

## АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ КРИВИЗНЫ И УГЛОВОГО ОТКЛОНЕНИЯ СВЕТОВОГО ЛУЧА В АТМОСФЕРЕ ЗЕМЛИ С УЧЕТОМ ЕЕ ВРАЩЕНИЯ

Д.Д. Базлева  
В.О. Гладышев  
А.А. Терешин

eleriniarina@gmail.com  
vgladyshev@mail.ru  
arikalika@hotmail.com

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

---

### Аннотация

Выполнены аналитические расчеты влияния градиента скорости движения атмосферы Земли на кривизну траектории и угловое отклонение лазерного луча применительно к задаче определения координат летательного аппарата. Показано, что эффекты электродинамики движущихся сред могут оказывать сильное влияние на глобальные космические навигационные системы

### Ключевые слова

*Электродинамика движущихся сред, атмосфера, кривизна траектории, угловое отклонение луча*

---

Поступила в редакцию 10.02.2016  
© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016

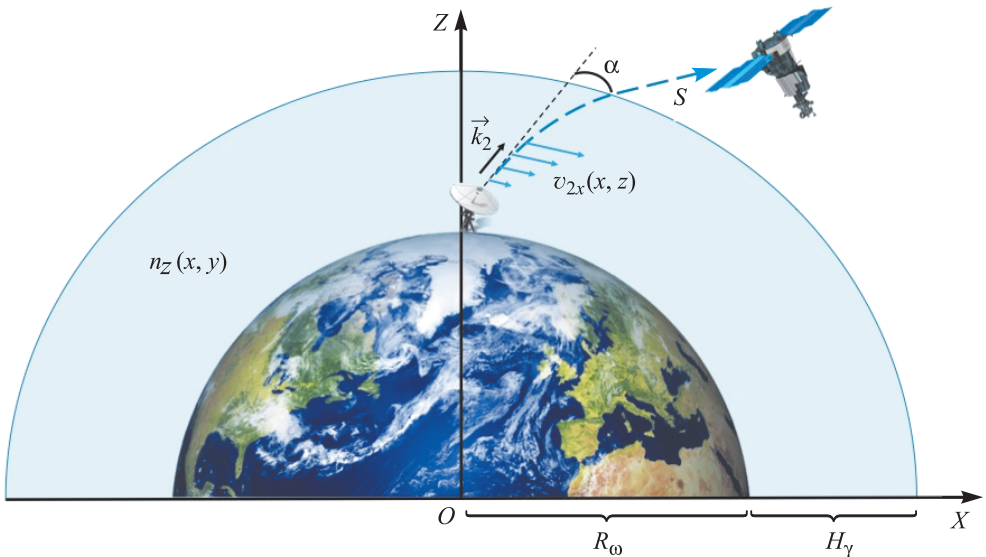
**Введение.** Искривление траектории распространения электромагнитной волны гравитационными полями массивных космических объектов изучено достаточно хорошо, так как относится к одному из трех предсказаний общей теории относительности. В последнее время эта тема связана с широко обсуждаемой гипотезой существования темной материи и энергии [1]. Кроме того, движущаяся межзвездная и межгалактическая среда может искривлять траектории световых лучей, что является источником дополнительных поправок при определении радиуса орбиты движения звезды.

В пределах Солнечной системы искривление световых лучей может быть вызвано гравитационным отклонением света вблизи Солнца, а также рефракцией в атмосфере Земли, что учитывается при описании процесса распространения электромагнитного излучения от земного наблюдателя к искусственному спутнику Земли (ИСЗ). Движение атмосферы Земли может влиять на точность координатно-временного обеспечения глобальных спутниковых систем навигации [2, 3]. Численные расчеты позволяют получить оценку сдвига фаз вследствие эффекта Физо и углового отклонения лазерного луча, возникающего при нарушении закона Снеллиуса в движущейся атмосфере Земли. Значения указанных величин оказались сравнимы с требуемой точностью спутниковых систем позиционирования нового поколения.

Для более точного расчета было получено релятивистское выражение для кривизны траектории и углового отклонения светового луча в среде с градиентом скорости [4]. На основе этого выражения выполнены расчеты влияния ско-

рости движения среды на угловое отклонение лазерного луча в движущейся атмосфере Земли применительно к задаче определения координат летательного аппарата (ЛА). Эти результаты и представлены в настоящей работе.

