

ОЦЕНКИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ КОМПОЗИТА С ВКЛЮЧЕНИЯМИ В ВИДЕ ЭЛЛИпсоИДОВ ВРАЩЕНИЯ

В.С. Зарубин

fn2@bmstu.ru

Г.Н. Кувыркин

И.Ю. Савельева

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Для композита с дисперсными включениями в виде эллипсоидов вращения последовательно построены оценки диэлектрической проницаемости с использованием математической модели представительного элемента структуры этого композита, метода самосогласованного поля и на основе двойственной вариационной формулировки задачи электростатики в неоднородном твердом теле. Проведен количественный анализ полученных расчетных зависимостей, позволяющих прогнозировать эффективные значения диэлектрической проницаемости композитов с упорядоченным расположением включений и в случае их хаотической ориентации

Ключевые слова

Композит, дисперсные включения, диэлектрическая проницаемость

Поступила в редакцию 01.12.2015

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016

Работа выполнена по грантам НШ-1432.2014.8 и МК-6573.2015.8 программ Президента России государственной поддержки ведущих научных школ и молодых кандидатов наук, а также в рамках проекта 1712 в сфере научной деятельности в части государственного задания 2014/104 Минобрнауки России и государственного задания по проекту № 1.2640.2014

Введение. Важными из свойств, которыми должны обладать функциональные материалы, используемые в различных электротехнических и радиофизических устройствах и приборах, являются диэлектрические характеристики, в частности относительная диэлектрическая проницаемость (далее для краткости слово «относительная» опущено). Предъявляемые требования к значению диэлектрической проницаемости могут быть выполнены, если в качестве функционального материала применять композит с определенным сочетанием характеристик его матрицы и включений [1–3]. Существенное влияние на диэлектрическую проницаемость композита также оказывают его структура, форма включений и их объемная концентрация.

Одним из вариантов структуры композита является дисперсная система, когда в дисперсионной среде (в матрице композита) распределена дисперсная фаза (включения) с сильно развитой поверхностью раздела между ними [4]. Форма дисперсных включений может быть различной. Если размер включения в одном направлении существенно отличается от сопоставимых размеров в двух

других ортогональных направлениях, то в качестве приемлемой геометрической модели, описывающей форму такого включения, можно принять эллипсоид вращения. Эта модель может быть использована и для описания формы некоторых наноструктурных элементов, которые в последнее время рассматривают как включения для перспективных композитов различного назначения [5].

Частный случай дисперсного включения эллипсоидальной формы — шаровое включение. Для композита с шаровыми включениями предложены различные варианты расчетных формул, позволяющих прогнозировать зависимость его эффективной диэлектрической проницаемости от диэлектрических характеристик включений и матрицы, а также от объемной концентрации включений [2, 3, 6]. Наряду со смесевыми моделями [1, 6], методами осреднения [7, 8] и теории случайных функций [9], обычно используемыми при анализе дисперсных систем, применение вариационных подходов [10–12] дает возможность получить двусторонние границы диэлектрической проницаемости композита, между которыми заключено ее истинное значение, и оценить наибольшую возможную погрешность, возникающую при использовании той или иной математической модели. Такие границы можно установить на основе двойственной вариационной формулировки задачи для потенциального поля в неоднородном твердом теле [13]. Эта формулировка содержит два альтернативных функционала (минимизируемый и максимизируемый), принимающих на истинном решении задачи одинаковые экстремальные значения.

Сравнительный анализ различных подходов к построению математических моделей, позволяющих оценивать диэлектрическую проницаемость композита с шаровыми включениями, проведен в работе [14]. В настоящей статье некоторые из этих подходов обобщены применительно к композиту с включениями в виде эллипсоидов вращения. В силу аналогии между математическими формулировками задач электростатики и стационарной теплопроводности используются некоторые методы [15], которые позволяют определить эффективное значение коэффициента теплопроводности композита с эллипсоидальными включениями, являющееся аналогом эффективной диэлектрической проницаемости такого композита.

Аналогия с задачей стационарной теплопроводности. Пусть изотропное включение с заданным значением диэлектрической проницаемости ε имеет форму эллипсоида вращения и расположено в неограниченном объеме изотропной однородной среды с заданным значением диэлектрической проницаемости ε' . Введем цилиндрическую систему $O\rho\varphi z$ координат с началом в центре эллипсоида и координатной осью Oz , совпадающей с его осью вращения. Полуось эллипсоида вдоль оси вращения и его наибольший радиус обозначим через b_z и b_r . Если на большом расстоянии от начала координат по сравнению с наибольшим из значений радиуса b_z или b_r задать однородное электростатическое поле с вектором напряженности \mathbf{E}_0 , направленным параллельно координатной оси Oz , то не зависящие от угловой координаты φ и удовлетворяющие

уравнению Лапласа распределения электрического потенциала U' в окружающей однородной среде и во включении U будут аналогичны соответствующим распределениям температуры при задании на большом расстоянии от начала координат температурного поля с градиентом, коллинеарным вектору напряженности \mathbf{E}_0 . Используя результаты, полученные в работе [16], запишем

$$U' = E_0 z + \frac{(\varepsilon' - \varepsilon)E_0 G'_z z}{\varepsilon' + (\varepsilon - \varepsilon')G_z}, \quad U = \frac{\varepsilon' E_0 z}{\varepsilon' + (\varepsilon - \varepsilon')G_z}, \quad (1)$$

где $E_0 = |\mathbf{E}_0|$;

$$G'_z = \frac{b_z b_r^2}{2} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{du}{(u + b_r^2)(u + b_z^2)^{3/2}}; \quad (2)$$

λ — положительный корень алгебраического уравнения

$$\frac{r^2}{b_r^2 + \lambda} + \frac{z^2}{b_z^2 + \lambda} = 1, \quad (3)$$

а $G_z = G'_z$ при $\lambda = 0$. Отметим, что первое слагаемое в правой части первого равенства (1) определяет распределение электрического потенциала $U_{\infty}(z) = E_0 z$ невозмущенного электростатического поля, а второе слагаемое — возмущение этого поля, вызванное наличием эллипсоидального включения.

