DOI: 10.18698/1812-3368-2016-3-82-92

УДК 538.945

О намагничивании сверхпроводящего шара

И.Н. Алиев, Д.Г. Меликянц

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: alievprof@yandex.ru; Lion_paint@mail.ru

Последовательная теория явления сверхпроводимости должна быть квантовой, однако феноменологическая электродинамика сверхпроводников может быть построена на базе классических представлений, причем, несмотря на крупные успехи в объяснении явления сверхпроводимости, элементарная классическая теория требует существенных уточнений и усовершенствований. С учетом этого важно вновь проанализировать базовые законы электродинамики на примере распределения токов на поверхности сверхпроводящего шара, а также магнитной индукции. Для этого вне шара поле вычисляется стандартным способом с помощью уравнений Максвелла, а внутри — с использованием уравнения Лондонов. Основной физический вывод полученного результата заключается в следующем: в сверхпроводнике, помещенном во внешнее магнитном поле, возникают поверхностные токи, распределенные в некотором тонком слое конечной толщиной, который ранее трактовался как глубина проникания магнитного поля с соответствующими объемными токами. Ранее было показано, что постоянный ток в проводнике любого типа вытесняется на поверхность вместе с магнитным полем, что приводит к возникновению так называемого поверхностного тока. Этот ток предлагается рассматривать как объемный, но протекающий в некотором тонком слое конечной толщиной. Поскольку такая толщина не зависит от материала и природы проводника, можно полагать, что он согласно теории Лондонов равен характерной глубине проникания магнитного поля в сверхпроводник.

Ключевые слова: *сверхпроводник, уравнения Лондонов, уравнения Максвелла, уравнение Лапласа, поверхностный ток, объемный ток, граничные условия в магнетизме, магнитные заряды.*

On the Magnetization of a Superconducting Ball

I.N. Aliev, D.G. Melikyants

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: alievprof@yandex.ru; Lion_paint@mail.ru

As it is well known at present, the consistent theory of superconductivity should be the quantum one, whereas phenomenological electrodynamics of superconductors can be built on the basis of classical ideas. Furthermore, despite the major advances in explaining the phenomenon of superconductivity, the elementary classical theory requires significant refinements and improvements. Consequently, it is important to reexamine the basic laws of electrodynamics as an example of the current distribution *on the surface of a superconducting sphere, as well as the magnitude of the magnetic induction. For this purpose, the field outside the sphere is calculated in a standard way with the help of Maxwell's equations, and the filed inside is calculated by Londons' equations. The main physical conclusion of the result is as follows: in a superconductor in an external magnetic field there occur surface currents distributed in a thin layer of finite thickness, previously interpreted as the penetration depth of the magnetic field with the appropriate volume currents. In the previous work it was shown that the direct current in a conductor of any type is displaced to the surface together with the magnetic field, which leads to the so-called surface current. This current is proposed as a volume current, but flowing in a thin layer of finite thickness. As this thickness does not depend on the material and the nature of the conductor, according to Londons' theory, it can be assumed that the latter is equal to the characteristic penetration depth of the magnetic field into the superconductor.*

Keywords: *superconductors, Londons' equations, Maxwell's equations, Laplace's equation, surface and volume currents, boundary conditions in magnetism, magnetic charges.*

Структура такой сложной системы, как магнитные свойства материалов в течение длительного времени постоянно находится в поле зрения исследователей, начиная с самых ранних работ (например, [1, 2]), и заканчивая современными работами (например, [3, 12, 13]). Несмотря на огромный прогресс практического применения магнетизма (от компасов до памяти ЭВМ), природа этой сложной структуры остается неясной и в настоящее время. Достаточно упомянуть о проблеме, связанной с тем, что до сих пор не удается свести к единой модели законы Кулона и Био-Савара, лежащие в основе феноменологического подхода к магнетизму, хотя природа этого явления, естественно, общая. В связи с этим любая задача, решаемая в этом направлении, может продвинуть и расширить понимание основ магнетизма.

