brussels. 1–4 July. 1997. 54 p.
4. Крищенко А.П., Фетисов Д.А. Преобразование аффинных систем и решение задач терминального управления // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2013. № 2. С. 3–16.
5. Крищенко А.П., Фетисов Д.А. Задача терминального управления для аффинных систем // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49. № 11. С. 1410–1420.
6. Крищенко А.П., Фетисов Д.А. Терминальная задача для многомерных аффинных систем // ДАН. 2013. Т. 452. № 2. С. 144–149.
7. Фетисов Д.А. Решение терминальных задач для аффинных систем квазиканонического вида на основе орбитальной линеаризации // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50. № 12. С. 1660–1668.
8. Касаткина Т.С., Крищенко А.П. Метод вариаций решения терминальных задач для двумерных систем канонического вида при наличии ограничений // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журнал. 2015. № 5. С. 266–280. DOI: 10.7463/0515.0766238 URL: <http://technomag.bmstu.ru/doc/766238.html>
9. Крутько П.Д. Обратные задачи динамики управляемых систем: нелинейные модели. М.: Наука, 1988.
10. Крищенко А.П. Параметрические множества решений интегральных уравнений // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2014. № 3 С. 3–10.
11. Велицанский М.А., Крищенко А.П. Задача терминального управления для системы второго порядка при наличии ограничений // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журнал. 2015. № 8. С. 301–318. DOI: 10.7463/0815.0793667 URL: <http://technomag.bmstu.ru/doc/793667.html>
12. Горбатенко С.А., Макашов Э.М., Полушкин Ю.Ф., Шефтель А.В. Механика полета: Справочник. М.: Машиностроение, 1989. 420 с.
13. Жевнин А.А., Крищенко А.П., Глушко Ю.В. Управляемость и наблюдаемость нелинейных систем и синтез терминального управления // Докл. АН СССР. 1982. Т. 266. № 4. С. 807–811.
14. Краснощеченко В.И., Крищенко А.П. Нелинейные системы: геометрические методы анализа и синтеза. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. 520 с.
15. Byrd R.H., Gilbert J.C., Nocedal J. A Trust Region Method Based on Interior Point Techniques for Nonlinear Programming // Mathematical Programming. 2000. Vol. 89. No. 1. P. 149–185.
16. Byrd R.H., Hribar M.E., Nocedal J. An Interior Point Algorithm for Large-Scale Nonlinear Programming // SIAM Journal on Optimization. 1999. Vol. 9. No. 4. P. 877–900.
17. Waltz R.A., Morales J.L., Nocedal J., Orban D. An interior algorithm for nonlinear optimization that combines line search and trust region steps // Mathematical Programming. 2006. Vol. 107. No. 3. P. 391–408.

## REFERENCES

- [1] Krishchenko A.P., Kanatnikov A.N., Tkachev S.B. Admissible spatial trajectories of the unmanned aerial vehicle in a vertical plane. *Nauka i obrazovanie. MG TU im. N.E. Bauman* [Science & Education of the Bauman MSTU. Electronic Journal], 2012, no. 3. Available at: <http://technomag.bmstu.ru/en/doc/367724.html>