Интеграл в формуле (2) можно выразить через элементарные функции и для сфероида (сплющенного эллипсоида вращения), в результате вместо формулы (2) запишем [16]

$$G'_z = \frac{(1 - e^2)^{1/2}}{e^3} \left(\frac{e_{\lambda}}{(1 - e_{\lambda}^2)^{1/2}} - \operatorname{arccctg} \frac{(1 - e_{\lambda}^2)^{1/2}}{e_{\lambda}} \right), \quad (4)$$

где $e_{\lambda} = ((b_r^2 - b_z^2)/(b_r^2 + \lambda))^{1/2}$, а $e = e_{\lambda}$ при $\lambda = 0$, т. е. равно эксцентриситету эллипса, образующегося при вращении сфероида. Для вытянутого эллипсоида вращения ($b_z > b_r$) из формулы (2) следует

$$G'_z = \frac{1 - e^2}{e^3} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{1 + e_{\lambda}}{1 - e_{\lambda}} - e_{\lambda} \right). \quad (5)$$

Представительный элемент структуры композита. Рассмотрим составную частицу в виде эллипсоида вращения с полуосями B_z и B_r , геометрически подобную включению и образованную путем его покрытия слоем изотропного материала матрицы с диэлектрической проницаемостью ε_m . Если все включения геометрически подобны между собой, то эту частицу можно полагать представительным элементом структуры композита, обладающим искомыми диэлектрическими характеристиками этого композита. Условием геометрического подобия является равенство $B_z/B_r = b_z/b_r$, из которого следует формула для объемной концентрации включений $C_V = b_z b_r^2 / (B_z B_r^2)$. Если принять, что размеры составной частицы могут изменяться от некоторых конечных значений до бесконечно малых значений и такими частицами можно заполнить весь объем

композита, то формально допустимо рассматривать изменение значения концентрации C_V во всем диапазоне от нуля до единицы.

Поместим эллипсоидальный представительный элемент структуры композита в неограниченный объем прежней однородной изотропной среды, совместив центр эллипсоида с началом выбранной выше цилиндрической системы координат, а его ось вращения — с координатной осью Oz . Тогда в однородной среде и в этом элементе при прежних условиях задания электростатического поля возникнут соответствующие распределения электрического потенциала

$$U'_* = E_0 z + \frac{(\varepsilon' - \varepsilon_z^*) E_0 \bar{G}'_z z}{\varepsilon' + (\varepsilon_z^* - \varepsilon') \bar{G}'_z}, \quad U_* = \frac{\varepsilon' E_0 z}{\varepsilon' + (\varepsilon_z^* - \varepsilon') \bar{G}'_z}, \quad (6)$$

где ε_z^* — эффективное значение диэлектрической проницаемости составной частицы в направлении оси Oz . Различие величин \bar{G}'_z и G'_z заключается в том, что в формулах (4) и (5) эксцентриситет e_λ следует заменить величиной $\bar{e}'_\lambda = ((B_r^2 - B_z^2) / (B_r^2 + \lambda'))^{1/2}$, а параметр λ' определять из решения уравнения (3) после замены в нем радиусов b_z и b_r величинами B_z и B_r .

Слагаемые

$$\Delta U' = \frac{(\varepsilon' - \varepsilon) E_0 G'_z z}{\varepsilon' + (\varepsilon - \varepsilon') G_z}, \quad \Delta U'_* = \frac{(\varepsilon' - \varepsilon_z^*) E_0 \bar{G}'_z z}{\varepsilon' + (\varepsilon_z^* - \varepsilon') \bar{G}'_z}$$

в правых частях первых формул (1) и (6) характеризуют возмущения в однородной среде заданного однородного электростатического поля, вызванные включением и представительным элементом структуры композита. Если принять $\varepsilon' = \varepsilon_m$, то отношение этих возмущений с увеличением расстояния от начала координат должно стремиться к единице, что при $r=0$ можно представить в виде условия

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\Delta U'_*}{\Delta U'} = \frac{(\varepsilon_m - \varepsilon_z^*)(\varepsilon_m + (\varepsilon - \varepsilon_m) G_z)}{(\varepsilon_m - \varepsilon)(\varepsilon_m + (\varepsilon_z^* - \varepsilon_m) \bar{G}'_z)} \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\bar{G}'_z}{G'_z} = 1, \quad (7)$$

поскольку от координаты z неявно зависит лишь отношение \bar{G}'_z / G'_z .

В случае наличия включения при $r=0$ из уравнения (3) получим равенство $\lambda = z^2 - b_z^2$, а в случае представительного элемента структуры композита — равенство $\lambda' = z^2 - B_z^2$, т. е. $\lambda \rightarrow \infty$ и $\lambda' \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow \infty$. Предел в равенстве (7) найдем для эллипсоидов вращения, при этом для включения величину G'_z определяют по формуле (2). Для представительного элемента при расчете величины \bar{G}'_z в формуле (2) радиусы b_z и b_r следует заменить полуосями B_z и B_r . При $\lambda \rightarrow \infty$ оба интеграла, определяемые по формуле (2), стремятся к нулю. Поэтому при вычислении предела для раскрытия неопределенности типа $0/0$ продифференцируем эти интегралы по нижнему пределу

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\bar{G}'_z}{G'_z} = \frac{B_z B_r^2}{b_z b_r^2} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(u + b_z^2)^{3/2} (u + b_r^2)}{(u + B_z^2)^{3/2} (u + B_r^2)} = \frac{1}{C_V}.$$

Учитывая, что для геометрически подобных эллипсоидов $\bar{G}_z = G_z$, из соотношения (7) находим

$$\tilde{\varepsilon}_z = \frac{\varepsilon_z^*}{\varepsilon_m} = 1 + \frac{(\bar{\varepsilon} - 1)C_V}{1 + (\bar{\varepsilon} - 1)(1 - C_V)G_z}, \quad (8)$$

где $\bar{\varepsilon} = \varepsilon / \varepsilon_m$.