**Кривизна траектории волнового вектора электромагнитной волны.** Схема распространения электромагнитного излучения в движущейся среде от земного наблюдателя к орбитальному ЛА, входящему в состав глобальной космической навигационной системы (ГКНС), приведена на рис. 1. Описание процесса распространения электромагнитного сигнала в ГКНС имеет фундаментальное значение, поскольку система должна обеспечивать высокоточные динамические небесную и земную системы координат, а также эталонные базы частот, средств синхронизации и единой системы Всемирного времени [5, 6].



**Рис. 1.** Схема распространения электромагнитного излучения в движущейся среде от земного наблюдателя к орбитальному ЛА (показана траектория волнового вектора  $\vec{k}_2$  электромагнитного излучения в атмосфере Земли с градиентом скорости;  $S$  — длина трассы)

Основным выражением для решения задачи является выражение для расчета кривизны в среде с градиентом скорости [4]

$$k = \frac{k_{2x}k_{2z}}{(k_{2x}^2 + k_{2z}^2)^{3/2}} \frac{\partial k_{2z}}{\partial z}, \quad (1)$$

где  $k_{2x}, k_{2z}$  — тангенциальная и нормальная проекции волнового вектора в среде;  $\partial k_{2z} / \partial z$  — производная нормальной проекции волнового вектора. Полагая, что величина  $k$  положительно определена. При отсутствии нормальной скорости движения границ раздела слоев ( $\beta = 0; \gamma_2^{-2} = 1 - \beta^2 = 1$ ) можно записать

$$k_{2x} = \frac{\omega_0}{c} \sin \vartheta_0; \quad k_{2z} = -\frac{\omega_0}{c} \eta_2 \left( \kappa_2 \beta_{2z} \xi_2 - \sqrt{Q_2} \right);$$

$$\frac{\partial k_{2z}}{\partial z} = \frac{\omega_0}{c} \kappa_2 \eta_2 \left( -\beta_{2z} \xi_2 \frac{d}{dz} (\beta_{2x}^2 + \beta_{2z}^2) - \xi_2 \frac{\partial \beta_{2z}}{\partial z} + \beta_{2z} \frac{\partial \beta_{2x}}{\partial z} \sin \vartheta_0 - \right.$$

$$\left. - \kappa_2 \beta_{2z}^2 \xi_2 \eta_2 \left( \beta_{2z} \frac{d}{dz} (\beta_{2x}^2 + \beta_{2z}^2) + \frac{\partial \beta_{2z}}{\partial z} \right) + \right.$$

$$\left. + 2 \beta_{2z} \eta_2 \sqrt{Q_2} \left( \beta_{2z} \frac{d}{dz} (\beta_{2x}^2 + \beta_{2z}^2) + 2 \frac{\partial \beta_{2z}}{\partial z} \right) \right).$$

Здесь  $Q_2 = \eta_2^{-1} \cos^2 \vartheta_0 + \kappa_2 \xi_2^2$ ;  $\xi_2 = 1 - \beta_{2x} \sin \vartheta_0$ ;  $\eta_2 = 1 / (1 - \kappa_2 \beta_{2z}^2)$ ;  $\kappa_2 = n_2^2 - 1$ ;  $\beta_{2x} = v_{2x} / c$ ;  $n_2$  — показатель преломления среды;  $\vartheta_0$  — угол падения луча на границу раздела двух слоев среды, на которой наблюдается тангенциальный разрыв скорости;  $v_{2x}$  — проекция скорости среды на ось  $OX$  (см. рис. 1) вдоль траектории волнового вектора электромагнитной волны.

