УДК 524.852 DOI: 10.18698/1812-3368-2016-4-65-78

ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ В КОНФОРМНО-ПЛОСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

И.В. Фомин ingvor@inbox.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Описан метод точных решений уравнений Эйнштейна — Клейна — Гордона для инфляционной стадии эволюции Вселенной в конформно-плоских пространствах. Геометрия пространства–времени определена метрикой Фридмана — Робертсона — Уокера. Путем выбора конформного множителя задана модель космологической инфляции. Определены основные космологические параметры для рассматриваемой модели и плотности энергии реликтовых гравитационных волн

Ключевые слова

Инфляция, скалярное поле, точные решения, гравитационные волны

Поступила в редакцию 19.02.2016

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 16-02-00488А и № 16-08-00618А

Введение. Одной из важных задач космологии является исследование различных сценариев космологической инфляции. Соответствующие модели содержат скалярное поле (или несколько полей) в однородном и изотропном пространстве–времени и в настоящее время их используют не только для исследования процессов в ранней Вселенной, но и для описания современного ускоренного расширения Вселенной, обнаруженного в 1998 г. по наблюдению сверхновых типа Ia [1].

Космологическое ускорение указывает на то, что в настоящее время во Вселенной доминирует равномерно распределенная медленно изменяющаяся космическая жидкость с отрицательным давлением, называемая темной энергией [2].

Для спецификации различных типов космической жидкости обычно используют феноменологическое соотношение давления p и плотности энергии ε каждой компоненты жидкости $p = w\varepsilon$, где w — параметр состояния. Современные эксперименты свидетельствуют о том, что Вселенная является пространственно плоской и в настоящее время параметр состояния темной энергии равен $w = -1 \pm 0{,}1$ [3].

Стандартный способ получения зависящего от времени параметра состояния — включение скалярных полей в космологическую модель. При достаточно общих предположениях в рамках четырехмерной модели с одним скалярным полем могут быть реализованы модели с квинтэссенцией $-1 < w < -1/3$ и фантомные модели с $w < -1$ [2, 6].

Важным является установление происхождения изначальных неоднородностей, которые объясняют происхождение крупномасштабной структуры Вселенной. Инфляционная эпоха в ранней эволюции Вселенной объясняет происхождение первичных неоднородностей и предсказывает их спектр [5]. Таким образом, появляется возможность сопоставить предсказания теории с наблюдательными данными.

В соответствии с теорией инфляции первичные возмущения произошли из квантовых флуктуаций. Эти флуктуации имели существенные амплитуды в масштабах планковской длины и в течение инфляции они приблизились к масштабам галактик с практически теми же амплитудами. Следовательно, инфляция связывает крупномасштабную структуру Вселенной с микроскопическими масштабами. Результирующий спектр неоднородностей не зависит от частных сценариев инфляции и имеет универсальную форму, что приводит к однозначным предсказаниям для спектра анизотропии реликтового излучения.

Модели инфляции задают видом эффективного потенциала $V(\varphi)$ скалярного поля φ, которое скатывается к минимуму $V(\varphi)$. Конец инфляции вызывает нарушение условий медленного скатывания, поле осциллирует около минимума и начинается процесс постинфляционого нагрева. Этот процесс включает в себя несколько различных стадий, таких как распад инфлатонного конденсата, рождение частиц стандартной модели и их термализация [4, 5].

В настоящее время параметры Большого Взрыва неизвестны. Однако в рамках теории космологических возмущений можно рассчитать спектры начальных возмущений плотности вещества и первичных гравитационных волн в зависимости от значений космологических параметров.

В нулевом порядке Вселенную описывают единственной функцией времени — масштабным фактором $a(t)$. В первом порядке возмущения метрики представляют собой сумму трех независимых мод: скалярной; векторной; тензорной (реликтовые гравитационные волны). Каждая мода характеризуется спектральной функцией волнового числа k [7].

В ходе космологического расширения возмущения метрики эффективно рождались параметрическим образом из вакуумных флуктуаций под действием внешнего переменного поля. Начальное квантовое состояние каждой моды возмущений трансформируется как результат квантово-механической эволюции в состояние «замороженного» вакуума. Причем, имея простую связь с фоновой метрикой, гравитационные волны содержат прямую информацию об энергетическом масштабе начальной стадии эволюции Вселенной.

Данные о влиянии скалярных и тензорных мод можно получить из наблюдений анизотропии и поляризации реликтового излучения, которые возникли в результате совместного воздействия на распределение фотонов всех трех мод возмущений. Совместный анализ данных о распределении галактик и анизотропии реликтового излучения позволяет рассматривать начальные условия и эволюцию раздельно.