В частном случае шарового включения $G_z = 1/3$ и из равенства (8) следует формула Максвелла [3, 16], что косвенно свидетельствует о корректности проведенной выше процедуры. Для произвольного эллипсоида сумма коэффициентов, определяемых по формуле (2) для каждого ортогонального направления, и называемых коэффициентами деполяризации [7], равна единице. Тогда для эллипсоида вращения при двух равноправных ортогональных направлениях в плоскости, перпендикулярной оси вращения, имеем $G_r = (1 - G_z)/2$. Последовательность определения эффективного значения ε_r^* диэлектрической проницаемости представительного элемента структуры композита в любом радиальном направлении аналогична примененной выше процедуре и приводит к соотношению

$$\tilde{\varepsilon}_r = \frac{\varepsilon_r^*}{\varepsilon_m} = 1 + \frac{(\bar{\varepsilon} - 1)C_V}{1 + (\bar{\varepsilon} - 1)(1 - C_V)(1 - G_z)/2}. \quad (9)$$

Соотношения для эффективных коэффициентов теплопроводности композита с включениями в виде эллипсоидов вращения, идентичные формулам (8) и (9), получены в работах [17, 18] с использованием иного подхода. Таким образом, рассматриваемый представительный элемент структуры композита обладает трансверсальной изотропией относительно оси вращения. Если в композите все включения ориентированы одинаково, т. е. их оси вращения параллельны, то и композит также будет трансверсально изотропным с эффективными значениями ε_z^* и ε_r^* диэлектрических проницаемостей в соответствующих направлениях. При хаотической ориентации включений, когда расположение осей вращения включений равновероятно по всем возможным направлениям, композит будет изотропным с эффективным значением диэлектрической проницаемости $\varepsilon^* = (\varepsilon_z^* + 2\varepsilon_r^*)/3$.

Если включения образуют N групп, в каждой из которых отношение $b_z^{(n)} / b_r^{(n)} = \bar{b}_n = \text{const}$, $n = 1, N$, а диэлектрическая проницаемость включений равна ε_n , то при их хаотической ориентации с учетом формул (8) и (9) получим

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon^*}{\varepsilon_m} = 1 + \frac{1}{3} \sum_{n=1}^N \left(\frac{(\bar{\varepsilon}_n - 1)C_n}{1 + (\bar{\varepsilon}_n - 1)(1 - C_n)G_n} + \frac{2(\bar{\varepsilon}_n - 1)C_n}{1 + (\bar{\varepsilon}_n - 1)(1 - C_n)(1 - G_n)/2} \right),$$

где $\bar{\varepsilon}_n = \varepsilon_n / \varepsilon_m$; C_n — объемная концентрация включений n -й группы; G_n — коэффициент деполяризации, который в соответствии с равенством (2) при $\lambda = 0$ является однозначной функцией параметра \bar{b}_n ,

$$G_n = \frac{\bar{b}_n}{2} \int_0^\infty \frac{dv}{(1+v)(v+\bar{b}_n^2)^{3/2}}.$$

Эллипсоид вращения по мере уменьшения отношения $\bar{b} = b_z / b_r$ приближается по форме к тонкой круглой пластинке, а при увеличении этого отношения — к длинному волокну. В первом случае $G_z \rightarrow 1$ и $G_r \rightarrow 0$, а во втором — $G_z \rightarrow 0$ и $G_r \rightarrow 1/2$. Тогда в пределе при $\bar{b} \rightarrow 0$ из формул (8) и (9) следует

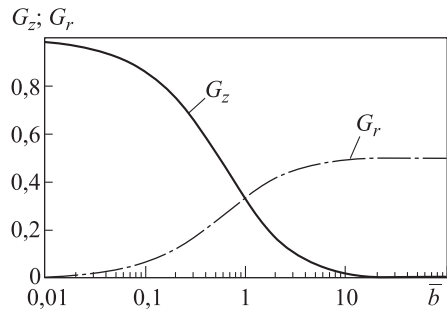
$$\tilde{\epsilon}_z = \frac{\bar{\epsilon}}{\bar{\epsilon} - (\bar{\epsilon} - 1)C_V}, \quad \tilde{\epsilon}_r = 1 - C_V + C_V \bar{\epsilon}, \quad (10)$$

а при $\bar{b} \rightarrow \infty$ имеем

$$\tilde{\epsilon}_z = 1 - C_V + C_V \bar{\epsilon}, \quad \tilde{\epsilon}_r = 1 + \frac{2(\bar{\epsilon} - 1)C_V}{2 + (\bar{\epsilon} - 1)(1 - C_V)}. \quad (11)$$

Степень приближения к предельным значениям (10) и (11) можно оценить по зависимостям коэффициентов деполяризации G_z и G_r от параметра \bar{b} , представленным в полулогарифмических координатах (рис. 1).

Рис. 1. Зависимости коэффициентов деполяризации G_z и G_r от параметра \bar{b}



При хаотической ориентации пластинчатых включений из равенств (10) получим

$$\tilde{\epsilon} = \frac{\bar{\epsilon} + (2/3)(\bar{\epsilon} - 1)^2(1 - C_V)C_V}{C_V + \bar{\epsilon}(1 - C_V)}, \quad (12)$$

а в случае длинных волокон из формул (11) —

$$\tilde{\epsilon} = \frac{(\bar{\epsilon} + 1)(3 + \bar{\epsilon}C_V) - (2 + (\bar{\epsilon} - 1)^2C_V)C_V}{3(1 + C_V + \bar{\epsilon}(1 - C_V))}. \quad (13)$$

Метод самосогласованного поля. В случае хаотической ориентации геометрически подобных включений для прогноза эффективного значения диэлектрической проницаемости композита можно применить метод самосогласованного поля, обычно для краткости называемый методом самосогласования [14]. Особенность метода заключается в определении возмущений векторных полей напряженности или электрического смещения (электрической индукции) в элементах структуры композита (включениях и матрице), которое вызвано взаимодействием этих элементов с однородной средой, обладающей искомым эф-

фективным значением ε^* диэлектрической проницаемости этого композита. Последующее приравнивание нулю этих возмущений, осредненных по объему композита, позволяет получить расчетные зависимости для вычисления эффективного значения ε^* .

