УДК 517.956 DOI: 10.18698/1812-3368-2016-5-4-17

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ НА ГРАНИЦЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ТРИКОМИ — КЕЛДЫША В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

О.Д. Алгазин mopi66@yandex.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Методом преобразования Фурье и методом подобия решена краевая задача Дирихле для многомерного обобщения уравнений Трикоми, Геллерстедта и Келдыша в полупространстве, в котором это уравнение эллиптично с краевым условием на граничной гиперплоскости, где уравнение вырождается. Решение представлено в виде интеграла с простым ядром, являющимся аппроксимативной единицей и автомодельным решением уравнения типа Трикоми — Келдыша. В частности, эта формула включает в себя и формулу Пуассона, дающую решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в полупространстве. Если заданное граничное значение является обобщенной функцией медленного роста, то решение задачи Дирихле можно записать в виде свертки этой функции с ядром (если свертка существует)

Ключевые слова

Преобразование Фурье, уравнение Трикоми, задача Дирихле, аппроксимативная единица, автомодельное решение, метод подобия, обобщенные функции медленного роста

Поступила в редакцию 20.03.2016

Введение. Рассмотрим многомерное эллиптическое уравнение в полупространстве

$$y^m \Delta_x u + u_{yy} = 0, \;\; m > -2, \;\; y > 0, \tag{1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y > 0$; $u = u(x, y)$ — функция переменных $(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$; $\Delta_x = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ — оператор Лапласа по переменным x.

При $n = 1, m = 1$ получаем уравнение Трикоми $yu_{xx} + u_{yy} = 0$, при $n = 1$, $m > 0$ — уравнение Геллерстедта $y^m u_{xx} + u_{yy} = 0$, $m > 0$. При $n = 1$, $m < 0$ уравнение (1) можно записать в виде

$$u_{xx} + y^{-m} u_{yy} = 0, \;\; 0 < -m < 2,$$

что представляет собой частный случай уравнения Келдыша [1]. Эти уравнения применяют в трансзвуковой газовой динамике и в математических моделях холодной плазмы [2, 3]. При $m = 0$ получаем уравнение Лапласа $\Delta u(x, y) = 0$.

Ограниченное (при $y \to \infty$) решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в полупространстве

$$\Delta u(x, y) = 0, \;\; x \in \mathbb{R}^n, \;\; y > 0,$$

$$u(x, 0) = \psi(x), \;\; x \in \mathbb{R}^n,$$

представим интегралом Пуассона [4, 5]

$$u(x, y) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{y\psi(t)}{\left(|x-t|^2 + y^2\right)^{(n+1)/2}} dt.$$

Аналогичную формулу можно вывести при решении задачи Дирихле для уравнения типа Трикоми — Келдыша (1) с помощью преобразования Фурье по переменным в граничной гиперплоскости $y = 0$ в случае $m = 1$ и методом подобия при $m > -2.$ В такой формуле в частности содержится интегральная формула Пуассона $(m = 0),$ которую также можно получить с помощью преобразования Фурье. Для $-2 < m < 0$ ранее эта формула была получена методом преобразования Фурье в работе [6] Л.С. Парасюком. В случае $m > 0$ при вычислении многомерных преобразований Фурье возникают большие трудности (кроме случая $m = 1,$ рассмотренного далее). В связи с этим применим метод подобия. С его помощью найдем *автомодельное решение* уравнения (1) для любого $m > -2,$ которое является *аппроксимативной единицей* в пространстве интегрируемых функций. Решение задачи Дирихле представим в виде свертки этого автомодельного решения уравнения (1) с граничной функцией (если свертка существует). Из общих свойств аппроксимативной единицы следует, что в случае ограниченной кусочно-непрерывной граничной функции эта свертка записывается в виде интеграла и дает классическое решение задачи Дирихле. В случае, например, граничной функции, являющейся обобщенной функцией медленного роста, свертка позволяет найти обобщенное решение задачи Дирихле. В частности, ядро представляет собой решение задачи Дирихле, где граничной функцией является дельта-функция Дирака.