Уравнение динамики скалярного поля. Запишем метрику пространственно плоской Вселенной Фридмана — Робертсона — Уокера (ФРУ) в системе единиц $8\pi G = c = 1$:

$$ds^2 = a^2(t)[dt^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2].$$

Уравнения динамики скалярного поля для плоской Вселенной ФРУ имеют вид [4]

$$3H^2 = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi); \tag{1}$$

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + \frac{dV(\varphi)}{d\varphi} = 0; \tag{2}$$

$$\dot{H} = -\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2, \tag{3}$$

где $H = \dot{a}/a$ — параметр Хаббла; φ — скалярное поле; $V(\varphi)$ — потенциал; a — масштабный фактор. В терминах конформного времени η и с учетом

$$d\eta = \frac{dt}{a},\ \mathcal{H} = \frac{a'}{a},\ H = \frac{\mathcal{H}}{a},\ \dot{H} = \frac{\mathcal{H}'}{a^2} - \frac{\mathcal{H}^2}{a^2}$$

преобразуем уравнения (1)–(3) к виду

$$3\mathcal{H}^2 = \frac{1}{2}\varphi'^2 + a^2 V(\varphi); \tag{4}$$

$$\varphi'' + 2\mathcal{H}\varphi' + a^2\frac{dV(\varphi)}{d\varphi} = 0;$$

$$\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2 = -\frac{1}{2}\varphi'^2. \tag{5}$$

Здесь и далее знак «′» обозначает производную по конформному времени. Из уравнения (5) получим

$$\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2 = \frac{a''}{a} - 2\left(\frac{a'}{a}\right)^2;$$

$$\frac{1}{2}\varphi'^2 = -\frac{a''}{a} + 2\left(\frac{a'}{a}\right)^2. \tag{6}$$

Подставим (6) в уравнение (4) и запишем

$$\left(\frac{a'}{a}\right)^2 = -\frac{a''}{a} + a^2 V(\varphi);$$

$$V(\varphi(\eta)) = \frac{a''}{a^3} + \frac{a'^2}{a^4}. \tag{7}$$

Класс метрик ФРУ принадлежит классу конформно-плоских пространств, поэтому рассмотрим пространства с линейным элементом

$$ds^2 = A(x^3, x^4)[(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 - (dx^4)^2].$$

В силу того, что космологическое скалярное поле зависит только от времени и не зависит от пространственных координат $\varphi = \varphi(\eta)$, имеем

$$ds^2 = A(\eta)[d\eta^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2], \tag{8}$$

т. е. конформный множитель $A(\eta)$ записывается через масштабный фактор: $A(\eta) = -a^2(\eta)$.

Подставив в уравнения (6) и (7) соотношение $a(\eta) = \sqrt{-A(\eta)}$, получим выражения для потенциала и скалярного поля через конформный множитель

$$V(\varphi(\eta)) = -\frac{A''}{2A^2}; \tag{9}$$

$$(\varphi')^2 = -\frac{A''}{A} + \frac{3}{2}\left(\frac{A'}{A}\right)^2. \tag{10}$$

Для удобства вычислений рассмотрим метрику (8) с сигнатурой $(-,+,+,+)$, что означает замену множителя $A(\eta)$ множителем $-A(\eta)$. В таком случае $A(\eta) = a^2(\eta)$, метрику

$$ds^2 = A(\eta)[-d\eta^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2]$$

и выражения (9), (10) записываем в следующем виде:

$$V(\varphi(\eta)) = \frac{A''}{2A^2};$$

$$(\varphi')^2 = -\frac{A''}{A} + \frac{3}{2}\left(\frac{A'}{A}\right)^2,$$

что позволяет получить точные решения уравнений динамики скалярного поля, задавая множитель $A(\eta)$.

Космологическая инфляция. Рассмотрим конформный множитель вида $A = A_0 \exp(\beta(\eta))$, где $\beta(\eta)$ — произвольная функция конформного времени. В таком случае

$$V(\varphi) = -\frac{1}{2}[\beta''(\eta) + \beta'^2(\eta)]\exp(-\beta(\eta)); \tag{11}$$

$$(\varphi')^2 = [-\beta''^2(\eta) + \frac{1}{2}\beta'^2(\eta)]. \tag{12}$$

Выберем функцию конформного времени $\beta(\eta) = 2\mathcal{H}_0\eta$: $A = A_0 \exp(2\mathcal{H}_0\eta)$. Решения (11), (12) принимают вид

$$V(\varphi(\eta)) = \frac{2\mathcal{H}_0^2}{A_0}\exp\left(\mp\sqrt{2}A_0\varphi\right); \quad \varphi = \pm\sqrt{2}\mathcal{H}_0\eta.$$