При решении рассматриваемой задачи использован общеизвестный факт: магнитное поле в сверхпроводнике равно нулю [4]. При этом было предположено равенство нулю напряженности магнитного поля. Интересно, если в первой работе Лондонов [5] фигурировала именно напряженность магнитного поля, то уже в следующей работе, изданной годом позднее, произошел переход к записи в терминах магнитной индукции [6], причем вследствие использования абсолютной системы единиц переход от одной формы записи к другой выглядел предельно простым: $\vec{B} = \vec{H}$. При подобной записи магнитные свойства вещества полностью игнорируются. Однако далее в большинстве классических задачах об ослаблении поля в сверхпроводниках применен именно этот подход (например, [7]). Даже при простом переходе к другой системе единиц появляются множители, не говоря уже о магнитной проницаемости вещества — диамагнетизм сверхпроводников общеизвестен.

Вычислим распределение магнитного поля и объемного сверхпроводящего тока, текущего в сверхпроводящем шаре радиусом R, который помещен во внешнее однородное постоянное магнитное поле с индукцией $\vec{B}_0$, направленной по оси z.

Запишем исходные уравнения. Вне шара поле определяется решением задачи

$$\begin{aligned} &\operatorname{div}\vec{B} = 0; \\ &\operatorname{rot}\vec{B} = 0; \\ &\vec{B}\left(\vec{r} \to \infty\right) = \vec{B}_0, \quad r > R \end{aligned} \tag{1}$$

с граничным условием $\vec{B}_e\Big|_S = \vec{B}_i\Big|_S$. Задача имеет аксиальную симметрию, поэтому

$$B_\varphi = 0 \text{ и } \partial / \partial\varphi = 0. \tag{2}$$

В сферических координатах система (1) преобразуется к виду

$$\sin\theta \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 B_r\right) + r\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta B_\theta\right) = 0;$$

$$\left(\operatorname{rot}\vec{B}\right)_\varphi = 0 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rB_\theta\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial B_r}{\partial\theta}.$$

Решения системы ищем как

$$\begin{aligned} B_r &= f(r)\cos\theta; \\ B_\theta &= -g(r)\sin\theta \end{aligned} \tag{3}$$

с дополнительными краевыми условиями

$$\begin{aligned} B_r &= B_0\cos\theta; \\ B_\theta &= -B_0\sin\theta, \ r \to \infty. \end{aligned}$$

После подстановки условий система преобразуется к системе

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dr}\left(r^2 f\right) + 2rg = 0; \\ &\frac{d}{dr}\left(rg\right) + f = 0 \end{aligned}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} f\left(r \to \infty\right) &= B_0; \\ g\left(r \to \infty\right) &= -B_0. \end{aligned}$$

Исключая величину g, для функции f запишем дифференциальное уравнение $r\dfrac{d^2 f}{dr^2} + 4\dfrac{df}{dr} = 0$, линейно независимые решения которого будем искать в виде $f = r^{\alpha}$. Подставляя эти решения, получаем уравнение $\alpha^3 + 3\alpha = 0$, имеющее два решения $\alpha = 0$ и $\alpha = -3$. Таким образом, общее решение изучаемого уравнения имеет вид $f = \dfrac{C}{r^3} + C_1$. Из первого граничного условия определяем $C_1 = B_0$. Далее уравнение для g: $2rg = -\dfrac{d}{dr}\left(r^2 B_0 + \dfrac{C}{r} \right)$. Окончательно поле вне шара описывается уравнениями

$$
\begin{aligned}
B_r &= \left(B_0 + \frac{C}{r^3} \right)\cos\theta; \\
B_\theta &= \left(-B_0 + \frac{C}{2r^3} \right)\sin\theta,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

поле на границе — уравнениями

$$
\begin{aligned}
B_r\left(r = R\right) &= B_0\cos\theta + \frac{C}{R^3}\cos\theta; \\
B_\theta\left(r = R\right) &= -B_0\sin\theta + \frac{C}{2R^3}\sin\theta.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Приступим к определению векторного поля магнитной индукции внутри шара. Запишем совместную систему уравнений Максвелла и Лондонов [8]

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{div}\vec{B} = 0; \\
&\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j}; \\
&\operatorname{rot}\left(\Lambda\vec{j}\right) + \vec{B} = 0.
\end{aligned}
$$

Здесь $\Lambda = m/\left(e^2 n\right)$ — постоянная Лондонов; n — объемная плотность сверхпроводящих электронов. Первое из этих уравнений в сферических координатах расписывается так же, как и выше: $\dfrac{d}{dr}\left(r^2 f\right) + 2rg = 0$. Для наглядности полученных результатов принимаем (не совсем корректно) $\mu = 1$. К третьему уравнению системы применим операцию rot и объединим со вторым уравнением

$$
\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{B} = -\frac{\mu_0}{\Lambda}\vec{B}. \tag{6}
$$

