

НАХОЖДЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ КОМПОЗИТА МЕТОДОМ МОМЕНТОВ

О.В. Пугачев
Зо Тун Хан

opugachev@yandex.ru
aungsitthi51@gmail.com

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Предложен новый метод нахождения эффективного коэффициента теплопроводности композита с шаровыми включениями, имеющими теплопроводность, отличную от теплопроводности матрицы; предполагается идеальный тепловой контакт матрицы и включений. Процесс теплопроводности описан с помощью случайных блужданий виртуальных частиц теплоты. Для однородного материала выведена формула нахождения коэффициента температуропроводности через момент внутренней энергии. В математическом эксперименте смоделирован процесс теплопроводности в слое композита в условиях одностороннего нагрева. Статистически получено значение момента внутренней энергии через заданное время, доверительный интервал для эффективных коэффициентов температуропроводности и теплопроводности композита. Результаты согласуются с аналитическими оценками. Разработанный метод может быть применен для композитов с включениями произвольной формы и состоящих из нескольких материалов

Ключевые слова

Эффективный коэффициент теплопроводности, композит, компьютерное моделирование, момент внутренней энергии, случайное блуждание, доверительный интервал

Поступила в редакцию 19.10.2015
© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016

Работа выполнена при поддержке гранта Министерства образования и науки Российской Федерации (№ 1.2640.2014)

Введение. Большинство применяемых в технике материалов, являющихся гетерогенными твердыми телами, относится к композитам. Исследованию теплопроводности композитов посвящены многие работы 1960-80-х годов [1–5]. Расчетные формулы в указанных работах получены, как правило, либо обработкой экспериментальных данных применительно к конкретным материалам, либо априорным заданием распределения температуры и теплового потока в моделях структуры гетерогенных тел.

Для композита с шаровыми включениями удастся построить адекватные математические модели, достаточно достоверно прогнозирующие зависимость его эффективного коэффициента теплопроводности от теплопроводности матрицы и

включений и от объемной концентрации включений. Новые подходы к задаче оценки эффективного коэффициента теплопроводности материала с включениями простой формы были применены в работах [6–8]. Используются методы вариационного исчисления, при этом рассмотрена упрощенная модель окрестности включения. Из современных работ по этой теме также отметим работы [9–13].

Мощность современных компьютеров позволяет применить принципиально другой подход к решению задачи об эффективной теплопроводности. Процесс теплопроводности можно моделировать с помощью диффузионных процессов, т. е. случайных блужданий виртуальных частиц теплоты. Эти частицы представляют собой выборку из распределения, плотность которого в каждый момент времени пропорциональна плотности внутренней энергии, т. е. температуре, отсчитываемой от некоторого выбранного нуля (не обязательно абсолютного), умноженной на объемную теплоемкость. Идея состоит в том, чтобы сформулировать удобно вычисляемую оценку температуропроводности, которая аналитически рассчитана для однородного материала, и статистически оценивать ее для композитного материала.

Композит с шаровыми включениями нулевой и ненулевой теплопроводности рассмотрен в работах [14, 15], в которых проведен вычислительный эксперимент, моделирующий теплопроводность сквозь слой композита, если на одной стороне слоя имеется источник теплоты, а на другой — задано граничное условие первого рода. В качестве критерия теплопроводности рассмотрена вероятность того, что виртуальная частица теплоты успеет пересечь слой композита за заданное время. Результаты сравнивались с результатами, полученными аналитическими методами [6].

В настоящей статье использован другой критерий теплопроводности: насколько за заданное время сместится так называемый центр внутренней энергии, определяемый так же, как и центр масс или заряда. Рассчитанные оценки эффективного коэффициента теплопроводности оказались более точными, чем оценки, приведенные в работах [14, 15], при таком же объеме вычислений.

Моделирование теплопроводности винеровскими процессами. Пусть пространство заполнено изотропным материалом с объемной теплоемкостью C и коэффициентом теплопроводности λ , тогда уравнение теплопроводности имеет вид $\dot{u} = a\nabla^2 u$, где $u = u(t, x, y, z)$ — температура, $a = \lambda / C$ — коэффициент температуропроводности.