После решения дифференциального уравнения (5) получим параметр Хаббла $\mathcal{H} = a'(\eta)/a(\eta)$ и масштабный фактор $a(\eta)$:

$$\mathcal{H}(\eta) = \mathcal{H}_0\left(1 - \operatorname{tg}\left[\mathcal{H}_0(\eta - \eta_0)\right]\right);$$

$$a(\eta) = \frac{a_0\exp[\mathcal{H}_0(\eta - \eta_0)]}{\operatorname{ch}[\mathcal{H}_0(\eta - \eta_0)]},$$

где η_0, $\mathcal{H}_0$, a_0 — конформное время, масштабный фактор и параметр Хаббла в начале инфляционной стадии.

Используя соотношения $dt = ad\eta$, находим параметр Хаббла $H(t) = \dot{a}/a$ и масштабный фактор $a(t)$:

$$H(t) = H_0\left(1 - \operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}(H_0^2(t - t_0^2)\right]\right);$$

$$a(t) = a_0\left(\exp[H_0^2(t - t_0)^2] + 1\right),$$

которые определяют эволюцию Вселенной в физическом времени.

Космологические возмущения. В процессе инфляции квантовые флуктуации скалярного поля будут создавать возмущения метрики. В линейном приближении запишем метрику с учетом скалярных и тензорных возмущений и возмущения поля в терминах конформного времени [4]:

$$ds^2 = a^2(\eta)[-(1+2A)d\eta^2 - 2B_{,i}dx^i d\eta + ((1+2D_{ij})\psi_{ij} + 2E_{|ij} + 2h_{ij})dx^i dx^j];$$
$$\varphi = \varphi(\eta) + \delta\varphi(\eta, x^i),$$

где h_{ij} — тензор второго ранга, представляющий гравитационные волны. Этот тензор может быть разложен в два состояния поляризации

$$h_{ij}(\eta, x) = h_+(\eta, x)e_{ij}^+ + h_\times(\eta, x)e_{ij}^\times.$$

Здесь e_{ij}^+, $e_{ij}^\times$ — два фиксированных тензора поляризации.

В контексте динамики скалярного поля квантовая теория космологических возмущений приводит к следующему действию для гравитационных волн [4, 8]:

$$S = \frac{1}{2}\int d^4x\frac{a^2}{2}\left[h'^2 - (\nabla h)^2\right],$$

вариация которого дает уравнения

$$h_k'' + 2\frac{a'}{a}h_k' + k^2h_k = 0, \tag{13}$$

где k — волновое число.

Введем величину, в которой действие (13) имеет канонический вид $\mu_k = ah_k$. Тогда уравнения движения для величины μ_k записываем как

$$\mu_k'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right)\mu_k = 0.$$

Рассмотрим эволюцию возмущений скалярного поля на стадии ускоренного расширения с масштабным фактором [4, 12]

$$a(\eta) = -\frac{1}{H\eta(1-\epsilon)}, \tag{14}$$

где $\epsilon = -\dot{H}/H^2$.

Перепишем уравнение (14)

$$\mu_k'' + \left(k^2 - \frac{1}{\eta^2}\left(\nu_T - \frac{1}{4}\right)\right)\mu_k = 0;$$

$$\nu_T = \sqrt{\frac{9}{4} + 3\epsilon} \approx \frac{3}{2}\left(1 + \frac{2}{3}\epsilon\right) = \frac{3}{2} + \epsilon.$$

На масштабах, превышающих горизонт, имеем

$$|\mu_k| = \frac{aH}{\sqrt{2k^3}}\left(\frac{k}{aH}\right)^{3/2-\nu_T}.$$

В этом случае спектр мощности составит

$$P_g(k) = \frac{k^3}{2\pi^2}\sum_{\lambda}|h(k,\lambda)|^2 = \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2\left(\frac{k}{aH}\right)^{n_T} = A_T^2\left(\frac{k}{aH}\right)^{n_T}.$$

где n_T — спектральный индекс тензорных возмущений,

$$n_T = \frac{d\ln P_T}{d\ln k} = 3 - 2\nu_T = -2\epsilon.$$

Тензорные возмущения зависят только от значения параметра Хаббла в процессе инфляции, что дает связь с потенциалом инфлатона.