Предположим, что масштаб неоднородности скорости (толщина слоя среды), на котором изменение скорости среды становится заметным, много больше длины волны излучения. Далее примем, что при сдвиговом течении существует только тангенциальная проекция  $\bar{k}_2$ . Получим  $\partial k_{2z} / \partial z$  в нерелятивистском пределе:

$$\frac{\partial k_{2z}}{\partial x} = -\frac{\omega_0}{c} \frac{(n_2^2 - 1)(1 - \beta_{2x} \sin \vartheta_0) \sin \vartheta_0}{\sqrt{\cos^2 \vartheta_0 + (n_2^2 - 1)(1 - \beta_{2x} \sin \vartheta_0)^2}} \frac{\partial \beta_{2z}}{\partial z}.$$

Тогда выражение для кривизны будет иметь вид

$$k = \frac{(n_2^2 - 1) \cos \vartheta_0 \sin \vartheta_0}{(n_2^2 + \cos 2\vartheta_0)^{3/2}} \frac{\partial \beta_{2x}}{\partial z}.$$

Для расчета искривления траектории распространения лазерного луча в атмосфере Земли воспользуемся выражением для профиля скорости движения атмосферы в рамках модели Буфона, а также эмпирической зависимостью показателя преломления атмосферы от координаты  $z$  [7, 8]:

$$v_{2x} = v_g + v_T e^{-\left(\frac{z - R_{\oplus} + H_T}{L_T}\right)^2}; \quad (2)$$

$$n_2 = 1 + n_0 e^{-C(z - R_{\oplus})}, \quad (3)$$

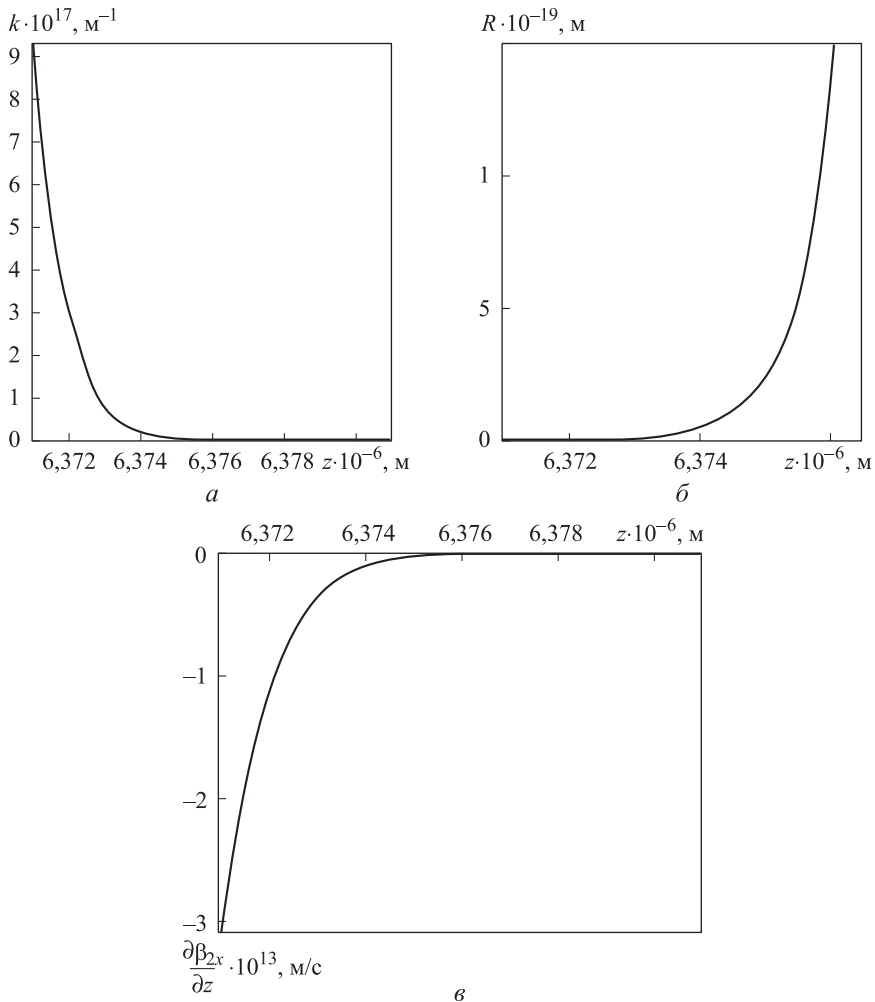
где  $v_g$  — скорость движения воздуха вблизи поверхности Земли,  $v_g = 5,4$  м/с;  $v_T$  — экспоненциальный коэффициент скорости,  $v_T = 8$  м/с;  $R_{\oplus}$  — радиус Земли,  $R_{\oplus} = 6371$  км;  $H_T$  — высота, на которой скорость воздушных потоков достигает значения, равного сумме скоростей  $v_g$  и  $v_T$ ;  $L_T$  — константа, определяющая уменьшение (снижение) скорости движения воздушных потоков в за-