Если известно начальное распределение температуры $u_0(x, y, z)$, то можно получить распределение температуры через время t с помощью свертки [16]:

$$u(t, x, y, z) = u_0 * p^t(x, y, z), \quad (1)$$

где

$$p^t(x, y, z) = \frac{1}{(\sqrt{4\pi at})^3} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{4at}\right) \quad (2)$$

— плотность нормального распределения с нулевым средним, дисперсиями $Dx = Dy = Dz = 2at$ и нулевыми корреляциями.

Одномерный случайный процесс $\{w_\tau\}_{\tau \geq 0}$ называется стандартным винеровским, если $w_\tau \sim \mathcal{N}(0, \tau)$ и его приращения $w_{\tau_2} - w_{\tau_1}, \dots, w_{\tau_k} - w_{\tau_{k-1}}$, $0 \leq \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_k$ независимы. Параметр τ имеет размерность квадрата расстояния. Если компоненты ξ_t, η_t, ζ_t трехмерного случайного процесса — независимые винеровские процессы с распределением $\mathcal{N}(0, 2at)$, то плотность распределения случайной величины (ξ_t, η_t, ζ_t) при заданном значении $t > 0$ выражается формулой (2). Следовательно, решение уравнения теплопроводности по формуле (1) может быть получено с использованием винеровского процесса: пусть трехмерная случайная величина (X_0, Y_0, Z_0) имеет плотность распределения $u_0(x, y, z)$, тогда трехмерная случайная величина с координатами $X_t = X_0 + \xi_t, Y_t = Y_0 + \eta_t, Z_t = Z_0 + \zeta_t$ будет иметь плотность распределения $u(t, x, y, z)$. В рассматриваемой математической модели процесс теплопроводности представлен как случайное блуждание виртуальных частиц теплоты, которые являются выборкой из распределения с плотностью, в каждый момент времени пропорциональной плотности внутренней энергии.

Решение уравнения теплопроводности с помощью случайных процессов можно модифицировать для ограниченного тела U , на поверхности которого отсутствует теплообмен с окружающей средой путем теплопроводности или излучения: траектории виртуальных частиц должны отражаться от теплоизолированной поверхности.

Смещение центра внутренней энергии. Пусть U — тело в пространстве. Обозначим через ρ плотность внутренней энергии: $\rho = Cu$ (температура, отсчитываемая от выбранного нуля, умноженная на объемную теплоемкость). Тогда полная внутренняя энергия тела равна

$$E = \iiint_U \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

Статическими моментами внутренней энергии назовем величины $M_x = \iiint_U x \rho dx dy dz, M_y = \iiint_U y \rho dx dy dz, M_z = \iiint_U z \rho dx dy dz$. Центр внутренней энергии — точка с координатами

$$\bar{x} = \frac{M_x}{E}, \quad \bar{y} = \frac{M_y}{E}, \quad \bar{z} = \frac{M_z}{E}.$$

Идея метода, применяемого в настоящей работе, заключается в том, чтобы оценить теплопроводность по скорости смещения центра внутренней энергии, который находим как центр локализации виртуальных частиц. Рассмотрим слой $\{0 \leq x \leq b\}$ с коэффициентом температуропроводности a , имеющий теплоизолированные поверхности. Пусть в начальный момент времени ($t = 0$) внутренняя энергия распределена с единичной поверхностной плотностью в бесконечно тонком слое у поверхности $\{x = 0\}$, т. е. $\rho(x, y, z) = \delta(x)$, где δ — дельта-функция Дирака. Температура u не зависит от параметров y, z и далее зависеть не будет ($u = u(x, t)$).