Если в однородной изотропной среде с диэлектрической проницаемостью ε^* задано внешнее невозмущенное электростатическое поле $U_z = -E_z^\circ z$ с единственной составляющей E_z° вектора напряженности, параллельного оси Oz принятой выше цилиндрической системы координат, то согласно второй формуле (1) возмущение электростатического поля во включении будет равно

$$\Delta U_z(z) = U(z) - U_z = \frac{E_z^\circ z (\varepsilon - \varepsilon^*) G_z}{\varepsilon^* + (\varepsilon - \varepsilon^*) G_z}.$$

Когда вектор напряженности внешнего невозмущенного поля направлен по одному из радиальных направлений и имеет составляющую E_r° , для возмущения электростатического поля во включении получим

$$\Delta U_r = \frac{E_r^\circ r (\varepsilon - \varepsilon^*) (1 - G_z) / 2}{\varepsilon^* + (\varepsilon - \varepsilon^*) (1 - G_z) / 2}.$$

Из этих формул следует, что возмущение $\Delta \mathbf{E}$ векторного поля напряженности во включении будет однородно и коллинеарно вектору \mathbf{E}° напряженности внешнего невозмущенного поля с заданными составляющими E_z° и E_r° . Это возмущение можно представить в тензорной форме (точка между сомножителями обозначает операцию свертки по повторяющемуся индексу в этих сомножителях):

$$\Delta \mathbf{E} = \hat{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{E}^\circ, \quad (14)$$

где $\hat{\mathbf{V}}$ — диагональный тензор второго ранга. Компоненты этого тензора в прямоугольной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$, ось Ox_3 которой совпадает с осью Oz принятой выше цилиндрической системы координат, равны

$$V_{11} = V_{22} = \frac{(\varepsilon^* - \varepsilon)(1 - G_z) / 2}{\varepsilon^* + (\varepsilon - \varepsilon^*)(1 - G_z) / 2}, \quad V_{33} = \frac{(\varepsilon^* - \varepsilon)G_z}{\varepsilon^* + (\varepsilon - \varepsilon^*)G_z}. \quad (15)$$

Матрицу композита представим совокупностью шаровых частиц, радиус которых изменяется от некоторого конечного до бесконечно малого значения, что позволяет заполнить все пустоты между эллипсоидальными включениями. Учитывая, что для шаровой частицы $G_z = G_r = 1/3$, для возмущения в ней векторного поля напряженности получаем

$$\Delta \mathbf{E}_m = \hat{\mathbf{W}} \cdot \mathbf{E}^\circ, \quad (16)$$

где $\hat{\mathbf{W}}$ — изотропный тензор второго ранга с компонентами

$$W_{11} = W_{22} = W_{33} = \frac{\varepsilon^* - \varepsilon_m}{2\varepsilon^* + \varepsilon_m}. \quad (17)$$

В случае хаотической ориентации включений при осреднении по объему композита возмущений векторного поля напряженности в элементах структуры этого композита существенными будут лишь объемные концентрации включений (C_V) и матрицы ($1-C_V$). В соответствии с методом самосогласования [14, 19] результат осреднения возмущений следует приравнять нулевому вектору $\mathbf{0}$, т. е. принять $\langle \Delta \mathbf{E} \rangle_{C_V} + \langle \Delta \mathbf{E}_m \rangle (1-C_V) = \mathbf{0}$, где угловые скобки обозначают операцию осреднения по объему. Поскольку $\mathbf{E}^o \neq \mathbf{0}$, последнее равенство с учетом формул (14) и (16) принимает вид $\langle \hat{\mathbf{V}} \rangle_{C_V} = -\langle \hat{\mathbf{W}} \rangle (1-C_V)$, что равносильно равенству, содержащему вместо осредненных тензоров первые (линейные) инварианты этих тензоров [13]. В результате, учитывая формулы (15) и (17), приходим к соотношению

$$\left(2 \frac{(\varepsilon^* - \varepsilon)(1-G_z)/2}{\varepsilon^* + (\varepsilon - \varepsilon^*)(1-G_z)/2} + \frac{(\varepsilon^* - \varepsilon)G_z}{\varepsilon^* + (\varepsilon - \varepsilon^*)G_z} \right) C_V = 3 \frac{(\varepsilon_m - \varepsilon^*)}{2\varepsilon^* + \varepsilon_m} (1-C_V), \quad (18)$$

эквивалентному кубическому уравнению относительно искомого значения ε^* .

Двусторонние оценки. Используем двойственную вариационную формулировку задачи электростатики в неоднородном твердом теле для построения двусторонних оценок диэлектрической проницаемости композита при упорядоченном расположении эллипсоидальных включений, когда оси вращения всех включений параллельны. Область V , занятую композитом, выберем в виде прямого цилиндра высотой H и площадью F оснований S_0 и S_H [14]. Боковую поверхность S_* цилиндра в точках $N \in S_*$ примем электроизолированной, на одном из оснований зададим электрический потенциал $U = U_H$, а на другом — $U = 0$. Сначала рассмотрим вариант расположения включений в области V , когда их оси вращения перпендикулярны основаниям цилиндра. При этом диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(M)$ зависит от положения точки $M \in V$, т. е. принимает значение ε , если эта точка принадлежит включению, или значение ε_m , когда она принадлежит матрице.

Истинное распределение $U^*(M)$ электрического потенциала в выбранной области минимизирует функционал [14]

$$J[U] = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon(M) (\nabla U(M))^2 dV(M), \quad (19)$$

где ∇ — дифференциальный оператор Гамильтона. Функционал (19) допустимо рассматривать на распределениях $U(M)$, $M \in V$, удовлетворяющих на основаниях цилиндра заданным выше граничным условиям и непрерывных в замкнутой области $\bar{V} = V \cup S$, а в открытой области V — имеющих кусочно непрерывные производные. Альтернативным по отношению к функционалу (19) является максимизируемый функционал [12]

$$I[\mathbf{D}] = -\frac{1}{2} \int_V \frac{(\mathbf{D}(M))^2}{\varepsilon(M)} dV(M) - U_H \int_{S_H} \mathbf{D}(N) \cdot \mathbf{n}(N) dS(N), \quad (20)$$

допускающий рассмотрение на непрерывных распределениях вектора $\mathbf{D}(M)$, $M \in V$, которые удовлетворяют дополнительным условиям $\nabla \cdot \mathbf{D}(M) = 0$ ($M \in V$) и $\mathbf{D}(N) \cdot \mathbf{n}(N) = 0$, $N \in S_x$.