Финальным шагом в квантовой теории космологических возмущений является определение начальных условий. Поскольку в инфляционной космологии все ранее существовавшие классические возмущения подвергнуты смещению ввиду ускоренного расширения пространства, можно принять, что поле φ начинает свою эволюцию в начале инфляции t_0.

Незамедлительно возникают два вопроса: что представляет собой начальное время t_0 и какое из многих возможных состояний вакуума должно быть выбрано? Обычно допускают, что выбор начального времени t_0 не важен до тех пор, пока возмущения не пересекут радиуса Хаббла, так как возмущения осциллируют только в масштабах, меньших хаббловского. Состояние обычно выбирают как вакуум Банча — Дэвиса, поскольку в этом состоянии при времени t_0 отсутствуют частицы [4, 9].

В линеаризованной теории в некоторый начальный момент времени присутствуют возмущения. До тех пор, пока длина волны меньше радиуса Хаббла это состояние подвержено квантовым возмущениям вакуума. Ускоренное расширение фона смещает волновой вектор возмущений за пределы радиуса Хаббла.

Гравитационные волны существуют в качестве квантовых флуктуаций вакуума в начальное время во всех масштабах и осциллируют до пересечения радиуса Хаббла. В этой точке квантовое состояние гравитационных волн начинает изменяться так, чтобы выполнялось условие $\mu_k(\eta) \sim a(\eta)$, которое соответствует постоянной амплитуде h_k. Замерзание вакуумного состояния приводит к появлению классических свойств.

Опираясь на результаты, полученные в работах [10–12], запишем точные значения космологических параметров на пересечении радиуса Хаббла $(k = aH = \mathcal{H})$ через конформный множитель:

– спектры мощности скалярных и тензорных возмущений

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = -\frac{\mathcal{H}^4 a^2}{8(\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2)} = \frac{A'^4}{32\pi^2 A^3 (3A'^2 - 2A''A)};$$

$$\mathcal{P}_{\mathcal{G}}(k) = \frac{\mathcal{H}^2}{2\pi^2 a^2} = \frac{A'^2}{8\pi^2 A^3};$$

– спектральные индексы скалярных и тензорных возмущений

$$n_{\mathcal{S}}(k) - 1 = \frac{a^2}{\mathcal{H}'}\left[4\left(\frac{\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2}{a^2}\right) - \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2}\left(\frac{\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2}{a^2}\right)\right] =$$
$$= \frac{9A'^4 + 8A''^2 A^2 - 14A''A'^2 A - 2A'''A'A^2}{(2A''A - 3A'^2)(A''A - A'^2)};$$

$$n_{\mathcal{G}}(k) = \frac{2(\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2)}{\mathcal{H}'} = \frac{2A''A - 3A'^2}{A''A - A'^2};$$

– тензорно-скалярное отношение

$$r = -4\left(\frac{\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2}{\mathcal{H}^2}\right) = \frac{12A'^2 - 8A''A}{A'^2}.$$

Конформное время при расчете космологических параметров является временем пересечения радиуса Хаббла. Параметры космологических возмущений также запишем через физическое время:

– спектр мощности $\mathcal{P}_{\mathcal{S}}(k)$ скалярных возмущений

$$\mathcal{P}_{\mathcal{S}}(k) = \left.\frac{H^4}{8M_P^2 \dot{H}}\right|_{k=aH} = \frac{(1 - \mathrm{tg}[H_0^2(t_1 - t_0)]^2)^4 H_0^5 (t_1 - t_0)}{8M_P^2 (1 - \mathrm{tg}^2[H_0^2(t_1 - t_0)^2])\mathrm{ch}^2(H_0^2(t_1 - t_0)])^2};$$

– спектр мощности $\mathcal{P}_{\mathcal{G}}(k)$ и спектральный индекс $n_{\mathcal{G}}(k)$ тензорных возмущений

$$\mathcal{P}_{\mathcal{G}}(k)=\left.\frac{H^2}{2\pi M_P^2}\right|_{k=aH}=\frac{H_0^2\left(1-\mathrm{tg}\left[(H_0^2(t_1-t_0)^2)\right]\right)^2}{2\pi M_P^2};$$

$$n_{\mathcal{G}}(k)=\left.\frac{2\dot{H}}{\dot{H}+H^2}\right|_{k=aH}=\frac{1}{\dfrac{(1-\mathrm{tg}[H_0^2(t_1-t_0)^2])^2}{4(1-\mathrm{tg}^2[H_0^2(t_1-t_0)^2])H_0^2(t_1-t_0)}-\dfrac{1}{2}};$$