Отметим, что методом подобия получены фундаментальные решения для оператора Трикоми $(m = 1, \;\; n = 1)$ в работах Х. Баррос-Нето и И.М. Гельфанда [7–9] и методом преобразования Фурье $(m = 1, \; n \geq 1)$ в работе Х. Баррос-Нето и Ф. Кардозо [10]. Методом преобразования Фурье в работах [11, 12] были решены задачи Дирихле и Дирихле — Неймана для уравнения Лапласа и Пуассона в многомерном бесконечном слое.

Постановка задачи. Обозначения. Введем следующие обозначения:

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \;\; (x, y) = (x_1, \ldots, \; x_n, \; y) \in \mathbb{R}^{n+1}, \;\; y \in \mathbb{R};$$

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}, \;\; xt = x_1 t_1 + \ldots + x_n t_n, \quad dx = dx_1 \ldots dx_n;$$

$$F(t)=\mathcal{F}[f](t)=\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{ixt}dx.$$

Здесь $F(t)$ — преобразование Фурье суммируемой функции $f(x)$. Если суммируемая по x функция $f(x,y)$ зависит от переменных x и y, то ее преобразование Фурье по x обозначим как

$$\mathcal{F}_x[f](t,y)=\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x,y)e^{ixt}dx.$$

Аналогично определяем обратное преобразование Фурье суммируемой функции $F(t)$

$$f(x)=\mathcal{F}^{-1}[F](x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} F(t)e^{-ixt}dt$$

и суммируемой по t функции $F(t,y)$

$$\mathcal{F}_t^{-1}[F](x,y)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} F(t,y)e^{-ixt}dt.$$

Определение преобразования Фурье обобщенных функций медленного роста приведено в работе [13].

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения типа Трикоми — Келдыша

$$y^m\Delta_x u+u_{yy}=0,\ \ m>-2,\ \ x\in\mathbb{R}^n,\ \ y>0; \tag{2}$$

$$u(x,0)=\psi(x),\ \ x\in\mathbb{R}^n; \tag{3}$$

$$u(x,y)\ \text{ограничена при}\ \ y\to\infty. \tag{4}$$

Решение задачи Дирихле для уравнения типа Трикоми при *m* = 1 методом преобразования Фурье. Имеем

$$y\Delta_x u+u_{yy}=0,\ x\in\mathbb{R}^n,\ \ y>0; \tag{5}$$

$$u(x,0)=\psi(x),\ \ x\in\mathbb{R}^n; \tag{6}$$

$$u(x,y)\ \text{ограничена при}\ y\to\infty. \tag{7}$$

Применим преобразование Фурье по x к уравнению (5), обозначив $U(t,y)=\mathcal{F}_x[u](t,y)$, $\Psi(t)=\mathcal{F}[\psi](t)$. Получим краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения с параметром $t\in\mathbb{R}^n$:

$$-y|t|^2U(t,y)+U_{yy}(t,y)=0;$$

$$U(t,0)=\Psi(t);\ U(t,y)\ \text{ограничена при}\ \ y\to\infty.$$

Это уравнение Эйри, общее решение которого запишем через функции Эйри:

$$U(t,y)=c_1(t)\ \mathrm{Ai}\left(|t|^{2/3}\,y\right)+c_2(t)\ \mathrm{Bi}\left(|t|^{2/3}\,y\right).$$

Поскольку

$$\lim_{y\to\infty}\mathrm{Bi}\left(|t|^{2/3}\,y\right)=\infty\ \text{и}\ \mathrm{Ai}(0)=\frac{1}{3^{2/3}\Gamma(2/3)},$$

с учетом граничных условий получим решение краевой задачи

$$U(t,y)=3^{2/3}\Gamma(2/3)\Psi(t)\ \mathrm{Ai}\left(|t|^{2/3}\,y\right).$$

Применив обратное преобразование Фурье, найдем решение исходной задачи Дирихле для уравнения типа Трикоми (5)–(7) в виде свертки (если свертка существует)

$$u(x,y)=\psi(x)*k_n(x,y), \tag{8}$$

где $k_{n1}(x,y)=3^{2/3}\Gamma(2/3)\mathcal{F}_t^{-1}\left[\mathrm{Ai}\left(|t|^{2/3}\,y\right)\right](x,y)$ — ядро.