Операцию $\operatorname{rot}\operatorname{rot}$ в сферических координатах удобнее считать непосредственно, а не с помощью формулы $\operatorname{rot}\operatorname{rot} = \operatorname{grad}\operatorname{div} - \Delta$. Учитывая условие (2) и замену (3), получаем

$$\left(\vec{T}\right)_r \equiv \left(\operatorname{rot}\vec{B}\right)_r = 0;$$

$$\left(\vec{T}\right)_\theta \equiv \left(\operatorname{rot}\vec{B}\right)_\theta = 0;$$

$$\left(\vec{T}\right)_\varphi \equiv \left(\operatorname{rot}\vec{B}\right)_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rB_\theta\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}B_r = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rg\sin\theta\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(f\cos\theta\right) =$$

$$= \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rg\right) + \frac{f}{r}\sin\theta;$$

$$\left(\operatorname{rot}\vec{T}\right)_r = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(T_\varphi\sin\theta\right) = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\frac{\sin^2\theta}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rg\right) + f\right]\right\} =$$

$$= \frac{2\cos\theta}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rg\right) + f\right];$$

$$\left(\operatorname{rot}\vec{T}\right)_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rT_\varphi\right) = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r\frac{\sin\theta}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rg\right) + f\right]\right\} =$$

$$= -\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rg\right) + f\right];$$

$$\left(\operatorname{rot}\vec{T}\right)_\varphi = 0.$$

Таким образом, уравнение (6) в компонентах запишется следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dr}\left(r^2 f\right) + 2rg = 0;\\
&2\frac{d}{dr}\left(rg\right) + 2f + \frac{r^2}{\lambda^2}f = 0;\\
&-\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\left(rg\right) - \frac{1}{r}\frac{df}{dr} + \frac{1}{\lambda^2}g = 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Здесь $1/\lambda^2 = \mu_0/\Lambda$. Легко проверить, что третье уравнение системы (7) является следствием первых двух. Комбинируя первые два уравнения, получаем дифференциальное уравнение

$$r^2\frac{d^2 f}{dr^2} + 4r\frac{df}{dr} - \frac{r^2}{\lambda^2}f = 0.$$

Согласно формуле, приведенной в работе [9], выполним замену $f = F/r^2$. Тогда последнее уравнение преобразуется к уравнению $F''r^2 = F\left(2 + r^2/\lambda^2\right)$, имеющему решение [9]

$$F = C_1\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{r}\right)e^{\frac{r}{\lambda}} + C_2\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{r}\right)e^{-\frac{r}{\lambda}},$$

или

$$B_r = \frac{1}{r^3}\left[C_1\left(\frac{r}{\lambda}-1\right)e^{\frac{r}{\lambda}} + C_2\left(\frac{r}{\lambda}+1\right)e^{-\frac{r}{\lambda}}\right]\cos\theta.$$

Полученный результат должен быть регулярным в нуле (при $r=0$). Для выполнения этого условия проведем разложение определенного решения в ряд Маклорена

$$B_r = \frac{1}{r^3}\left[C_1\left(\frac{r}{\lambda}-1\right)\left(1+\frac{r}{\lambda}\right) + C_2\left(\frac{r}{\lambda}+1\right)\left(1-\frac{r}{\lambda}\right)\right]\cos\theta =$$
$$= \left(C_2 - C_1\right)\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r\lambda^2}\right)\cos\theta,$$

отсюда $C_2 - C_1 = 0,$ поэтому

$$f = \frac{C_1}{r^3}\left[\left(\frac{r}{\lambda}-1\right)e^{\frac{r}{\lambda}} + \left(\frac{r}{\lambda}+1\right)e^{-\frac{r}{\lambda}}\right] = \frac{D}{r^3}\left(\operatorname{sh}\frac{r}{\lambda} - \frac{r}{\lambda}\operatorname{ch}\frac{r}{\lambda}\right).$$

Подставляем полученное решение в первое уравнение системы (7):

$$g = -\frac{1}{2r}\frac{d}{dr}\left(r^2 f\right) = -\frac{D}{2r}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\operatorname{sh}\frac{r}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\operatorname{ch}\frac{r}{\lambda}\right) =$$
$$= \frac{D}{2r^3}\left[\left(1+\frac{r^2}{\lambda^2}\right)\operatorname{sh}\frac{r}{\lambda} - \frac{r}{\lambda}\operatorname{ch}\frac{r}{\lambda}\right].$$