– отношение квадратов амплитуд тензорной и скалярной мод возмущений

$$r=\left.\frac{\mathcal{P}_{\mathcal{G}}(k)}{\mathcal{P}_{\mathcal{S}}(k)}\right|_{k=aH}=\frac{4}{\pi}\frac{(1-\mathrm{tg}^2[H_0^2(t_1-t_0)^2])^2\,\mathrm{ch}^2(H_0^2(t_1-t_0)]^2)}{(1-\mathrm{tg}[H_0^2(t_1-t_0)]^2)^4\,H_0^3(t_1-t_0)}.$$

Здесь t_1 — время пересечения радиуса Хаббла. Рассчитаем также параметр $w(t)$ уравнения состояния скалярного поля $p=w(t)\varepsilon$, где $p=(1/2)\dot{\varphi}^2-V(\varphi)$ — давление; $\varepsilon=(1/2)\dot{\varphi}^2+V(\varphi)$ — плотность энергии.

Используем следствие системы уравнений (1)–(3): $V=3H^2+\dot{H}$. В результате получим

$$w(t)=\frac{\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2-V(\varphi)}{\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2+V(\varphi)}=-1-\frac{2}{3}\frac{\dot{H}}{H^2}=-1+\frac{4}{3}\frac{(1-\mathrm{tg}^2[H_0^2(t-t_0)^2])H_0^2(t-t_0)}{(1-\mathrm{tg}[H_0^2(t-t_0)^2])^2}. \qquad (14)$$

Параметр замедления, характеризующий темп расширения Вселенной, равен

$$q(t)=-\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)}\frac{1}{H^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{H}\right)-1=-1+\frac{2(1-\mathrm{tg}^2[H_0^2(t-t_0)^2])H_0^2(t-t_0)}{(1-\mathrm{tg}[H_0^2(t-t_0)^2])^2}. \qquad (15)$$

Из соотношений (14), (15) следует, что начало инфляции (при $t=t_0$) для рассматриваемой космологической модели соответствует расширению де Ситтера.

Постинфляционная эволюция космологических возмущений. Рассмотрим последовательность событий при переходе от инфляционной стадии к стадии преобладания излучения и вещества.

Инфляционная стадия завершается распадом скалярного поля и образованием частиц с последующим нуклеосинтезом и дальнейшей эволюцией согласно стандартному сценарию. При этом космологические возмущения различных частот в течение нескольких *e*-фолдов (возрастаний масштабного фактора в *e* раз) после выхода за горизонт становятся классическими величинами. Это время принято отмечать как t_*.

При уходе за горизонт космологические возмущения остаются «вмороженными» в гравитационный фон и не изменяют амплитуды в сопутствующей системе координат. При вхождении под горизонт (в эпоху преобладания излучения) амплитуда возмущений эволюционирует известным образом.

Полагается, что теория космологических возмущений применима в начальную эпоху, которая начинается до вхождения интересующих нас космологических масштабов под горизонт. Начальная эпоха начинается гораздо позднее нуклеосинтеза, поэтому материальные составляющие Вселенной, за исключением небарионной темной материи, известны.

Теоретически установлено, каким способом эволюционируют возмущения всех составляющих Вселенной после начальной эпохи, если известна плотность энергии каждой составляющей в это время.

Начальный спектр возмущений можно получить, используя функцию переноса $T_g(t,k)$ из вакуумных флуктуаций в момент времени t_*. Причем возмущение любой составляющей вычисляют через возмущение кривизны $\mathcal{R}_k$ с помощью функции переноса $g_k(t)=T_g(t,k)\mathcal{R}_k$, где $\mathcal{R}_k(t)$ — кривизна, определяемая в момент времени t_*,

$$\mathcal{R}_k=-\left[\frac{H}{\dot{\varphi}}\delta\varphi_k\right]_{t=t_*}.$$

Поскольку точные выражения для космологических параметров были получены при выходе за горизонт, для сопоставления с наблюдательными данными необходимо выполнить перерасчет космологических параметров на современную эпоху. Для этого рассмотрим постинфляционную эволюцию космологических возмущений и найдем поправки на космологические параметры.

В течение стадии преобладания излучения $a\sim t^n$ при $n=1/2$ и стадии преобладания вещества $a\sim t^n$ при $n=2/3$ гравитационные возмущения (гравитационный потенциал Φ_k) преобразуются следующим образом [14]:

– в случае преобладания излучения $\Phi_k=(2/3)\mathcal{R}_k$;

– в случае преобладания вещества $\Phi_k=(3/2)\mathcal{R}_k$.