Обозначим $|x|=r,\ |t|=\rho,\ \sigma_{n-1}$ — площадь единичной сферы в пространстве $\mathbb{R}^n$. Для вычисления обратного преобразования Фурье перейдем к сферическим координатам и учтем, что для положительных значений аргумента функция Эйри выражается через функцию Макдональда

$$\mathrm{Ai}\left(\rho^{2/3}y\right)=\frac{1}{\pi\sqrt{3}}\rho^{1/3}\sqrt{y}\,K_{1/3}\left(2/3\,y^{3/2}\rho\right),\ \ y>0.$$

Имеем

$$k_{n1}(x,y)=\frac{3^{2/3}\Gamma(2/3)}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{Ai}\left(|t|^{2/3}\,y\right)e^{-ixt}dt=$$

$$=3^{2/3}\Gamma(2/3)\frac{\sigma_{n-1}}{(2\pi)^n}\int_0^\infty\mathrm{Ai}\left(\rho^{2/3}y\right)\rho^{n/2}d\rho\int_0^\pi e^{-ir\rho\cos\theta}\sin^{n-2}\theta d\theta=$$

$$=\frac{3^{2/3}\Gamma(2/3)}{(2\pi)^{n/2}\,r^{n/2-1}}\int_0^\infty\mathrm{Ai}\left(\rho^{2/3}y\right)\rho^{n/2}J_{n/2-1}(r\rho)\,d\rho=$$

$$=\frac{3^{2/3}\Gamma(2/3)\sqrt{y}}{(2\pi)^{n/2}\,r^{n/2-1}\pi\sqrt{3}}\int_0^\infty K_{1/3}\left(2/3\,y^{3/2}\rho\right)\rho^{1/3+n/2}J_{n/2-1}(r\rho)\,d\rho,$$

где $J_{n/2-1}(r\rho)$ — функция Бесселя первого рода порядка $\nu=n/2-1.$ Приведенная формула справедлива и при $n=1,$ что легко проверить. Последний интеграл выражается через гипергеометрическую функцию F [14]:

$$\int_0^\infty K_{1/3}\left(2/3\,y^{3/2}\rho\right)\rho^{1/3+n/2}J_{n/2-1}\left(r\rho\right)d\rho=$$

$$=\frac{3^{n+1/3}\Gamma\left(n/2+1/3\right)}{2^{n/2+1}y^{3n/2+1/2}}F\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{3},\frac{n}{2};\frac{n}{2};-\frac{9r^2}{4y^3}\right)=$$

$$=\frac{3^{n+1/3}\Gamma\left(n/2+1/3\right)}{2^{n/2+1}y^{3n/2+1/2}}\left(1+\frac{9r^2}{4y^3}\right)^{-n/2-1/3}.$$

Окончательно получаем выражение для ядра

$$k_{n1}\left(x,y\right)=C_{n1}^*\frac{y}{\left(4y^3+9\left|x\right|^2\right)^{n/2+1/3}},\; x\in\mathbb{R}^n,\; y>0,$$

$$C_{n1}^*=\frac{3^{n+1/2}\Gamma\left(2/3\right)\Gamma\left(n/2+1/3\right)}{2^{1/3}\pi^{n/2+1}}.$$

Ядро имеет следующие свойства при $y>0$:

1) $k_{n1}\left(x,y\right)>0$;
2) $\int\limits_{\mathbb{R}^n}k_{n1}\left(x,y\right)dx=1$;
3) для $\forall\delta>0,\ \lim\limits_{y\to+0}\sup\limits_{|x|\geq\delta}k_{n1}\left(x,y\right)=0.$

Свойство 1 очевидно. Свойство 2 следует из того, что преобразование Фурье от $k_n\left(x,y\right)$ есть $3^{2/3}\Gamma\left(2/3\right)\mathrm{Ai}\left(\left|t\right|^{2/3}y\right)$,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}k_{n1}\left(x,y\right)e^{ixt}dx=3^{2/3}\Gamma\left(2/3\right)\mathrm{Ai}\left(\left|t\right|^{2/3}y\right).$$

Полагая $t=0$, получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}k_{n1}\left(x,y\right)dx=3^{2/3}\Gamma\left(2/3\right)\mathrm{Ai}\left(0\right)=1.$$

Свойство 3 вытекает из того, что $k_{n1}\left(x,y\right)$ монотонно убывающая функция $\left|x\right|$.

Перечисленные свойства означают, что $k_{n1}\left(x,y\right)$ — *аппроксимативная единица*, или δ-образная система функций x (с параметром *y*), при $y\to+0$, $k_{n1}\left(x,y\right)$ слабо сходящаяся к δ-функции $\delta\left(x\right)$.

Если $\psi\left(x\right)$ является ограниченной кусочно-непрерывной функцией, то свертка (8) существует и записывается в виде интеграла

$$u\left(x,y\right)=C_{n1}^*\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\psi\left(t\right)y}{\left(4y^3+9\left|x-t\right|^2\right)^{n/2+1/3}}dt.$$

Поскольку ядро интеграла — аппроксимативная единица, запишем равенство $\lim\limits_{y\to+0} u(x,y)=\psi(x)$ в точках непрерывности $\psi(x)$, которое означает, что интеграл представляет собой классическое решение задачи Дирихле.

В случае обобщенных функций медленного роста $\psi(x)\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, для которых свертка существует, функция $u(x,y)=\psi(x)*k_{n1}(x,y)$ является обобщенным решением задачи Дирихле:

$$\lim_{y\to+0} u(x,y)=\psi(x) \text{ в } \mathcal{S}'.$$

Например, если $\psi(x)=\delta(x)$, то решением задачи Дирихле будет ядро интеграла

$$u(x,y)=\delta(x)*k_{n1}(x,y)=k_{n1}(x,y),$$

$$\lim_{y\to+0} k_{n1}(x,y)=\delta(x) \text{ в } \mathcal{S}'.$$

Если $\psi(x)\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1\le p\le\infty$, то согласно свойствам аппроксимативной единицы [5] имеем $\lim\limits_{y\to+0} u(x,y)=\psi(x)$ для почти всех x, если $p<\infty$, то $u(x,y)$ сходится к $\psi(x)$ по норме $L^p(\mathbb{R}^n)$ при $y\to+0$.

Для $n=1$ интеграл, дающий решение задачи Дирихле для уравнения типа Трикоми (5)–(7), имеет вид

$$u(x,y)=\frac{3^{3/2}\Gamma(2/3)\Gamma(5/6)}{\pi^{3/2}2^{1/3}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y\psi(t)}{\left(4y^3+9(x-t)^2\right)^{5/6}}\,dt.$$

Ядро интегрального представления решения задачи Дирихле для многомерного уравнения типа Трикоми, которое является аппроксимативной единицей:

$$k_{n1}(x,y)=C^*_{n1}\frac{y}{\left(4y^3+9|x|^2\right)^{n/2+1/3}}=\frac{1}{y^{n3/2}}\varphi\left(\frac{|x|}{y^{3/2}}\right),$$

где

$$\varphi(r)=\frac{C^*_{n1}}{\left(4+9r^2\right)^{n/2+1/3}},$$

т. е. ядро $k_{n1}(x,y)$ — *автомодельное решение* уравнения типа Трикоми, которое можно найти методом подобия [15, 16]. Решим указанным методом задачу Дирихле для уравнения типа Трикоми — Келдыша.