Применим метод Фурье. Для теплоизолированных поверхностей граничные условия $u_x(0,t) = u_x(b,t) = 0$, следовательно, в гильбертовом пространстве $L^2[0, b]$ необходимо взять следующий ортонормированный базис:

$$f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{b}}, \quad f_n(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{b}} \cos \frac{\pi n x}{b}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

Разложим дельта-функцию $\delta(x)$ по базису (3): $\langle \delta, f_0 \rangle = 1/\sqrt{b}$, $\langle \delta, f_n \rangle = \sqrt{2}/\sqrt{b}$, следовательно,

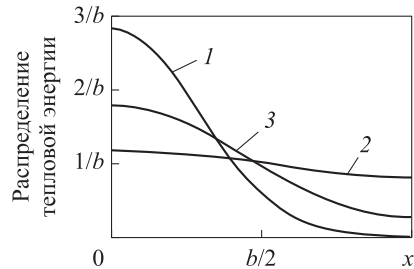
$$\delta(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \langle \delta, f_n \rangle f_n(x) = \frac{1}{b} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi n x}{b} \right).$$

При $t > 0$ из уравнения теплопроводности $\dot{u} = a \nabla^2 u = a u_{xx}$ получаем

$$u(x,t) = \frac{1}{b} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi n x}{b} \exp \left(- \frac{\pi^2 n^2 a t}{b^2} \right) \right).$$

Распределение внутренней энергии при различных значениях времени t приведено на рис. 1.

Рис. 1. Распределение внутренней энергии при значениях времени $t = 0,04b^2/a$ (1), $t = 0,25b^2/a$ (2) и $t = 0,1b^2/a$ (3)



Найдем статический момент внутренней энергии. Для этого вычислим вклад каждого слагаемого ряда Фурье:

$$\begin{aligned} \int_0^b x \cos \frac{\pi n x}{b} dx &= \frac{b}{\pi n} \int_0^b x d \sin \frac{\pi n x}{b} = 0 - \frac{b}{\pi n} \int_0^b \sin \frac{\pi n x}{b} dx = \\ &= \frac{b^2}{\pi^2 n^2} \cos \frac{\pi n x}{b} \Big|_0^b = \begin{cases} 0, & n \text{ четно;} \\ -\frac{2b^2}{\pi^2 n^2}, & n \text{ нечетно.} \end{cases} \end{aligned}$$

Учитывая $E = 1$, получаем

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) = M_x(t) &= \frac{1}{b} \left(\frac{b^2}{2} - 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2b^2}{\pi^2 (2k+1)^2} \exp \left(- \frac{\pi^2 (2k+1)^2 a t}{b^2} \right) \right) = \\ &= \frac{b}{2} \left(1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \exp \left(- \frac{\pi^2 (2k+1)^2 a t}{b^2} \right) \right) = bX(\tau), \end{aligned} \quad (4)$$

где τ — безразмерная переменная, $\tau = at / b^2$; $X(\tau)$ — безразмерная функция,

$$X(\tau) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \exp(-\pi^2(2k+1)^2 \tau) \right) \quad (\text{рис. 2, а}).$$

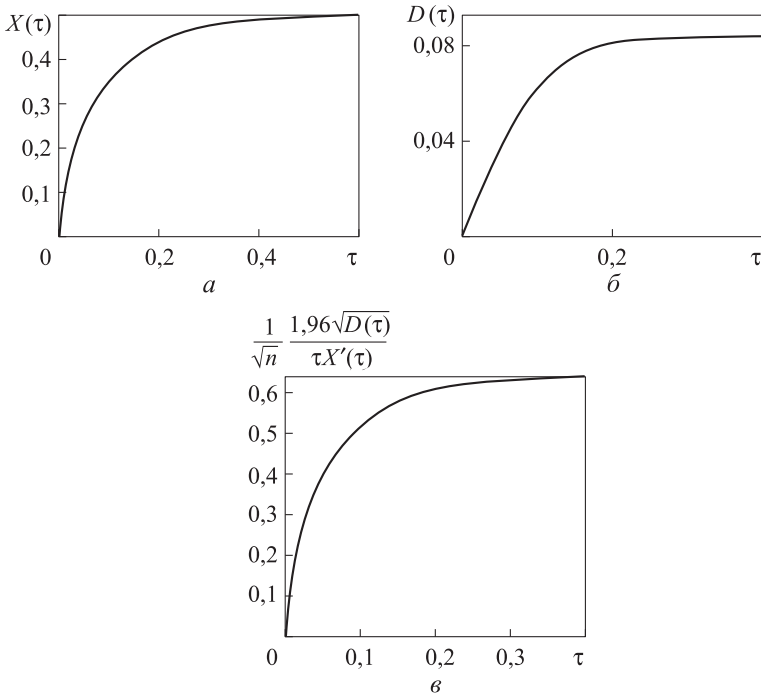


Рис. 2. Графики функций $X(\tau)$ (а), $D(\tau)$ (б) и $\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1,96\sqrt{D(\tau)}}{\tau X'(\tau)}$ (в)

Формула (4), как и следовало ожидать, при $t = 0$ дает $\bar{x} = 0$, так как

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}.$$

При $t \rightarrow \infty$ значение $\bar{x}(t)$ стремится к $b/2$, поскольку распределение внутренней энергии сходится к равномерному.