С учетом этих соотношений заключаем, что эволюция возмущений после вхождения под горизонт сводится просто к изменению их амплитуды. Таким образом, спектр мощности гравитационных возмущений на стадии преобладания материи определяем через спектр возмущений кривизны

$$\mathcal{P}_\Phi(MD)=\frac{9}{25}\mathcal{P}_\mathcal{R}.$$

В свою очередь, это позволяет установить контраст плотности и спектр мощности скалярных возмущений

$$\delta_k=\frac{2}{3}\left(\frac{k}{aH}\right)^2 T_g(t,k)\Phi_k;$$

$$\mathcal{P}_{\delta}(k,t)=\frac{4}{25}\left(\frac{k}{aH}\right)^4 T_g(t,k)^2\mathcal{P}_{\mathcal{R}},$$

которые можно сопоставить с наблюдательными данными.

Для космологических возмущений высоких частот функцию переноса рассчитываем как [14]

$$T_g(t,k)=\frac{\ln[12k(1+0{,}947\beta)]}{[20{,}35k(1+1{,}377\beta)]^2},$$

где $\beta=\rho_B/\rho_M=\Omega_B/\Omega_M$ — отношение плотности барионного вещества к плотности всей материи.

Спектральная плотность энергии гравитационных волн составляет [15]

$$\Omega_{GW}(k)=\frac{k^2}{H_m^2}T_g(t,k)^2\mathcal{P}_{\mathcal{G}}(k)\Big|_{k=aH},$$

где $H_m=H(t=t_m)$ — параметр Хаббла в эпоху наблюдения;

$$\Omega_{GW}(k)=\left[\left(1-\mathrm{tg}\left[\frac{1}{2}(H_0^2(t_1-t_0)^2)\right]\right)\frac{H_0^2\ln[12k(1+0{,}947\beta)]}{2\pi M_P^2[20{,}35k(1+1{,}377\beta)]^2}\frac{k}{H_m}\right]^2.$$

С учетом соотношения $k=2\pi f a_m$ запишем

$$\Omega_{GW}(f)=\left[\left(1-\mathrm{tg}\left[\frac{1}{2}(H_0^2(t_1-t_0)^2)\right]\right)\frac{H_0^2\ln[24\pi f(1+0{,}947\beta)]}{4\pi^2 M_P^2[20{,}35f(1+1{,}377\beta)]^2}\frac{f}{H_m a_m}\right]^2.$$

Здесь f — частота реликтовых гравитационных волн; a_m — масштабный фактор в эпоху наблюдения.

Ограничения на значения плотности энергии гравитационных волн. Значения частоты и плотности энергии реликтовых гравитационных волн ограничиваем условиями [16]:

– значение плотности энергии реликтовых гравитационных волн, которые могут повлиять на темп первичного нуклеосинтеза, не должно превышать $\int_{f_0}^{\infty}\Omega_{GW}d\ln f<1{,}1\cdot10^{-5}$, где $f_0\approx10^{-9}$ Гц;

– значения температуры скалярного поля на стадии инфляции T_*, ГэВ, и частоты f, Гц, гравитационных волн на пересечении горизонта событий равны

$$T_*=5{,}85\cdot10^6\left(\frac{f}{\text{Гц}}\right)\left(\frac{g_*}{106{,}75}\right)^{-1/6};$$

$$f=1{,}71\cdot10^{-7}\left(\frac{T_*}{\text{ГэВ}}\right)\left(\frac{g_*}{106{,}75}\right)^{1/6},$$

где g_* — эффективное число степеней свободы (в стандартной модели $g_*=106{,}75$).

Ограничения на значения параметров космологических моделей также рассмотрены в работе [17].

Заключение. В настоящей работе получены точные решения для космологической модели с заданным конформным множителем, значения космологических параметров и определена плотность энергии гравитационных волн для рассматриваемой модели.

Метрические теории гравитации предполагают существование флуктуаций пространства–времени, т. е. гравитационных волн. В связи с этим гравитационно-волновые исследования позволяют проверить соответствие различных моделей космологической инфляции наблюдательным данным. Одним из перспективных методов регистрации гравитационных волн является использование явления низкочастотного оптического резонанса, наличие которого в интерферометрах Фабри — Перо рассмотрено в работах [18–20].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Measurements* of Omega and Lambda from 42 high-redshift supernovae / S.J. Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber et al. // Astrophys. J. 1999. Vol. 517. P. 565–586.

2. *Copeland M. Sami, Tsujikawa Sh.* Dynamics of dark energy // Int. J. Mod. Phys. 2006. D15. P. 1753–1936.

3. *Planck* Collaboration: Ade P. et al., Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters // Astronomy & Astrophysics manuscript No. planck parameters. 2015.