Введем новое обозначение $\beta = 1/\lambda$ и запишем решение

$$\begin{aligned} f &= \frac{D}{r^3}\left(\operatorname{sh}\beta r - \beta r\operatorname{ch}\beta r\right); \\ g &= \frac{D}{2r^3}\left[\left(1+\beta^2 r^2\right)\operatorname{sh}\beta r - \beta r\operatorname{ch}\beta r\right]. \end{aligned} \tag{8}$$

Для проверки регулярности функции g вновь выполним разложение в ряд Маклорена

$$\operatorname{sh}\beta r = \beta r + \frac{1}{6}\left(\beta r\right)^3 + \ldots;$$

$$\operatorname{ch}\beta r = 1 + \frac{1}{2}\left(\beta r\right)^2 + \ldots;$$

$$g=\frac{D}{2r^3}\left[\left(1+\beta^2r^2\right)\left(\beta r+\frac{1}{6}(\beta r)^3\right)-\beta r\left(1+\frac{1}{2}(\beta r)^2\right)\right]=\frac{D\beta^3}{3}.$$

Откуда следует, что функция g при $r=0$ регулярна. Константы C (см. (4)) и D (см. (8)) определим из граничных условий

$$B_0+\frac{C}{R^3}=\frac{D}{R^3}\left(\operatorname{sh}\beta R-\beta R\operatorname{ch}\beta R\right);$$

$$-B_0+\frac{C}{2R^3}=\frac{D}{2R^3}\left[\left(1+\beta^2R^2\right)\operatorname{sh}\beta R-\beta R\operatorname{ch}\beta R\right].$$

Достаточно простое решение этой системы позволяет получить

$$\begin{gathered}C=-B_0R^3\left(1-\frac{3}{\beta R}\operatorname{cth}\beta R+\frac{3}{\beta^2R^2}\right);\\ D=-\frac{3B_0}{\beta^2}\frac{R}{\operatorname{sh}\beta R}.\end{gathered} \qquad (9)$$

Итак, окончательное решение задачи выглядит следующим образом. Компоненты вектора магнитной индукции внутри шара при $r>R$ имеют вид

$$B_r=\left(B_0+\frac{C}{r^3}\right)\cos\theta;$$

$$B_\theta=\left(-B_0+\frac{C}{2r^3}\right)\sin\theta,$$

— вне шара при $r<R$ —

$$B_r=\frac{D}{r^3}\left(\operatorname{sh}\beta r-\beta r\operatorname{ch}\beta r\right)\cos\theta;$$

$$B_\theta=\frac{D}{2r^3}\left[\left(1+\beta^2r^2\right)\operatorname{sh}\beta r-\beta r\operatorname{ch}\beta r\right]\sin\theta$$

с постоянными C и D, определенными по (9). Полученные результаты представлены на рис. 1.

Для расчета объемной плотности сверхпроводящего тока, протекающего под поверхностью шара, используем уравнение Максвелла $\mu_0\vec{j}=\operatorname{rot}\vec{B}$, или в компонентах

$$\mu_0 j_r=\left(\operatorname{rot}\vec{B}\right)_r=0;$$

$$\mu_0 j_\theta=\left(\operatorname{rot}\vec{B}\right)_\theta=0;$$

$$\mu_0 j_\varphi=\left(\operatorname{rot}\vec{B}\right)_\varphi=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rg)+f\right)\sin\theta=-\frac{rf}{2\lambda^2}\sin\theta.$$

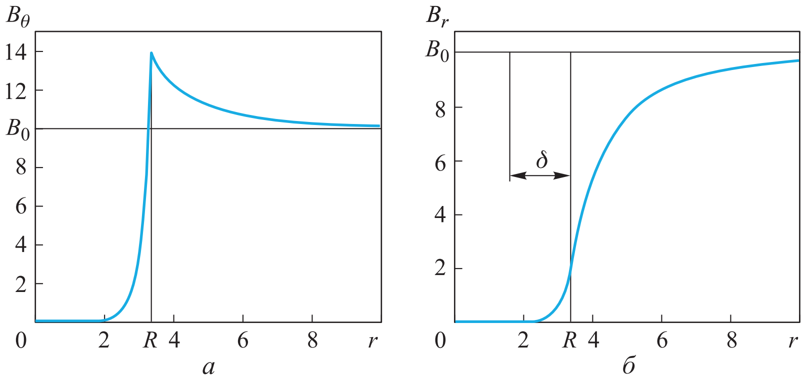

Рис. 1. Зависимости компонент B_θ (*а*) и B_r (*б*) магнитной индукции от радиуса r в экваториальной плоскости сферы (при $\theta = \pi/2$) и на оси, проходящей через центр сферы параллельно направлению внешнего магнитного поля (ось z, при $\theta = 0$)