Решение задачи Дирихле для уравнения типа Трикоми — Келдыша при $m>-2$ методом подобия. Найдем ядро интегрального представления решения задачи Дирихле (2)–(4), являющееся аппроксимативной единицей, в виде автомодельного решения уравнения типа Трикоми — Келдыша (2)

$$u(x, y) = \frac{1}{y^{\alpha}} \varphi\left(\frac{r}{y^{\beta}}\right), \ \alpha > 0, \ \ \beta > 0, \tag{9}$$

где $r = |x|,$ т. е. ищем сферически симметричное решение, зависящее только от $|x| = r.$ Уравнение типа Трикоми — Келдыша (2) для сферически симметричной функции принимает вид

$$y^m \left(u_{rr} + \frac{n-1}{r} u_r\right) + u_{yy} = 0, \quad y > 0, \ m > -2. \tag{10}$$

Для определения констант α и β выполним в уравнении (10) замену переменных $u = C^l \overline{u}, \ r = C^k \overline{r}, \ y = C\,\overline{y}, \ C > 0,$ и потребуем, чтобы уравнение перешло само в себя. Получим уравнение в новых переменных

$$C^{m+l-2k}\left(\overline{u}_{\overline{r}\overline{r}} + \frac{n-1}{\overline{r}}\overline{u}_{\overline{r}}\right) + C^{l-2}\overline{u}_{\overline{y}\overline{y}} = 0.$$

Для того чтобы последнее уравнение совпало с уравнением (10), примем $m + l - 2k = l - 2.$ Откуда

$$k = \frac{m+2}{2}, \ \ l \text{ — любое.}$$

В новых переменных автомодельное решение должно иметь тот же вид (9)

$$\overline{u} = \frac{1}{\overline{y}^{\alpha}} \varphi\left(\frac{\overline{r}}{\overline{y}^{\beta}}\right).$$

Возвращаясь к старым переменным, получаем

$$u = \frac{c^{\alpha+l}}{y^{\alpha}} \varphi\left(\frac{c^{-k+\beta} r}{y^{\beta}}\right).$$

Для совпадения этого выражения с выражением (9) примем

$$\beta = k = \frac{m+2}{2}, \ \alpha = -l,$$

т. е. любое. Возьмем $\alpha = kn = n\dfrac{m+2}{2}$. Из условия $\alpha > 0, \ \beta > 0$ следует, что $m > -2.$

Будем искать решение уравнения (10) в виде

$$u = \frac{1}{y^{kn}} \varphi\left(\frac{r}{y^k}\right), \ k = \frac{m+2}{2}, \ m > -2. \tag{11}$$

Подставив функцию (11) в уравнение (10), запишем уравнение

$$\left(1+k^2r^2\right)\varphi''(r)+\left(\frac{n-1}{r}+2k^2nr+k^2r+kr\right)\varphi'(r)+kn(kn+1)\varphi(r)=0.$$

Выполнив в этом уравнении замену переменной $1+k^2r^2=\xi,$ для функции $\overline{\varphi}(\xi)$ найдем гипергеометрическое уравнение

$$\xi(1-\xi)\overline{\varphi}''(\xi)+\left(\frac{n}{2}+1+\frac{1}{2k}-\xi\left(n+1+\frac{1}{2k}\right)\right)\overline{\varphi}'(\xi)-\left(\frac{n^2}{4}+\frac{n}{4k}\right)\overline{\varphi}(\xi)=0,$$

которое запишем в виде

$$\xi(1-\xi)\overline{\varphi}''(\xi)+\left(c-\xi(a+b+1)\right)\overline{\varphi}'(\xi)-ab\overline{\varphi}(\xi)=0, \tag{12}$$