4. *Liddle A.R., Lyth D.H.* The cold dark matter density perturbation // Phys. Rep. 1993. Vol. 231. Iss. 1–2. P. 1–105. DOI: 10.1016/0370-1573(93)90114-S

5. *Baumann D., Peiris H.* Cosmological inflation: Theory and observations // Adv. Sci. Lett. 2009. Vol. 2. P.105–120. DOI: 10.1166/asl.2009.1019

6. *Vikman A.* Can dark energy evolve to the Phantom? // Phys. Rev. D. 2005. Vol. 71. P. 023515–023530. DOI: 10.1103/PhysRevD.71.023515

7. *Лукаш В.Н.* О соотношении тензорной и скалярной мод возмущений в космологии Фридмана // УФН. 2006. Т. 176. № 1. С. 113–116.

8. *Boyle L.A., Steinhardt P.J.* Probing the early Universe with inflationary gravitational waves // Phys. Rev. D. 2008. Vol. 77. P. 063504–063516. DOI: 10.1103/PhysRevD.77.063504

9. *Martin J., Vennin V., Peter P.* Cosmological inflation and the quantum measurement problem // Phys. Rev. D. 2012. Vol. 86. P. 103524–103566. DOI: 10.1103/PhysRevD.86.103524

10. *Chervon S.V., Novello M., Triay R.* Exact cosmology and specification of an inflationary scenario // Gravitation and Cosmology. 2005. Vol. 11. No. 4 (44) P. 329–332.

11. *Chervon S.V., Fomin I.V.* About the calculation of cosmological parameters in exact models of inflation // Gravitation and Cosmology. 2007. Vol. 13. No. 2(50). P. 163–167. DOI: 10.1134/S0202289308020060

12. *Червон С.В., Фомин И.В.* Квантовое рождение начальных космологических возмущений // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2008. № 4. С. 97–107.

13. *Straumann N.* From primordial quantum fluctuations to the anisotropies of the cosmic microwave background radiation // Ann. Phys. (Leipzig) 15. 2006. No. 10–11. P. 701–845.

14. *Weinberg S.* Cosmological fluctuations of small wavelength // The Astrophisical Journal. 2002. Vol. 581. P. 810–816.

15. *Namikawa T., Yamauchi D., Taruya A.* Future detectability of gravitational-wave induced lensing from high-sensitivity CMB experiments // Phys. Rev. D. 2015. Vol. 91. P. 043531–043540.

16. *Maggiore M.* Gravitational wave experiments and early Universe cosmology // Phys. Rep. 2000. Vol. 331. P. 283–367.

17. *Fomin I.V.* Gravitational waves perturbations of the early Universe // Proceedings of XV International Scientific Meeting "Physical Interpretations of Relativity Theory". Moscow. 2015. P. 144–156.

18. *Gladyshev V.O., Morozov A.N.* Low-frequency optical resonance in multi-beams Fabri — Perot resonator and problem of gravitational waves detection // Proceedings of XIII International Scientific Meeting "Physical Interpretations of Relativity Theory". Moscow. 2007. P. 6–10.

19. *Морозов А.Н.* Применение интерферометра Фабри — Перо для регистрации высокочастотных флуктуаций метрики пространства–времени // Инженерный журнал: наука и инновации. 2012. Вып. 5(5). DOI: 10.18698/2308-6033-2012-5-203
URL: http://engjournal.ru/catalog/fundamentals/physics/203.html

20. *Есаков А.А., Морозов А.Н., Табалин С.Е., Фомин И.В.* Применение низкочастотного оптического резонанса для регистрации высокочастотных гравитационных волн // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2015. № 1. С. 26–35.
DOI: 10.18698/1812-3368-2015-1-26-35

Фомин Игорь Владимирович — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Фомин И.В. Гравитационные волны в конформно-плоских пространствах // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2016. № 4. С. 65–78.
DOI: 10.18698/1812-3368-2016-4-65-78

GRAVITATIONAL WAVES IN CONFORMAL FLAT SPACES

I.V. Fomin ingvor@inbox.ru

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

The purpose of this work is to describe the exact solutions of Einstein — Klein — Gordon equations for the inflationary model of the Universe in conformal flat spaces. We determined the geometry of space–time by means of Friedman — Robertson — Walker metric. The conformal factor defines the model of cosmological inflation. Moreover, we found the key cosmological parameters in the considered model and density of energy of the relic gravitational waves

Keywords

Inflation, scalar field, exact solutions, gravitational waves

REFERENCES

[1] Perlmutter S.J., Aldering G., Goldhaber G. et al. Measurements of Omega and Lambda from 42 high-redshift supernovae. *Astrophys. J.*, 1999, vol. 517, pp. 565–586.