висимости от высоты,  $L_T = 4$  км;  $C$  — скорость уменьшения показателя преломления атмосферы в зависимости от высоты,  $C = 0,125$  км<sup>-1</sup>;  $n_0$  — приращение показателя преломления атмосферы вблизи поверхности Земли,  $n_0 = 0,0003$ .

Подставим (2), (3) в (1) и запишем выражение для кривизны

$$k = \frac{2v_T(z - R_{\oplus} + H_T) \left[ (1 + n_0 e^{-C(z - R_{\oplus})})^2 - 1 \right] \cos \vartheta_0 \sin \vartheta_0}{cL_T^2 \left[ (1 + n_0 e^{-C(z - R_{\oplus})})^2 + \cos 2\vartheta_0 \right]^{3/2}} e^{-\left( \frac{z - R_{\oplus} + H_T}{L_T} \right)^2}. \quad (4)$$

Зависимость кривизны  $k$  траектории распространения волнового вектора  $\vec{k}_2$  плоской монохроматической электромагнитной волны от координаты  $z$  приведена на рис. 2, а. С увеличением высоты кривизна быстро уменьшается и



**Рис. 2.** Зависимости кривизны  $k$  (а) и радиуса кривизны  $R$  (б) траектории волнового вектора  $\vec{k}_2$  плоской монохроматической электромагнитной волны, а также зависимость  $\partial\beta_{2x} / \partial z$  (в) от координаты  $z$

достигает максимальных значений ( $\approx 10^{-16} \text{ м}^{-1}$ ) вблизи поверхности Земли. Зависимость радиуса кривизны  $R = 1/k$  от высоты показана на рис. 2, б. Нелинейный вид зависимостей обусловлен тем, что с возрастанием высоты уменьшаются плотность и показатель преломления атмосферы. Согласно используемой модели атмосферы [7, 8], с увеличением высоты происходит снижение скорости сдвигового течения слоев атмосферы. Зависимость  $\partial\beta_{2x}/\partial z$  от координаты  $z$  приведена на рис. 2, в.

Если проанализировать зависимость, приведенную на рис. 2, в, и зависимость второй производной  $\partial^2\beta_{2x}/\partial z^2(z)$  от координаты  $z$ , то можно определить область значений координаты  $z$ , где искривление траектории распространения волнового вектора  $\bar{k}_2$  излучения будет максимально.

Следует отметить, что ранее были выполнены численные расчеты [2, 3] на основе координатного решения дисперсионного уравнения [9, 10]. При больших углах падения оптическая разность хода двух лучей (в случае движущейся и неподвижной атмосферы) равна приблизительно двум длинам волн излучения. В оптических экспериментах с когерентным излучением эти эффекты имеют принципиальное значение, так как они больше длины волны излучения. Впервые оценки влияния кривизны траектории волнового вектора во вращающейся среде получены в работах [11, 12].

Выполненные ранее расчеты основаны на численном решении и использовании выражения для нормальной проекции волнового вектора для каждого слоя движущейся среды. В настоящей работе показано, что аналогичные расчеты могут быть проведены с помощью аналитических выражений. Эти выражения можно применять в релятивистском случае. Однако для описания процесса распространения лазерного излучения в движущейся атмосфере Земли достаточно использовать нерелятивистское приближение.