где

$$c=\frac{n}{2}+1+\frac{1}{2k};\ a=\frac{n}{2};\ \ b=\frac{n}{2}+\frac{1}{2k}.$$

Общее решение гипергеометрического уравнения (12) имеет вид

$$\overline{\varphi}(\xi)=C_1F(a,\,b;\,c;\,\xi)+C_2\xi^{1-c}F(b-c+1,\,a-c+1;\ 2-c;\,\xi)=$$

$$=C_1F\left(\frac{n}{2},\,\frac{n}{2}+\frac{1}{2k};\,\frac{n}{2}+1+\frac{1}{2k};\,\xi\right)+C_2\xi^{-n/2-1/2k}F\left(0,\,-\frac{1}{2k};\,1+\frac{n}{2}+\frac{1}{2k};\,\xi\right)=$$

$$=C_1F\left(\frac{n}{2},\,\frac{n}{2}+\frac{1}{m+2};\,\frac{n}{2}+1+\frac{1}{m+2};\,\xi\right)+C_2\xi^{-n/2-1/(m+2)}\ .$$

Здесь $F(a,\,b;\,c;\,\xi)$ — гипергеометрическая функция. Возьмем частное решение (обозначим константу C_2 как C_{nm})

$$\overline{\varphi}(\xi)=\frac{C_{nm}}{\xi^{n/2+1/(m+2)}}.$$

Возвращаясь к старым переменным, получаем

$$\varphi(r)=\frac{C_{nm}}{\left(1+\left(\frac{m+2}{2}\right)^2r^2\right)^{n/2+1/(m+2)}}.$$

Константу C_{nm} выберем такой, чтобы интеграл $\varphi(|x|)$ по всему пространству $\mathbb{R}^n$ был равен единице. Переходя к сферическим координатам и обозначая через σ_{n-1} площадь единичной сферы в пространстве $\mathbb{R}^n,$ находим

$$C_{nm}^{-1}=C_{nm}^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi\left(|x|\right)dx=\sigma_{n-1}\int\limits_0^\infty\frac{r^{n-1}dr}{\left(1+\left(\frac{m+2}{2}\right)^2 r^2\right)^{n/2+1/(m+2)}}=$$

$$=\frac{\sigma_{n-1}}{2\left(\frac{m+2}{2}\right)^n}\int\limits_0^\infty\frac{t^{n/2-1}}{(1+t)^{n/2+1/(m+2)}}dt=\frac{\sigma_{n-1}2^{n-1}}{(m+2)^n}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{m+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{m+2}\right)}.$$

Здесь выполнена замена переменной $\left(\left(\frac{m+2}{2}\right)r\right)^2=t$ и использована формула

$$\int\limits_0^\infty\frac{t^{a-1}}{(1+t)^{b+c}}dt=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)},\ a>0,\ \ b>0,$$

где Γ — гамма-функция Эйлера. Таким образом, имеем

$$C_{nm}=\frac{(m+2)^n\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{m+2}\right)}{\pi^{n/2}2^n\Gamma\left(\frac{1}{m+2}\right)}. \tag{13}$$

Автомодельное решение уравнения типа Трикоми — Келдыша, которое получено по формуле (11), обозначим как

$$k_{nm}(x,y)=\frac{1}{y^{n(m+2)/2}}\varphi\left(\frac{|x|}{y^{(m+2)/2}}\right)=$$

$$=\frac{C_{nm}y}{\left(y^{m+2}+\left(\frac{m+2}{2}\right)^2|x|^2\right)^{n/2+1/(m+2)}},\ \ m>-2, \tag{14}$$

где C_{nm} — константа, определяемая по формуле (13).