Последний переход осуществлен с помощью второго уравнения системы (7). Таким образом, отлична от нуля только компонента j_φ вектора плотности тока сверхпроводящих электронов. Используя первое уравнение системы (8) и второе уравнение системы (9), получаем

$$j_\varphi(r) = -\frac{rf}{2\lambda^2\mu_0}\sin\theta = -\frac{D}{2\lambda^2 r^2\mu_0}\left(\operatorname{sh}\beta r - \beta r \operatorname{ch}\beta r\right)\sin\theta =$$

$$= \frac{3B_0R}{2r^2\mu_0 \operatorname{sh}\beta R}\left(\operatorname{sh}\beta r - \beta r \operatorname{ch}\beta r\right)\sin\theta.$$

Проверим на регулярность полученный результат

$$j_\varphi \sim \frac{1}{t^2}\left(\operatorname{sh} t - t\operatorname{ch} t\right) \sim \frac{1}{t^2}\left(t + \frac{1}{6}t^3 - t\left(1 + \frac{1}{2}t^2\right)\right) \sim t \to 0.$$

Зависимость $j_\varphi(r)$ представлена на рис. 2. Ввиду того, что все величины очень быстро убывают на расстояниях около 10^{-4} см (при $R \approx 1...10$ см) зависимости, приведенные в настоящей работе, имеют приблизительный вид.

Для оценки глубины проникания поверхностных токов δ необходимо решить уравнение $\dfrac{j_\varphi(R)}{j_\varphi(R-\delta)} = e$, аналитическое решение которого затруднительно вследствие крайней малости параметра задачи $\delta / R \approx 10^{-4}$. Однако эта глубина по порядку величины должна быть такая же, как и глубина, полученная в теории Лондонов. Тогда с учетом изложенного работе [3] можно сформулировать основной физический вывод полученного результата: во внешнем магнитном поле возникают

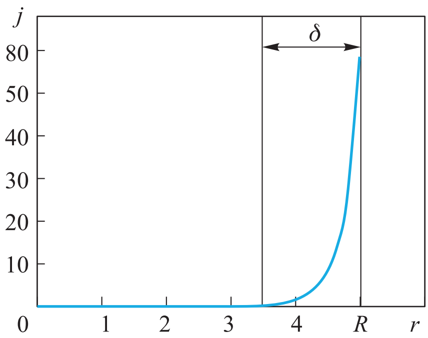

Рис. 2. Зависимость компоненты $j_{\varphi}(r)$ вектора плотности тока сверхпроводящих электронов от радиуса в экваториальной плоскости сферы (при $\theta = \pi/2$)

поверхностные токи, распределенные в некотором тонком слое конечной толщиной, который ранее трактовался как глубина проникания магнитного поля с соответствующими объемными токами.

Авторы выражают благодарности В.В. Толмачеву, при обсуждении с которым работы [10] и родилась идея настоящего исследования, А.М. Макарову и А.Н. Морозову за постоянный интерес к работе и С.О. Юрченко, обсуждение с которым результатов работы [11] обогатило рассматриваемый материал.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (проект № 3.1526.2014/K).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Green G.* Mathematical papers. London: Macmillan a Co., 1871. 325 p.
2. *Thomson K.W.* Reprint of papers on electrostatics a magnetism. Macmillan a Co., 1872. 628 p.
3. *Алиев И.Н., Копылов И.С.* Использование формализма монополей Дирака в некоторых задачах магнетизма // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2015. № 6. С. 25–39. DOI: 10.18698/1812-3368-2015-6-25-39
4. *Meissner W., Ochsenfeld R.* Ein neurer effekt bei eintritt der supraleitfähigkeit // Naturwissenschaften. 1933. Vol. 21. Iss. 44. P. 787–788.
5. *London F., London H.* The electromagnetic equations of the supracondactor // Proc. Roy. Soc. 1935. Vol. 149. P. 71–88.
6. *London H.* Phase-equilibrium of supracondactors in a magnetic field // Proc. Roy. Soc. 1935. Vol. 152. P. 650–663.
7. *Линтон Э., Мак-Лин У.* Сверхпроводники II рода // УФН. 1969. Т. 97. Вып. 3. С. 495–523.
8. *Алиев И.Н., Копылов И.С.* Применение метода множителей Лагранжа к вычислению магнитного поля постоянного тока // Динамика сложных систем. 2015. № 4. С. 3–10.
9. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1965. 703 с.
10. *De Llano M., Tolmachev V.V.* Multiple phases in a new statistical boson-fermion model of superconductivity // Physica A. 2003. Vol. 317. P. 546–564.
11. *Yurchenko S., Komarov K., Pustovoit V.* Multilayer-graphene-based amplifier of surface acoustic waves // AIP advances. 2015. Vol. 5. P. 057144.