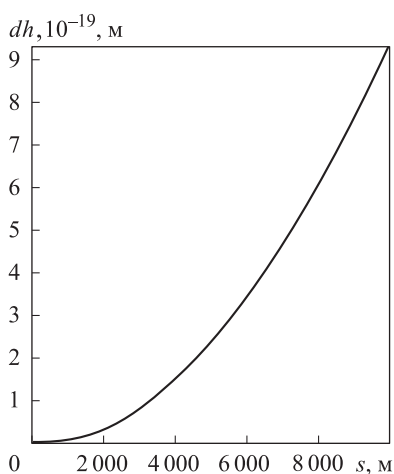
Для определения углового отклонения луча на трассе длиной  $S$  можно воспользоваться выражением:

$$\alpha = \int_0^S \frac{kn_2^2 \sin^2 \vartheta_2}{\sin^2 \vartheta_0} ds. \quad (5)$$

Далее примем в расчетах, что задан угол  $\vartheta_0 = \pi/4$ . Согласно формуле (4), максимальное отклонение луча будет у поверхности Земли, при этом кривизна траектории волнового вектора электромагнитной волны составит  $k_{\max} = 9,3 \cdot 10^{-17} \text{ м}^{-1}$ . Тогда можно оценить результирующие угловое отклонение луча и отклонение положения объекта, обусловленные скоростью движения атмосферы, по следующей формуле:

$$\alpha_{\max} = \frac{sk_{\max}}{\pi} 180, \quad dh_{\max} = \alpha_{\max} s,$$

где  $s$  — расстояние от Земли до объекта в атмосфере. При  $s = 10 \text{ км}$  получим  $dh_{\max} = 6 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ . Для длины волны излучения  $\lambda = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}$  это соответствует  $dh \approx \lambda$ .



**Рис. 3.** Зависимость отклонения  $dh$  положения объекта от пройденного расстояния  $s$

Согласно формуле (5), с увеличением расстояния  $s$  угловое отклонение луча также будет возрастать. В связи с этим будет увеличиваться отклонение положения объекта от его предполагаемого положения. Зависимость отклонения  $dh$  от пройденного расстояния  $s$  представлена на рис. 3.

Приведенные зависимости (см. рис. 2 и рис. 3) учитывают тот факт, что с увеличением координаты  $z$  кривизна и результирующее угловое отклонение уменьшаются. В соответствии с зависимостью, приведенной на рис. 3, при  $z = 10$  км отклонение луча составляет около  $dh = 10^{-8}$  м. Для длины волны излучения  $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$  м, отклонение равно  $dh = 0,02\lambda$ , т. е. сравнимо с длиной волны излучения.

**Заключение.** Выполненные оценки свидетельствуют о том, что аналитическое выражение (1) можно использовать для оценочных расчетов кривизны траектории электромагнитной волны в движущейся атмосфере Земли. Несмотря на малую плотность атмосферы, небольшое отличие показателя преломления от единицы, малые скорости движения слоев атмосферы, световой луч не распространяется по прямой линии. Его траектория зависит от градиента скорости атмосферы. С практической точки зрения это означает, что при регистрации пучка лазерного излучения на орбите ЛА необходимо проводить точный расчет траекторий всех лучей для определения интерференционного распределения интенсивности в плоскости регистрации пучка.

Движение атмосферы с постоянной скоростью также вызывает изменение фазовой и групповой скоростей, нарушение закона Снеллиуса, которые не учитывались, так как в настоящей работе авторов интересовало исключительно влияние искривления траектории, что определяется наличием градиента скорости.

Кроме того, в работе использована сравнительно простая модель атмосферы, которая не учитывает турбулентное движение воздушных потоков, что возможно занижает оценку влияния градиента скорости атмосферы на угловое отклонение и кривизну траектории.

Среднеквадратическое отклонение скорости движения воздуха имеет такой же порядок значений, как и средняя скорость движения воздуха, поэтому можно предположить следующее: суммарный эффект увлечения света вследствие турбулентного движения воздуха сравним с эффектом Физо для сдвигового течения. Согласно численным расчетам, расстояние между точками выхода лучей из турбулентной области, которые распространялись в ней с учетом искривления траектории, составляет приблизительно  $10^{-8}$  м, что соответствует угловой погрешности наведения около  $10^{-11}$  рад. В свою очередь, это обуславливает по-

грешность определения местоположения ИСЗ  $10^{-2}$  м, занимающего орбиту высотой 19 000 км (удовлетворяет требованиям, предъявляемых к ГКНС).

Если отклонение светового луча в конкретной задаче сравнительно невелико и не превосходит длину волны излучения, то возможно применение на орбите оптических интерферометрических методов, которые могут позволить с высокой точностью определять параметры движения атмосферы.