Из экстремальных свойств функционалов (19) и (20), составляющих двойственную вариационную формулировку задачи электростатики, и равенства их значений на истинном решении задачи следует цепочка неравенств

$$J[U] \geq J[U^*] \geq I[\mathbf{D}], \tag{21}$$

при котором функционал (19) достигает наименьшего значения

$$J[U^*] = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon(M) (\nabla U^*(M))^2 dV(N). \tag{22}$$

Примем для функционала (19) достаточно простое допустимое линейное по высоте области \bar{V} распределение электрического потенциала $U(M)$, $M \in \bar{V}$, для которого $(\nabla U(M))^2 = (U_H / H)^2 = \text{const}$. Тогда из формулы (19) получим

$$J_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{U_H}{H} \right)^2 \int_V \varepsilon(M) dV(M) = U_H^2 F \frac{(1 - C_V) \varepsilon_m + C_V \varepsilon}{2H}.$$

Для функционала (20) в качестве допустимого распределения вектора \mathbf{D} примем постоянное значение D единственной составляющей этого вектора, перпендикулярной основаниям цилиндра. Значение D найдем из необходимого условия максимума функционала (20), который примет значение

$$I_1 = - \frac{D^2 F H}{2} \left(\frac{1 - C_V}{\varepsilon_m} + \frac{C_V}{\varepsilon} \right) - U_H D F.$$

Из условия $dI_1 / dD = 0$ определим $D = -(U_H / H) / ((1 - C_V) / \varepsilon_m + C_V / \varepsilon)$ и

$$I_1 = \frac{(U_H^2 F) / (2H)}{(1 - C_V) / \varepsilon_m + C_V / \varepsilon}.$$

Заменим в рассматриваемой области неоднородную среду, состоящую из матрицы и включений с различными значениями диэлектрической проницаемости, однородной средой с искомым эффективным значением ε_z^* диэлектрической проницаемости композита в направлении ориентации осей вращения включений. В этом случае принятое выше линейное распределение электрического потенциала будет истинным для функционала (19) и он согласно равенству (22) примет значение $J_1^* = \varepsilon_z^* U_H^2 F / (2H)$. В соответствии с неравенствами (21), используя полученные значения J_1 , I_1 и J_1^* , запишем двусторонние оценки

$$\varepsilon_z^+ = (1 - C_V) \varepsilon_m + C_V \varepsilon \geq \varepsilon_z^* \geq 1 / ((1 - C_V) / \varepsilon_m + C_V / \varepsilon) = \varepsilon_z^-, \tag{23}$$

которые не зависят от формы включений. Повторение рассмотренной процедуры применительно к случаю расположения осей вращения эллипсоидальных

включений параллельно основаниям цилиндра приведет к идентичной формуле для двусторонних оценок ε_r^+ и ε_r^- эффективного значения ε_r^* диэлектрической проницаемости композита в направлении, перпендикулярном ориентации осей вращения включений. Это позволяет в соотношении (23) опустить нижний индекс у верхней (ε^+) и нижней (ε^-) оценок, поскольку они в равной степени определяют границы возможного изменения не только значений ε_z^* и ε_r^* , но и значения ε^* при хаотической ориентации включений.

Отметим, что первая и вторая формулы (10) для предельно тонких пластинчатых включений могут быть преобразованы к формулам для нижней (ε^-) и верхней (ε^+) оценок, а первая формула (11) для предельно длинных волокон — к верхней оценке. Равенство для значения ε^+ совпадает с формулой, которая следует из теории смесей [20], но в отличие от использованного выше вариационного подхода эта теория не позволяет утверждать, что значение ε^+ является верхней оценкой по отношению к истинным значениям диэлектрической проницаемости.

Верхняя и нижняя оценки в соотношении (23) совпадают при $C_V = 0$ и $C_V = 1$, но при промежуточных значениях $C_V \in (0;1)$ разность $\varepsilon^+ - \varepsilon^-$ возрастает по мере отклонения параметра $\bar{\varepsilon}$ от единицы. Если в качестве эффективного значения диэлектрической проницаемости композита выбрать полусумму полученных оценок, то отношение $\eta = (\varepsilon_z^+ - \varepsilon_z^-) / (\varepsilon_z^+ + \varepsilon_z^-)$ можно рассматривать как наибольшую возможную относительную погрешность, которая может возникнуть при таком выборе. Наибольших значений $\eta_m = 1 - 1 / (1 + (\bar{\varepsilon} + 1 / \bar{\varepsilon} - 2) / 8)$ относительная погрешность достигает при $C_V = 1/2$.

Сравнение полученных оценок. Для количественного анализа представленных выше оценок диэлектрической проницаемости композита с включениями в виде эллипсоидов вращения выбраны два значения $\bar{\varepsilon} = 5$ и $\bar{\varepsilon} = 0,2$. В целях более рационального использования масштаба рисунков рассчитанные значения диэлектрической проницаемости нормированы по определяемой соотношением (23) верхней оценке ε^+ . Поэтому верхней границей возможных нормированных значений является единица, а нижней границей — отношение $\varepsilon^- / \varepsilon^+$, зависимость которого от объемной концентрации C_V включений совпадает для выбранных взаимно обратных значений параметра $\bar{\varepsilon}$ и показана на представленном далее рисунке утолщенной штриховой линией.

Результаты расчетов для композита с упорядоченным расположением включений, когда их оси вращения параллельны, приведены на рис. 2, а. Сплошные линии с различными символами соответствуют значению $\bar{\varepsilon} = 5$, а штриховые — значению $\bar{\varepsilon} = 0,2$. Для частного случая изотропного композита с шаровыми включениями зависимости отношения $\varepsilon^* / \varepsilon^+$ от объемной концентрации включений C_V отмечены светлыми кружками, а для композита с включениями в виде предельно длинных волокон зависимости $\varepsilon_r^* / \varepsilon^+$ от объемной концентрации включений C_V — кривые с темными кружками. Для предельно

длинных волокон $\varepsilon_z^*/\varepsilon^+ \equiv 1$, для предельно тонких пластинчатых включений $\varepsilon_r^*/\varepsilon^+ \equiv 1$, а зависимости $\varepsilon_z^*/\varepsilon^+$ в случае пластинчатых включений совпадают с утолщенной штриховой линией.