Статистическая оценка центра внутренней энергии. Пусть имеется слой $\{0 \leq x \leq b\}$ с теплоизолированными поверхностями, изготовленный из композита с размерами неоднородностей, намного меньшими b , эффективный коэффициент температуропроводности a которого требуется найти. Проведем следующий вычислительный эксперимент. Пусть n частиц стартуют с поверхности $\{x = 0\}$ и совершают броуновское движение, описанное в работах [14, 15], отражаясь от теплоизолированных поверхностей $\{x = 0\}$ и $\{x = b\}$. В некоторый момент времени t вычислим среднее значение $\hat{x}(t)$ координаты x этих частиц. Его математическое ожидание равно $\bar{x}(t)$. Определим дисперсию. Второй момент внутренней энергии составляет

$$\int_0^b x^2 u(x, t) dx = \frac{1}{b} \int_0^b \left(x^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} x^2 \cos \frac{\pi n x}{b} \exp \left(-\frac{\pi^2 n^2 a t}{b^2} \right) \right) dx = b^2 \left(\frac{1}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi^2 n^2} \exp \left(-\frac{\pi^2 n^2 a t}{b^2} \right) \right),$$

поскольку

$$\int_0^b x^2 \cos \frac{\pi n x}{b} dx = \frac{2b^2}{\pi^2 n^2} x \cos \frac{\pi n x}{b} \Big|_0^b = \frac{2b^3}{\pi^2 n^2} (-1)^n.$$

Отсюда получаем дисперсию координаты x одной частицы

$$Dx(t) = \int_0^b (x - \bar{x}(t))^2 u(x, t) dx = \int_0^b x^2 u(x, t) dx - \bar{x}^2(t) = b^2 D(\tau),$$

где $D(\tau)$ — безразмерная функция, $D(\tau) = \frac{1}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi^2 n^2} \exp(-\pi^2 n^2 \tau) - X^2(\tau)$ (рис. 2, б). При $\tau \rightarrow \infty$ функция $D(\tau)$ стремится к $1/12$ — дисперсии равномерного распределения. При всех τ справедлива оценка $D(\tau) \leq \tau/\sqrt{2}$, причем это неравенство очень близко к равенству при $0 < \tau \leq 0,07$, что соответствует $0 < X(\tau) \leq 0,3$.

Для n частиц имеем $D\hat{x}(t) = Dx(t)/n = b^2 D(t)/n$. Если в вычислительном эксперименте получено значение \hat{x} , то точечную оценку эффективного коэффициента температуропроводности a находим из уравнения

$$bX(\tau) = \hat{x} \Rightarrow \tau = X^{-1}(\hat{x}/b) \Rightarrow a = \frac{b^2}{t} X^{-1}(\hat{x}/b). \quad (5)$$

Согласно центральной предельной теореме, α -доверительный интервал для \hat{x} имеет вид

$$\hat{x} - \frac{q\sqrt{D(\tau)}}{\sqrt{n}} b < \bar{x} < \hat{x} + \frac{q\sqrt{D(\tau)}}{\sqrt{n}} b,$$

где q — квантиль уровня $(1 + \alpha)/2$ стандартного нормального распределения (например, для $\alpha = 0,95$ $q = 1,96$); τ — значение, полученное из (5). Необходимо так подобрать значение времени t , чтобы минимизировать доверительный интервал для коэффициента температуропроводности a , который в линейном приближении равен

$$\frac{q\sqrt{D(\tau)}}{\sqrt{n}} b \frac{\partial a}{\partial \hat{x}} = \frac{q\sqrt{D(\tau)}}{\sqrt{n}} b \frac{b^2}{tb} (X^{-1})'(\hat{x}/b) = \frac{qb^2}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{D(\tau)}}{tX'(\tau)} = \frac{qa}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{D(\tau)}}{\tau X'(\tau)}.$$

Таким образом, относительная погрешность определения коэффициента a при доверительной вероятности 95 % приблизительно составляет $\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1,96\sqrt{D(\tau)}}{\tau X'(\tau)}$.