Выполненные расчеты показали, что эффекты электродинамики движущихся сред могут проявляться в глобальных технических системах, например, использующих средне- и высокоорбитальные космические аппараты. Один из примеров таких систем — ГКНС, в которых используют обмены электромагнитными сигналами. Характеристики таких сигналов зависят от свойств среды, в которой они распространяются. Высокие точностные требования, предъявляемые к ГКНС, приводят к необходимости включения в математическую модель процесса распространения электромагнитных сигналов модель изменения скорости движения атмосферы вдоль трассы распространения сигнала.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Annala A.* Least-time paths of light // *Monthly Notices Royal Astronomical Society.* 2011. No. 416. P. 2944–2948.
2. *Гладышев В.О., Кауц В.Л., Тиунов П.С., Челноков М.Б.* О влиянии вращения атмосфер Земли и Солнца на распространение электромагнитного излучения // *Инженерный журнал: наука и инновации.* 2012. Вып. 5. DOI: 10.18698/2308-6033-2012-5-216 URL: <http://engjournal.ru/catalog/fundamentals/physics/216.html>
3. *Гладышев В.О., Кауц В.Л., Тиунов П.С., Челноков М.Б.* Влияние движения атмосферы Земли на точность координатно-временного обеспечения // *Труды ИПА РАН.* 2013. № 27. С. 156–160.
4. *Gladyshev V.O., Tereshin A.A., Bazleva D.D., Gladysheva T.M.* Electromagnetic radiation in the moving medium with a velocity gradient // *Physical Interpretation of Relativity Theory: Proceedings of International Scientific Meeting.* 29 June–2 July 2015. Moscow, BMSTU, 2015. P. 157–164.
5. *Mainhul Hoque M., Jakowski N.* Ionospheric propagation effects on GNSS signals and new correction approaches. *Global navigation satellite systems: signal, theory and applications // InTech.* 2012. P. 381–404.
6. *Rousseau M., Mathieu J.P.* Problems in optics // *International Series of Monographs in Natural Philosophy.* Pergamon Press. 2011. Vol. 52. P. 236–237.
7. *Coherent transmission feasibility analysis / J. Horwath et al.* // *Proc. SPIE.* 2005. Vol. 5712. P. 13–23.
8. *Hardy J.* Adaptive optics for astronomical telescopes. New York: Oxford University Press, 1998. 438 p.
9. *Болотовский Б.М., Столяров С.Н.* Отражение света от движущегося зеркала и родственные задачи // *УФН.* 1989. Т. 159. С. 155–180. DOI: 10.3367/UFNr.0159.198909f.0155
10. *Gladyshev V., Gladysheva T., Zubarev V.* Propagation of electromagnetic waves in complex motion media // *Journal of Engineering Mathematics.* 2006. Vol. 55. No. 1–4. P. 239–254.

11. Гладышев В.О. Искривление траектории распространения плоской монохроматической электромагнитной волны в среде с вращением // Письма в ЖЭТФ. 1993. Т. 58. № 8. С. 593–597.

12. Розанов Н.Н., Сочилин Г.Б. Релятивистские эффекты первого порядка в электродинамике сред с неоднородной скоростью движения // УФН. 2006. Т. 176. С. 421–439.  
DOI: 10.3367/UFN.0176.200604f.0421

**Базлева Дарья Дмитриевна** — студентка кафедры «Физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5).

**Гладышев Владимир Олегович** — декан факультета «Фундаментальные науки» МГТУ им. Н.Э. Баумана, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5).

**Терешин Александр Андреевич** — аспирант кафедры «Физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5).

**Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Базлева Д.Д., Гладышев В.О., Терешин А.А. Аналитический расчет кривизны и углового отклонения светового луча в атмосфере Земли с учетом ее вращения // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2016. № 4. С. 79–87.  
DOI: 10.18698/1812-3368-2016-4-79-87

**ANALYTICAL CALCULATION OF THE TRAJECTORY CURVATURE AND THE ANGULAR DEVIATION OF THE LIGHT BEAM IN THE EARTH'S ATMOSPHERE CONSIDERING ITS ROTATION**