Включениям в виде удлинённых эллипсоидов вращения с параметром $\bar{b} = 5$ соответствует значение $D_z = 0,0558$, для которого зависимости отношения $\varepsilon_z^*/\varepsilon^+$ от объемной концентрации включений C_V отмечены светлыми ромбами, а зависимости отношения $\varepsilon_r^*/\varepsilon^+$ от объемной концентрации включений C_V — темными ромбами. Для сфероидального включения с параметром $\bar{b} = 0,2$ имеем $D_z = 0,7505$, а те же зависимости отмечены светлыми и темными квадратами. Рассмотренные зависимости не выходят за пределы границ, определяемые по соотношению (23) для двусторонних оценок, которые установлены с использованием двойственной вариационной формулировки задачи электростатики. Согласно более детальным расчетам, при изменении объемной концентрации включений C_V в интервале $(0; 1)$ для $\bar{b} < 1$ справедлива цепочка неравенств $\varepsilon_z^* < \varepsilon^* < \varepsilon_r^*$, для $\bar{b} > 1$ и $\bar{\varepsilon} < 1$ — обратная цепочка неравенств $\varepsilon_z^* > \varepsilon^* > \varepsilon_r^*$, а в случае $\bar{b} > 1$ и $\bar{\varepsilon} > 1$ $\varepsilon_z^* < \varepsilon_r^*$, но с возрастанием объемной концентрации включений C_V значения ε^* выходят за пределы интервала $(\varepsilon_z^*; \varepsilon_r^*)$.

Результаты расчетов для изотропного композита с хаотически ориентированными включениями при значениях $\bar{\varepsilon} = 5$ и $\bar{\varepsilon} = 0,2$, для которых область возможных значений диэлектрической проницаемости композита, отнесенных (как и на рис. 2, а) к верхней оценке, имеет прежнюю общую границу в виде утолщенной штриховой линии, представлены на рис. 2, б. Светлыми кружками отмечены зависимости отношения $\varepsilon^*/\varepsilon^+$ от объемной концентрации включений C_V для композита с шаровыми включениями, построенные с использованием формул (8) и (9) (сплошная и штриховая линии при $\bar{\varepsilon} = 5$ и $\bar{\varepsilon} = 0,2$) и полученные методом самосогласования с применением равенства (18) (штрихпунктирная и пунктирная линии при $\bar{\varepsilon} = 5$ и $\bar{\varepsilon} = 0,2$ с симметричными ветвями относительно абсциссы $C_V = 0,5$). Указанные типы линий использованы и для предельных вариантов включений в виде тонких круглых пластинок (линии с темными квадратами) и длинных волокон (линии с темными ромбами), также построенные по формулам (12) и (13).

Штриховая линия с кружками при $\bar{\varepsilon} = 0,2$, построенная для шаровых включений, является верхней границей области, в которой расположены обе штриховые линии с ромбами и квадратами, соответствующие предельным вариантам формы включений). Сплошная линия с кружками для шаровых включений при $\bar{\varepsilon} = 5$ ограничивает снизу область, в которой находятся кривые для этих форм включений. Для предельно тонкого пластинчатого включения сплошная и штриховая линии, отмеченные темными квадратами, совпадают для взаимно обратных значений параметра $\bar{\varepsilon}$. Штрихпунктирная и пунктирная линии со светлыми кружками для значений $\bar{\varepsilon} = 5$ и $\bar{\varepsilon} = 0,2$ ограничивают сверху области расположения кривых, относящихся к обоим предельным вариантам формы включений.