12. *Митрохин В.Н.* Электродинамические свойства материальных сред. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. 120 с.
13. *Кравченко В.Ф.* Электродинамика сверхпроводящих структур. Теория, алгоритмы и методы вычислений. М.: Физматлит, 2006. 280 с.

REFERENCES

[1] Green G. Mathematical papers. London, Macmillan a Co., 1871. 325 p.

[2] Thomson K.W. Reprint of papers on electrostatics a magnetism. Macmillan a Co., 1872. 628 p.

[3] Aliev I.N., Kopylov I.S. Use of Dirac monopoles formalism in some magnetism problems. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2015, no. 6, pp. 25–39 (in Russ.). DOI: 10.18698/1812-3368-2015-6-25-39

[4] Meissner W., Ochsenfeld R. Ein neurer effekt bei eintritt der supraleitfähigkeit. *Naturwissenschaften*, 1933, vol. 21, iss. 44, pp. 787–788.

[5] London F., London H. The electromagnetic equations of the supracondactor. *Proc. Roy. Soc*., 1935, vol. 149, pp. 71–88.

[6] London H. Phase-equilibrium of supracondactors in a magnetic field. *Proc. Roy. Soc*., 1935, vol. 152, pp. 650–663.

[7] Lynton E.A., Mc Lean W.L. Type II Superconductors. *Advances Electronics and Electron Phys*., 1967, vol. 23, no. 1.

[8] Aliev I.N., Kopylov I.S. Applying the Lagrange multipliers method to the calculation of DC magnetic field. *Dinamika slozhnykh system* [Dynamics of Complex Systems], 2015, no. 4, pp. 3–10 (in Russ.).

[9] Kamke E. Differentialgleichungen: Losungsmethoden und Losungen, I, Gewohnliche Differentialgleichungen [Handbook of ordinary differential equations]. Leipzig, B.G. Teubner, 1977.

[10] De Llano M., Tolmachev V.V. Multiple phases in a new statistical boson-fermion model of superconductivity. *Physica A*, 2003, vol. 317, pp. 546–564.

[11] Yurchenko S., Komarov K., Pustovoit V. Multilayer-graphene-based amplifier of surface acoustic waves. *AIP advances*, 2015, vol. 5, p. 057144.

[12] Mitrokhin V.N. Elektrodinamicheskie svoystva material'nykh sred [The Electrodynamic Properties of Material Media]. Moscow, MGTU im. N.E. Baumana Publ., 2006. 120 p.

[13] Kravchenko V.F. Elektrodinamika sverkhprovodyashchikh struktur. Teoriya, algoritmy i metody vychisleniy [Electrodynamics of Superconducting Structures. Theory, Algorithms and Computational Methods]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006. 280 p.

Статья поступила в редакцию 07.10.2015

Алиев Исмаил Новруз оглы — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5).

Aliev I.N. — Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor of Physics Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation).

Меликянц Давид Георгиевич — магистрант кафедры «Физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5).

Melikyants D.G. — Master of Physics Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:
Алиев И.Н., Меликянц Д.Г. О намагничивании сверхпроводящего шара // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2016. № 3. С. 82–92. DOI: 10.18698/1812-3368-2016-3-82-92

Please cite this article in English as:
Aliev I.N., Melikyants D.G. The magnetization of a superconducting ball. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2016, no. 3, pp. 82–92.
DOI: 10.18698/1812-3368-2016-3-82-92