**D.D. Bazleva**

eleriniarina@gmail.com

**V.O. Gladyshev**

vgladyshev@mail.ru

**A.A. Tereshin**

arikalika@hotmail.com

**Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation**

**Abstract**

In this work we performed analytical calculations of the velocity gradient movement effect of the Earth's atmosphere on a trajectory curvature and the angular deviation of the laser beam with reference to the problem of coordinates determining of spacecraft. It is shown that the effects of electro-dynamics of moving media should have an impact on global space navigation systems

**Keywords**

*Electrodynamics of moving media, atmosphere, trajectory curvature, angular deviation*

**REFERENCES**

- [1] Annala A. Least-time paths of light. *Monthly Notices Royal Astronomical Society*, 2011, no. 416, pp. 2944–2948.
- [2] Gladyshev V.O., Kauts V.L., Tiunov P.S., Chelnokov M.B. On the influence of rotation of Earth and Sun atmospheres on the electromagnetic radiation propagation. *Jelektr. nauchno-*



tekh. izd. "Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovacii" [El. Sc.-Tech. Publ. Eng. J.: Science and Innovation], 2012, iss. 5. DOI: 10.18698/2308-6033-2012-5-216

Available at: <http://engjournal.ru/eng/catalog/fundamentals/physics/216.html>

[3] Gladyshev V.O., Kauts V.L., Tiunov P.S., Chelnokov M.B. Effect of the Earth's atmosphere movement on the precision of coordinate and time support. *Tr. Inst. Prikl. Astr. RAN* [Proc. Inst. Appl. Astr., Russ. Acad. Sci.], 2013, no. 27, pp. 156–160 (in Russ.).

[4] Gladyshev V.O., Tereshin A.A., Bazleva D.D., Gladysheva T.M. Electromagnetic radiation in the moving medium with a velocity gradient. *Physical Interpretation of Relativity Theory: Proc. of Int. Sci. Meeting. 29 June–2 July 2015*. Moscow, BMSTU, 2015, pp. 157–164.

[5] Mainhul Hoque M., Jakowski N. Ionospheric propagation effects on GNSS signals and new correction approaches. *Global navigation satellite systems: signal, theory and applications. InTech.*, 2012, pp. 381–404.

[6] Rousseau M., Mathieu J.P. Problems in optics. *Int. Series of Monographs in Natural Philosophy*, Pergamon Press, 2011, vol. 52, pp. 236–237.

[7] Horwath J. et al. Coherent transmission feasibility analysis. *Proc. SPIE*, 2005, vol. 5712, pp. 13–23.

[8] Hardy J. Adaptive optics for astronomical telescopes. N.Y., Oxford University Press, 1998. 438 p.

[9] Bolotovskiy B.M., Stolyarov S.N. Reflection of light from a moving mirror and related problems. *Sov. Phys. Usp.*, 1989, vol. 32, pp. 813–827.  
DOI: 10.1070/PU1989v032n09ABEH002759

[10] Gladyshev V., Gladysheva T., Zubarev V. Propagation of electromagnetic waves in complex motion media. *Journal of Engineering Mathematics*, 2006, vol. 55, no. 1–4, pp. 239–254.

[11] Gladyshev V.O. Curvature of the trajectory traced out by a monochromatic plane electromagnetic wave in a medium with rotation. *JETP Letters*, 1993, vol. 58, iss. 8, pp. 569–572.

[12] Rozanov N.N., Sochilin G.B. First-order relativistic effects in the electrodynamics of media moving with a nonuniform velocity. *Phys. Usp.*, 2006, vol. 49, pp. 407–424.  
DOI: 10.1070/PU2006v049n04ABEH005940

**Bazleva D.D.** — student of Physics Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Gladyshev V.O.** — Dean of Fundamental Science Faculty, Bauman Moscow State Technical University, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor of Physics Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Tereshin A.A.** — post-graduate student of Physics Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Please cite this article in English as:**

Bazleva D.D., Gladyshev V.O., Tereshin A.A. Analytical Calculation of the Trajectory Curvature and the Angular Deviation of the Light Beam in the Earth's Atmosphere Considering its Rotation. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2016, no. 4, pp. 79–87.

DOI: 10.18698/1812-3368-2016-4-79-87