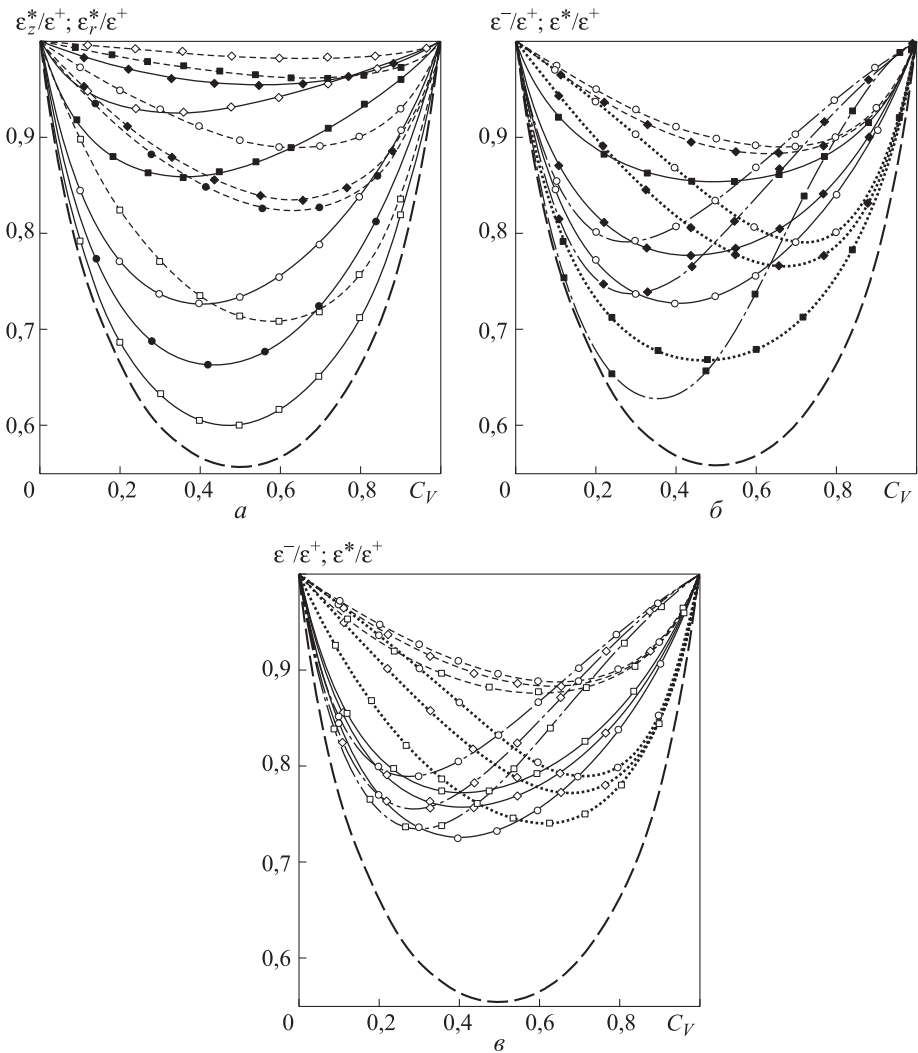


Рис. 2. Сравнение оценок диэлектрической проницаемости композита при упорядоченном расположении эллипсоидальных включений (а), при хаотическом расположении эллипсоидальных включений с предельными (б) и промежуточными (в) отношениями полуосей

Результаты расчетов для изотропного композита с вариантами формы включений, промежуточными между предельными, представлены на рис. 2, в. Для сравнения с использованием прежних обозначений приведены зависимости отношения $\varepsilon^*/\varepsilon^+$ от объемной концентрации шаровых включений C_V . Отмеченные выше закономерности в расположении кривых, построенных с помощью метода самосогласования, сохраняются и для промежуточных форм включений в виде сфероидов и удлиненных эллипсоидов, т. е. штрихпунктирная и штриховая линии со светлыми кружками ограничивают сверху области расположения кривых для таких включений. Штриховая линия со светлыми кружками при $\bar{\varepsilon} = 0,2$ для композита с шаровыми включениями является

верхней границей для линий с ромбами и квадратами, соответствующих значениям $\bar{b} = 5$ и $\bar{b} = 0,2$. Сплошная линия со светлыми кружками при указанных значениях \bar{b} ограничивает снизу область расположения сплошных кривых с такими же символами.

Проведенный количественный анализ позволяет получить представление о взаимном расположении зависимостей диэлектрической проницаемости композита от объемной концентрации включений в виде эллипсоидов вращения с различным отношением их полуосей при двух выбранных взаимно обратных значениях параметра $\bar{\epsilon}$.

Заключение. Полученные путем использования различных подходов расчетные зависимости позволяют оценивать диэлектрическую проницаемость композитов с включениями в виде эллипсоидов вращения. Сравнение построенных оценок, проведенное в широком интервале изменения отношения полуосей эллипсоидальных включений, показало, что все они расположены в пределах области, ограниченной двусторонними границами, которые установлены на основе двойственной вариационной формулировки задачи электростатики для неоднородного твердого тела. Эти границы позволяют оценивать наибольшую возможную относительную погрешность, которая может возникнуть при использовании полученных расчетных зависимостей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тареев Б.М. Физика диэлектрических материалов. М.: Энергоиздат, 1982. 320 с.
2. Виноградов А.П. Электродинамика композитных материалов. М.: Эдиториал УРСС, 2001. 208 с.
3. Физика композиционных материалов / под общ. ред. Н.Н. Трофимова. В 2 т. Т. 2. М.: Мир, 2005. 344 с.
4. Политехнический словарь / под ред. А.Ю. Ишлинского. М.: Сов. энциклопедия, 1989. 656 с.
5. Кац Е.А. Фуллерены, углеродные нанотрубки и нанокластеры. Родословная форм и идей. М.: Изд-во ЛКИ, 2006. 296 с.
6. Электрические свойства полимеров / под ред. Б.И. Сажина. Л.: Химия, 1986. 224 с.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. В 10 т. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1992. 664 с.
8. Димитриенко Ю.И., Соколов А.П., Маркевич М.Н. Моделирование диэлектрических характеристик композиционных материалов на основе метода асимптотического осреднения // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. № 1. DOI: 10.7463/0113.0531682 URL: <http://technomag.bmstu.ru/doc/531682.html>
9. Фокин А.Г., Шермергор Т.Д. Диэлектрическая проницаемость неоднородных материалов // ЖТФ. 1969. Т. 39. Вып. 7. С. 1308–1313.
10. Hashin Z., Strikman S. Variational approach to the theory of the effective magnetic permeability of multiphase materials // J. Appl. Phys. 1962. Vol. 33. P. 3125–3132. DOI: 10.1063/1.1728579

11. Ермаков Г.А., Фокин А.Г., Шермергор Т.Д. Вычисление границ для эффективных диэлектрических проницаемостей неоднородных диэлектриков // ЖТФ. 1974. Т. 44. Вып. 2. С. 249–255.
12. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Пугачев О.В. Вариационный подход к оценке диэлектрической проницаемости композита с дисперсными включениями // Математика и математическое моделирование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2015. № 2. DOI: 10.7463/mathm.0215.0769483 URL: <http://mathmjournal.ru/doc/769483.html>
13. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 512 с.
14. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Оценки диэлектрической проницаемости композита с дисперсными включениями // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2015. № 3. С. 50–64. DOI: 10.18698/0236-3933-2015-3-50-64
15. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Эффективные коэффициенты теплопроводности композита с эллипсоидальными включениями // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2012. № 3. С. 76–85.
16. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел / пер. с англ. М.: Наука, 1964. 488 с.
17. Зарубин В.С., Савельева И.Ю. Эффективные коэффициенты теплопроводности композита со сфероидальными включениями // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2013. № 4. С. 116–126.
18. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Эффективные коэффициенты теплопроводности композита с включениями в виде удлиненных эллипсоидов вращения // Тепловые процессы в технике. 2013. Т. 5. № 6. С. 276–282.
19. Hill R. A self-consistent mechanics of composite materials // J. Mech. Phys. Solids. 1965. Vol. 13. No. 4. P. 213–222.
20. Головин Н.Н., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Смесевые модели механики композитов. Ч. 1. Термомеханика и термоупругость многокомпонентной смеси // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2009. № 3. С. 36–49.

Зарубин Владимир Степанович — д-р техн. наук, профессор кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5).