Второй сомножитель в этом выражении зависит от величины τ (рис. 2, в).

Точность при значениях $\tau > 0,2$ быстро снижается, а при небольших значениях τ , например при $\tau < 0,1$ (соответствует $t < 0,1 b^2/a$) относительная погрешность примерно равна $1,3/\sqrt{n}$. Если взять 4 300 частиц (см. работы [14, 15]), то получаем значение погрешности $1,3/\sqrt{n} \approx 0,02$. Это значение в 1,5 раза меньше значения погрешности, полученного рассмотренным в указанных работах методом. Время блуждания каждой частицы будет существенно меньше: $0,1b^2/a$ вместо b^2/a . Однако последнее обстоятельство не позволит сэкономить время вычислений: траектории частиц должны быть существенно длиннее, чем размеры включений, поэтому необходимо увеличить толщину слоя в 2–3 раза.

Эффективную теплопроводность находим, умножив эффективную температуропроводность на среднюю объемную теплоемкость: $\hat{\lambda} = a(C_1(1-\alpha) + C_2\alpha)$, где α — доля объема композита, занимаемая включениями. В случае нетеплопроводных включений следует принять $C_2 = 0$.

Результаты вычислительных экспериментов. Рассмотрим композит, состоящий из матрицы (материал с объемной теплоемкостью C и коэффициентом теплопроводности λ_1) и шарообразных включений (материал с такой же объемной теплоемкостью и коэффициентом теплопроводности λ_2). Требуется получить отношение эффективной теплопроводности $\hat{\lambda}$ композита к теплопроводности λ_1 материала матрицы. Поскольку это отношение зависит от отношения λ_2/λ_1 , но не зависит от конкретных значений C и λ_1 , можно принять $C = 1$ Дж/(м³·К), $\lambda_1 = 1$ Вт/(м·К).

Рассмотрим шаровые включения одинаковым радиусом R , расположенные в узлах кубической решетки с шагом $D > 2R$, и оценим эффективную теплопроводность вдоль одной из осей решетки, которую примем за ось Ox . Искомый безразмерный результат будет зависеть от двух параметров — отношений R/D и λ_2/λ_1 . Результат от значения D зависеть не будет, поэтому в вычислениях можем принять $D = 1$ мкм.

Смоделируем диффузионный процесс (X_t, Y_t, Z_t) , описанный выше. Примем толщину слоя $b = 10$ мкм.

В ходе одного эксперимента рассмотрим такие значения T , что для однородного материала матрицы ($R = 0$) соответствующие значения безразмерного времени τ были равны 0,03; 0,04; 0,05; 0,06; 0,07; 0,08; 0,09. Согласно соотношению $\tau = at/b^2$, перечисленным значениям соответствуют значения $T = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ мс.

Для повышения точности результатов усредним значения \hat{a} , полученные для семи различных значений T . Если эти величины независимы, то точность возрастет в $\sqrt{7}$ раз, а относительная погрешность при доверительной вероятности 95 % составит 0,75 %. Однако такая априорная оценка точности сомнительна, поскольку измерения значений x проведены хотя и в разные моменты времени, но для одних и тех же частиц. Поэтому точность усредненных оценок

\hat{a}/a была апостериорно оценена по критерию Стьюдента. Разбив 4 300 частиц на 10 серий по 430 частицы, вычислим оценки \hat{a}/a для каждой серии, обозначив полученные значения через A_1, \dots, A_{10} . Тогда 95%-ный доверительный интервал для оценок \hat{a}/a имеет вид

$$\bar{A} - 2,26\sqrt{\frac{S'}{10}} < \frac{\hat{a}}{a} < \bar{A} + 2,26\sqrt{\frac{S'}{10}},$$

где $\bar{A} = \frac{A_1 + \dots + A_{10}}{10}$; $S' = \frac{(A_1 - \bar{A})^2 + \dots + (A_{10} - \bar{A})^2}{9}$; число 2,26 — квантиль уровня 0,975 распределения Стьюдента с девятью степенями свободы. К сожалению, доверительные интервалы, вычисленные таким способом, не оказались более узкими. Поэтому в дальнейших экспериментах было выбрано только значение $T = 5$ с.