- [2] Kanatnikov A.N., Krishchenko A.P. Terminal Control of Spatial Motion of Flying Vehicles. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2008, vol. 47, no. 5, pp. 718–731.
- [3] Levine J., Martin Ph., Rouchon P. Flat systems. Mini-Course. *ECC' 97 European Control Conference*. Brussels, 1997, July 1–4. 54 p.
- [4] Krishchenko A.P., Fetisov D.A. Transformation of Affine Systems and Solving of Terminal Control Problems. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2013, no. 2, pp. 3–16 (in Russ.).
- [5] Krishchenko A.P., Fetisov D.A. Terminal control problem for affine systems. *Differential Equations*, 2013, vol. 49, no. 11, pp. 1378–1388. DOI: 10.1134/S0012266113110062
- [6] Krishchenko A.P., Fetisov D.A. Terminal problem for multidimensional affine systems. *Doklady Mathematics*, 2013, vol. 88, no. 2, pp. 608–612. DOI: 10.1134/S1064562413050098
- [7] Fetisov D.A. Solution of Terminal Problems for Affine Systems in Quasicanonical Form on the Basis of Orbital Linearization. *Differential Equations*, 2014, vol. 50, no. 12, pp. 1664–1672. DOI: 10.1134/S0012266114120106
- [8] Kasatkina T.S., Krishchenko A.P. Variations Method to Solve Terminal Problems for the Second Order Systems of Canonical Form with State Constraints. *Nauka i obrazovanie. MGTU im. N.E. Baumana* [Science & Education of the Bauman MSTU. Electronic Journal], 2012, no. 5. DOI: 10.7463/0515.0766238 Available at: <http://technomag.bmstu.ru/en/doc/766238.html>
- [9] Krut'ko P.D. Obratnye zadachi dinamiki upravlyaemykh sistem: nelineynye modeli [Inverse problems of control system dynamics. Nonlinear models]. Moscow, Nauka Publ., 1988.
- [10] Krishchenko A.P. Parametric Sets of Integral Equations Solutions. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2014, no. 3, pp. 3–10 (in Russ.).
- [11] Velishchanskiy M.A., Krishchenko A.P. A Terminal Control Problem for the Second Order System with Restrictions. *Nauka i obrazovanie. MGTU im. N.E. Baumana* [Science & Education of the Bauman MSTU. Electronic Journal], 2015, no. 8. DOI: 10.7463/0815.0793667 Available at: <http://technomag.bmstu.ru/en/doc/793667.html>.
- [12] Gorbatenko S.A., Makashov E.M., Polushkin Yu.F., Sheftel' A.V. *Mekhanika poleta: Spravochnik* [Mechanics of Flight. Handbook]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1989. 420 p.
- [13] Zhevnin A.A., Krishchenko A.P., Glushko Yu.V. Controllability and observability of nonlinear systems and synthesis of terminal control. *Dokl. AN SSSR*, 1982, vol. 266, no. 4, pp. 807–811 (in Russ.).
- [14] Krasnoshchechenko V.I., Krishchenko A.P. *Nelineynye sistemy: geometricheskie metody analiza i sinteza* [Nonlinear systems: geometrical methods of analysis and synthesis]. Moscow, MGTU im. N.E. Baumana Publ., 2005. 520 p.
- [15] Byrd R.H., Gilbert J.C., Nocedal J. A Trust Region Method Based on Interior Point Techniques for Nonlinear Programming. *Mathematical Programming*, 2000, vol. 89, no. 1, pp. 149–185.
- [16] Byrd R.H., Hribar M.E., Nocedal J. An Interior Point Algorithm for Large-Scale Nonlinear Programming. *SIAM Journal on Optimization*, 1999, vol. 9, no. 4, pp. 877–900.
- [17] Waltz R.A., Morales J.L., Nocedal J., Orban D. An interior algorithm for nonlinear optimization that combines line search and trust region steps. *Mathematical Programming*, 2006, vol. 107, no. 3, pp. 391–408.

Статья поступила в редакцию 26.11.2015

Велищанский Михаил Александрович — старший преподаватель кафедры «Математическое моделирование» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5).

Velishchanskiy M.A. — Senior Lecturer of Mathematical Modelling Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Пробьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Велищанский М.А. Движение летательных аппаратов в вертикальной плоскости при наличии ограничений на состояния // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2016. № 3. С. 70–81.

DOI: 10.18698/1812-3368-2016-3-70-81

**Please cite this article in English as:**

Velishchanskiy M.A. Aircraft movement in a vertical plane with state constraints. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Bauman, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2016, no. 3, pp. 70–81. DOI: 10.18698/1812-3368-2016-3-70-81