Кувыркин Георгий Николаевич — д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5).

Савельева Инга Юрьевна — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Оценки диэлектрической проницаемости композита с включениями в виде эллипсоидов вращения // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2016. № 4. С. 40–55.
DOI: 10.18698/1812-3368-2016-4-40-55

ESTIMATES OF DIELECTRIC PERMEABILITY OF A COMPOSITE WITH INCLUSIONS IN THE FORM OF ROTATION ELLIPSOIDS

V.S. Zarubin

fn2@bmstu.ru

G.N. Kuvyrkin

I.Yu. Savel'eva

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

For a composite with dispersed inclusions in the form of rotation ellipsoids we successively made estimates of dielectric permeability by means of a mathematical model of a representative element of the composite structure. Moreover, we applied the method of self-consistent field and used the dual variational formulation of a problem of electrostatics in a heterogeneous solid. We carried out a quantitative analysis of the calculated dependences allowing us to predict the effective values of dielectric permeability of composites with an ordered arrangement of the inclusions and in the case of their random orientation

Keywords

Composite, disperse inclusions, dielectric permeability

REFERENCES

- [1] Tareev B.M. Fizika dielektricheskikh materialov [Physics of dielectrics]. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1982. 320 p.
- [2] Vinogradov A.P. Elektrodinamika kompozitnykh materialov [The electrodynamics of composites]. Moscow, Editorial URSS Publ., 2001. 208 p.
- [3] Trofimov N.N., ed. Fizika kompozitsionnykh materialov. V 2 t. T. 2 [Physics of composites. In 2 vol. Vol. 2]. Moscow, Mir Publ., 2005. 344 p.
- [4] Politekhnichestkiy slovar'. A.Yu. Ishlinskiy, ed. [Polytechnic Dictionary]. Moscow, Sov. Entsiklopediya Publ., 1989. 656 p.
- [5] Kats E.A. Fullereny, uglerodnye nanotrubki i nanoklastery. Rodoslovnaya form i idey [Fullerenes, carbon nanotubes and nanoclusters. Pedigree of forms and ideas]. Moscow, LKI Publ., 2008. 296 p.
- [6] Sazhin B.I., ed. Elektricheskie svoystva polimerov [Electric properties of polymers]. Leningrad, Khimiya Publ., 1986. 224 p.
- [7] Landau L.D., Lifshitz E.M. Electrodynamics of continuous media (Vol. 8. Course of theoretical physics). Pergamon Press, 1960.
- [8] Dimitrienko Yu.I., Sokolov A.P., Markevich M.N. Modeling of dielectric properties of composite materials on the basis of asymptotic averaging. *Nauka i obrazovanie. MGTU im. N.E. Baumana* [Science & Education of the Bauman MSTU. Electronic Journal], 2013, no. 1. DOI: 10.7463/0113.0531682 Available at: <http://technomag.bmstu.ru/en/doc/531682.html>
- [9] Fokin A.G., Shermergor T.D. Permittivity of heterogeneous materials. *Zh. Tekh. Fiz.* [Tech. Phys. The Russ. J. Appl. Phys.], 1969, vol. 39, no. 7, pp. 1308–1313 (in Russ.).
- [10] Hashin Z., Strikman S. Variational approach to the theory of the effective magnetic permeability of multiphase materials. *J. Appl. Phys.*, 1962, vol. 33, pp. 3125–3132. DOI: 10.1063/1.1728579

- [11] Ermakov G.A., Fokin A.G., Shermergor T.D. Calculating the boundaries for the effective dielectric constants of inhomogeneous dielectrics. *Zh. Tekh. Fiz.* [Tech. Phys. The Russ. J. Appl. Phys], 1974, vol. 44, no. 2, pp. 249–255 (in Russ.).
- [12] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Pugachev O.V. Variational approach to the estimate of the permittivity of a composite with dispersed inclusions. *Mat. i mat. model.* [Mathematics & Mathematical Modelling of the Bauman MSTU. Electronic Journal], 2015, no. 2. DOI: 10.7463/mathm.0215.0769483 Available at: <http://mathjournal.ru/en/index.html>
- [13] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Matematicheskie modeli mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoy sredy [Mathematical models of mechanics and electrostatics of continuous media]. Moscow, MGTU im. N.E. Bauman Publ., 2008. 512 p.
- [14] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Yu. Evaluation of dielectric permittivity of composite with dispersed inclusions. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Bauman, Priborostr.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Instrum. Eng.], 2015, no. 3, pp. 50–64 (in Russ.). DOI: 10.18698/0236-3933-2015-3-50-64
- [15] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Effective coefficients of thermal conductivity of a composite with ellipsoidal inclusions. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Bauman, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2012, no. 3, pp. 76–85 (in Russ.).
- [16] Carslaw H.S., Jaeger J.C. Conduction of heat in solids. London, Oxford University Press, 1959.
- [17] Zarubin V.S., Savel'eva I.Yu. Effective thermal conductivity coefficients of the composites with spheroidal inclusions. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Bauman, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2013, no. 4, pp. 116–126 (in Russ.).
- [18] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Yu. Effective coefficients of thermal conductivity of a composite with prolate spheroid inclusions. *Teplovye protsessy v tekhnike* [Thermal Processes in Engineering], 2013, vol. 5, no. 6, pp. 276–282 (in Russ.).
- [19] Hill R. A self-consistent mechanics of composite materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 1965, vol. 13, no. 4, pp. 213–222.
- [20] Golovin N.N., Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Mixture models of composite mechanics. P. 1. Thermal mechanics and thermoelasticity of multicomponent mixture. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Bauman, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2009, no. 3, pp. 36–49 (in Russ.).

Zarubin V.S. — Dr. Sci. (Eng.), Professor of Applied Mathematics Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation).

Kuvyrkin G.N. — Dr. Sci. (Eng.), Professor, Head of Applied Mathematics Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation).

Savel'eva I.Yu. — Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Professor of Applied Mathematics Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Yu. Estimates of Dielectric Permeability of a Composite with Inclusions in the Form of Rotation Ellipsoids. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Bauman, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2016, no. 4, pp. 40–55. DOI: 10.18698/1812-3368-2016-4-40-55