Результаты, полученные для серий экспериментов, состоящих из $n = 4300$ блуждающих частиц, с шагом времени $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$ с, при отношениях $R/D = 0,4$ и $\lambda_2/\lambda_1 = 0, 1/3, 1, 3$ приведены в таблице. Полученные значения отношения \hat{a}/a с вероятностью 95 % имеют относительную погрешность менее 2 %. Случай $\lambda_2/\lambda_1 = 1$ (однородный материал), для которого известен точный ответ $\hat{a}/a = 1$, рассмотрен как тестовый.

Результаты, полученные для серий экспериментов с упорядоченными и хаотическими шаровыми включениями, $R/D = 0,4$

λ_2/λ_1	X	\hat{a}/a	$\hat{\lambda}/\lambda$	X	\hat{a}/a	$\hat{\lambda}/\lambda$
	Упорядоченные шаровые включения			Хаотические шаровые включения		
0	0,2365	0,8794	0,6437	0,2394	0,9013	0,6597
1/3	0,2246	0,7928	0,7928	0,2269	0,8096	0,8096
1	0,2533	1,0101	1,0101	–	–	–
3	0,2928	1,3606	1,3606	0,2937	1,3694	1,3694

Пусть включения радиусом $R < 0,5D$ расположены хаотически с плотностью $1/D^3$. Для каждой частицы задают в достаточно широком фрагменте слоя случайное расположение включений, при этом не допускается их наложение друг на друга и на начало координат, из которого частица начинает движение. Результаты вычислительных экспериментов также представлены в таблице.

Сравним полученные результаты с результатами, полученными в работе [6], в которой была выведена формула

$$\hat{\lambda}/\lambda_1 = \frac{1 - 2b\alpha}{1 + b\alpha}, \tag{6}$$

$b = \frac{1 - \lambda_2/\lambda_1}{2 + \lambda_2/\lambda_1}$; α — объемная концентрация включений. В рассматриваемом случае $\alpha = 4\pi(R/D)^3/3 \approx 0,268$.

Значения $\hat{\lambda}/\lambda_1$, взятые из таблицы для упорядоченных (числитель) и хаотичных (знаменатель) шаровых включений и вычисленные по формуле (6), приведены ниже:

λ_2/λ_1	0	1/3	3
Значения $\hat{\lambda}/\lambda_1$:			
взятые из таблицы	0,6437/0,6597	0,7928/0,8096	1,3606/1,3694
вычисленные по формуле (6)	0,6454	0,7866	1,3603

Заключение. Разработанная новая модификация метода моментов позволяет находить эффективные коэффициенты теплопроводности для композитов с включениями произвольной формы, при этом объем вычислений, требующихся для заданной точности результата, примерно в 2 раза меньше объема вычислений, проведенных авторами в предыдущих работах. Это объясняется тем, что каждая частица дает больше информации. В случае шаровых включений результаты согласуются с результатами, полученными другими методами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дульнев Г.Н., Заричняк Ю.П. Теплопроводность смесей и композиционных материалов. Л.: Энергия, 1974. 264 с.
2. Миснар А. Теплопроводность твердых тел, жидкостей, газов и их композиций / пер. с франц. М.: Мир, 1968. 464 с.
3. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 399 с.
4. Зарубин В.С. Инженерные методы решения задач теплопроводности. М.: Энергоатомиздат, 1983. 328 с.
5. Хорошун Л.П., Солтанов Н.С. Термоупругость двухкомпонентных смесей. Киев: Наук. думка, 1984. 111 с.
6. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Эффективный коэффициент теплопроводности композита с шаровыми включениями // Тепловые процессы в технике. 2012. № 10. С. 470–474.
7. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Оценка эффективной теплопроводности композита с шаровыми включениями методом самосогласования // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. № 9.
DOI: 10.7463/0913.0601512 URL: <http://technomag.bmstu.ru/doc/601512.html>
8. Зарубин В.С., Котович А.В., Кувыркин Г.Н. Оценки эффективного коэффициента теплопроводности композита с анизотропными шаровыми включениями // Известия РАН. Энергетика. 2012. № 6. С. 118–126.
9. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Эффективные коэффициенты теплопроводности композита с эллипсоидальными включениями // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2012. № 3. С. 76–85.
10. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Сравнительный анализ оценок коэффициента теплопроводности композита с шаровыми включениями // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. № 7.
DOI: 10.7463/0713.0569319 URL: <http://technomag.bmstu.ru/doc/569319.html>