[2] Copeland M. Sami, Tsujikawa Sh. Dynamics of dark energy. *Int. J. Mod. Phys.*, 2006, D15, pp. 1753–1936.

[3] Planck Collaboration: Ade P. et al., Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics manuscript No. planck parameters*. 2015

[4] Liddle A.R., Lyth D.H. The cold dark matter density perturbation. *Phys. Rep.*, 1993, vol. 231, iss. 1–2, pp. 1–105. DOI: 10.1016/0370-1573(93)90114-S

[5] Baumann D., Peiris H. Cosmological inflation: Theory and observations. *Adv. Sci. Lett.*, 2009, vol. 2, pp. 105–120. DOI: 10.1166/asl.2009.1019

[6] Vikman A. Can dark energy evolve to the Phantom? *Phys. Rev. D,* 2005, vol. 71, pp. 023515–023530. DOI: 10.1103/PhysRevD.71.023515

[7] Lukash B.H. About a ratio of tensor and scalar fashions of indignations in Friedman's cosmology. *Physics-Uspekhi*, 2006, vol. 176, no. 1, pp. 113–116.

[8] Boyle L.A., Steinhardt P.J. Probing the early Universe with inflationary gravitational waves. *Phys. Rev. D.*, 2008, vol. 77, pp. 063504–063516.

[9] Martin J., Vennin V., Peter P. Cosmological inflation and the quantum measurement problem. *Phys. Rev. D*, 2012. vol. 86, pp. 103524–103566.

[10] Chervon S.V., Novello M., Triay R. Exact cosmology and specification of an inflationary scenario. *Gravitation and Cosmology*, 2005, vol. 11, no. 4 (44), pp. 329–332.

[11] Chervon S.V., Fomin I.V. About the calculation of cosmological parameters in exact models of inflation. *Gravitation and Cosmology*, 2007, vol. 13, no. 2(50), pp. 163–167. DOI: 10.1134/S0202289308020060

[12] Chervon S.V., Fomin I.V. Quantum birth of initial cosmological perturbations. *University proceedings. Volga Region. Physical and mathematical sciences*, 2008, no. 4, pp. 97–107 (in Russ.).

[13] Straumann N. From primordial quantum fluctuations to the anisotropies of the cosmic microwave background radiation. *Ann. Phys.* (Leipzig) 15, 2006, no. 10–11, pp. 701–845.

[14] Weinberg S. Cosmological fluctuations of small wavelength. *The Astrophisical Journal*, 2002, vol. 581, pp. 810–816.

[15] Namikawa T., Yamauchi D., Taruya A. Future detectability of gravitational-wave induced lensing from high-sensitivity CMB experiments. *Phys. Rev. D*. 2015, vol. 91, pp. 043531–043540.

[16] Maggiore M. Gravitational wave experiments and early universe cosmology. *Phys. Rep.*, 2000, vol. 331, pp. 283–367.

[17] Fomin I.V. Gravitational waves perturbations of the early Universe. *Proc. of XV International Scientific Meeting "Physical Interpretations of Relativity Theory."* Moscow, 2015, pp. 144–156.

[18] Gladyshev V.O., Morozov A.N. Low-frequency optical resonance in multi-beams Fabri — Perot resonator and problem of gravitational waves detection. *Proc. of XIII International Scientific Meeting "Physical Interpretations of Relativity Theory."* Moscow, 2007, pp. 6–10.

[19] Morozov A.N. Fabry — Perot interferometer application for recording of high-frequency fluctuations of space–time metrics. *Jelektr. nauchno-tekh. izd. "Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovacii"* [El. Sci.-Tech. Publ. Eng. J.: Science and Innovation], 2013, iss. 9.
DOI: 10.18698/2308-6033-2012-5-203
Available at: http://engjournal.ru/eng/catalog/fundamentals/physics/203.html

[20] Esakov A.A., Morozov A.N., Tabalin S.E., Fomin I.V. Application of low-frequency optical resonance for detection of high-frequency gravitational waves. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2015, no. 1, pp. 26–35 (in Russ.). DOI: 10.18698/1812-3368-2015-1-26-35

Fomin I.V. — Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Professor of Physics Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation).

Please cite this article in English as:
Fomin I.V. Gravitational Waves in Conformal Flat Spaces. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2016, no. 4, pp. 65–78. DOI: 10.18698/1812-3368-2016-4-65-78