11. Янковский А.П. Численно-аналитическое моделирование процессов теплопроводности в пространственно армированных композитах при интенсивном тепловом воздействии // Тепловые процессы в технике. 2011. Т. 3. № 11. С. 500–516.
12. Chen Y.-M., Ting J.-M. Ultra high thermal conductivity polymer composites // Carbon. 2002. Vol. 40. P. 359–362.
13. Nan C.-W., Birringer R., Clarke D.R., Gleiter H. Effective thermal conductivity of particulate composites with interfacial thermal resistance // J. Appl. Phys. 1997. Vol. 81. P. 6692–6699.
14. Пугачев О.В., Хан З.Т. Теплопроводность композита с нетеплопроводными шаровыми включениями // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2015. № 5. DOI: 10.7463/0515.0776224 URL: <http://technomag.bmstu.ru/doc/776224.html>
15. Пугачев О.В., Хан З.Т. Эффективная теплопроводность композита с шаровыми включениями // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2015. № 6. DOI: 10.7463/0615.0778049 URL: <http://technomag.bmstu.ru/doc/778049.html>
16. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ им. М.В. Ломоносова, 1999. 799 с.

Пугачев Олег Всеволодович — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5).

Хан Зо Тун — аспирант кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Пугачев О.В., Хан Зо Тун. Нахождение эффективной теплопроводности композита методом моментов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2016. № 4. С. 28–39. DOI: 10.18698/1812-3368-2016-4-28-39

EVALUATION OF EFFECTIVE HEAT CONDUCTIVITY OF COMPOSITE MATERIALS BY THE MOMENTS METHOD

O.V. Pugachev
Zaw Htun Han

opugachev@yandex.ru
aungsitthi51@gmail.com

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

The purpose of the research was to elaborate a new method of finding the effective heat conductivity coefficient of a composite material. As an example, we consider a matrix with ball inclusions of a material having another heat conductivity, the heat contact being ideal. The process of heat conduction is modeled via random motion of virtual heat particles. The speed of diffusion in each material is proportional to its temperature conductivity coefficient. When a particle is passing from one material to another, one having smaller heat conductivity, it is reflected from the frontier with a certain probability. We formulate an estimate of heat conductivity via

Keywords

Effective heat conductivity coefficient, composite material, computer simulation, momentum of heat energy, random motion, confidence interval

momenta of heat energy, this value is exactly known for a homogeneous material, and this estimate is statistically evaluated for composite materials. A computing experiment models the process of heat conduction through a layer of a composite material, having heated one side of the layer at the start. For a layer of a composite, we perform a multiple computational experiment modeling heat conduction, and, having processed the experiment results statistically, we obtain confidence intervals for the effective temperature conductivity and heat conductivity coefficients. We have considered inclusions of materials with heat conductivity coefficients differing from those of the matrix in 3 times up or down, and with zero heat conductivity. Ball inclusions of equal size were situated in a cubic order or chaotically. In series of 4300 randomly moving particles, in all cases considered, the difference between the effective heat conductivity coefficients and those calculated by other methods does not exceed a statistical error. The method elaborated makes it possible to obtain effective heat conductivity coefficients for composites with inclusions of any size and shape; it can be applied also in a case of inclusions of several materials. The results obtained are reliable, their exactness is limited only by the power of computers

REFERENCES

- [1] Dul'nev G.N., Zarichnyak Yu.P. *Teploprovodnost' smesey i kompozitsionnykh materialov* [Thermal conductivity of mixtures and composite materials]. Leningrad, Energiya Publ., 1974. 264 p.
- [2] Missenard André. *Conductivité thermique des solides, liquides, gas et de leurs mélanges*. Editions eyrolles, Paris, 1965.
- [3] Shermergor T.D. *Teoriya uprugosti mikroneodnorodnykh sred* [Theory of elasticity of micro-inhomogeneous media]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 399 p.
- [4] Zarubin V.S. *Inzhenernye metody resheniya zadach teploprovodnosti* [Engineering methods for solving problems of thermal conductivity]. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1983. 328 p.
- [5] Khoroshun L.P., Soltanov N.S. *Termouprugost' dvukhkomponentnykh smesey* [Thermoelasticity of two-component mixtures]. Kiev, Nauk. dumka Publ., 1984. 111 p.
- [6] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Yu. The effective thermal conductivity of composites with spherical inclusions. *Teplovye protsessy v tekhnike* [Thermal Processes in Engineering], 2012, no. 10, pp. 470–474 (in Russ.).
- [7] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Yu. Evaluation of effective thermal conductivity of composites with ball inclusions by the method of self-consistency. *Nauka i obrazovanie. MGTU im. N.E. Baumana* [Science & Education of the Bauman MSTU. Electronic Journal], 2013, no. 9. DOI: 10.7463/0913.0601512
Available at: <http://technomag.bmstu.ru/en/doc/601512.html>
- [8] Zarubin V.S., Kotovich A.V., Kuvyrkin G.N. Estimates of the effective coefficient of heat conductivity of a composite with anisotropic ball inclusions. *Izvestiya RAN. Energetika* [Proceedings of RAS. Power Engineering], 2012, no. 6, pp. 118–126 (in Russ.).

- [9] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Effective coefficients of thermal conductivity of a composite with ellipsoidal inclusions. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2012, no. 3, pp. 76–85 (in Russ.).
- [10] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Yu. Comparative analysis of estimations of heat conduction of a composite with ball inclusions. *Nauka i obrazovanie. MGTU im. N.E. Baumana* [Science & Education of the Bauman MSTU. Electronic Journal], 2013, no. 7. DOI: 10.7463/0713.0569319 Available at: <http://technomag.bmstu.ru/en/doc/569319.html>
- [11] Yankovskiy A.P. Numerical-analytical modeling of thermal conductivity in a spatially reinforced composites under intense heat impact. *Teplovye protsessy v tekhnike* [Therm. Processes Eng.], 2011, vol. 3, no. 11, pp. 500–516 (in Russ.).
- [12] Chen Y.-M., Ting J.-M. Ultra high thermal conductivity polymer composites. *Carbon*, 2002, vol. 40, pp. 359–362.
- [13] Nan C.-W., Birringer R., Clarke D.R., Gleiter H. Effective thermal conductivity of particulate composites with interfacial thermal resistance. *J. Appl. Phys.*, 1997, vol. 81, pp. 6692–6699.
- [14] Pugachev O.V., Han Z.T. Heat conductivity of composite materials with included balls of zero heat conductivity. *Nauka i obrazovanie. MGTU im. N.E. Baumana* [Science & Education of the Bauman MSTU. Electronic Journal], 2015, no. 5. DOI: 10.7463/0515.0776224 Available at: <http://technomag.bmstu.ru/en/doc/776224.html>
- [15] Pugachev O.V., Han Z.T. Effective heat conductivity of composite materials with ball inclusions. *Nauka i obrazovanie. MGTU im. N.E. Baumana* [Science & Education of the Bauman MSTU. Electronic Journal], 2015, no. 6. DOI: 10.7463/0615.0778049 Available at: <http://technomag.bmstu.ru/en/doc/778049.html>
- [16] Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. *Uraveniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, MGU im. M.V. Lomonosova Publ., 1999. 799 p.

Pugachev O.V. — Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor of Applied Mathematics Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation).

Han Zaw Htun — post-graduate student of Applied Mathematics Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Pugachev O.V., Han Zaw Htun. Evaluation of Effective Heat Conductivity of Composite Materials by the Moments Method. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2016, no. 4, pp. 28–39. DOI: 10.18698/1812-3368-2016-4-28-39