При $m=0$ получаем ядро Пуассона

$$k_{n0}(x,y)=\frac{C_{n0}y}{\left(y^2+|x|^2\right)^{(n+1)/2}}.$$

Здесь

$$C_{n0}=\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}}.$$

При $m=1$ получаем ядро интегрального представления решения задачи Дирихле (5)–(7), найденное выше методом преобразования Фурье:

$$k_{n1}(x,y)=\frac{C_{n1}y}{\left(y^3+\frac{9}{4}|x|^2\right)^{n/2+1/3}}=\frac{2^{n+2/3}C_{n1}y}{\left(4y^3+9|x|^2\right)^{n/2+1/3}},$$

где

$$2^{n+2/3}C_{n1}=\frac{2^{2/3}3^n\Gamma(n/2+1/3)}{\pi^{n/2}\Gamma(1/3)}=\frac{3^{n+1/2}\Gamma(2/3)\Gamma(n/2+1/3)}{2^{1/3}\pi^{n/2+1}}=C^*_{n1}.$$

Покажем, что функция $k_{nm}(x,y)$, определяемая по формуле (14), является аппроксимативной единицей в пространстве интегрируемых в $\mathbb{R}^n$ функций, т. е. обладает следующими свойствами при $y>0$:

1) $k_{nm}(x,y)>0;$

2) $\int\limits_{\mathbb{R}^n}k_{nm}(x,y)dx=1;$

3) для $\forall\delta>0,\ \lim\limits_{y\to+0}\sup\limits_{|x|\geq\delta}k_{nm}(x,y)=0.$

Свойства 1 и 3 доказывают так же, как и для $m=1$. Докажем свойство 2. Имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}k_{nm}(x,y)dx=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{y^{n(m+2)/2}}\varphi\left(\frac{|x|}{y^{(m+2)/2}}\right)dx=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(|t|)dt=1.$$

Следовательно, решение задачи Дирихле для уравнения типа Трикоми может быть записано в виде свертки граничной функции $\psi(x)$ с ядром $k_{nm}(x,y)$ (если свертка существует)

$$u(x,y)=\psi(x)*k_{nm}(x,y).$$

Если $\psi(x)$ — ограниченная кусочно-непрерывная функция, то свертка существует и записывается в виде интеграла

$$u(x,y)=C_{nm}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\psi(t)y}{\left(y^{m+2}+((m+2)/2)^2|x-t|^2\right)^{n/2+1/(m+2)}}dt.$$

В точках непрерывности функции $\psi(x)$ $\lim\limits_{y\to+0}u(x,y)=\psi(x)$, т. е. интеграл представляет собой классическое решение задачи Дирихле.

Для обобщенных функций медленного роста $\psi(x)\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, для которых свертка существует, функция

$$u(x,y)=\psi(x)*k_{nm}(x,y)$$

является обобщенным решением задачи Дирихле, $\lim\limits_{y\to+0}u(x,y)=\psi(x)$ в $\mathcal{S}'$. Например, если $\psi(x)=\delta(x)$, то решением задачи Дирихле будет ядро интеграла

$$u(x, y) = \delta(x) * k_{nm}(x, y) = k_{nm}(x, y),$$

$$\lim_{y \to +0} k_{nm}(x, y) = \delta(x) \text{ в } \mathcal{S}'.$$

Если $\psi(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$, то из свойств аппроксимативной единицы [5] следует, что $\lim\limits_{y \to +0} u(x, y) = \psi(x)$ для почти всех x, если $p < \infty$, то функция $u(x, y)$ сходится к $\psi(x)$ по норме $L^p(\mathbb{R}^n)$ при $y \to +0$.

Пример. В случае $n = 1$, $m = -1$ имеем задачу Дирихле для уравнения Келдыша

$$u_{xx} + yu_{yy} = 0, -\infty < x < \infty, y > 0;$$

$$u(x, 0) = \psi(x), -\infty < x < \infty;$$

$$u(x, y) \text{ ограничена при } y \to \infty.$$

Если $\psi(x)$ — ограниченная кусочно-непрерывная функция, то решение этой задачи представим интегралом

$$u(x, y) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y \psi(t) dt}{\left(4y + (x - t)^2\right)^{3/2}}.$$

Возьмем

$$\psi(x) = \begin{cases} a, x < 0; \\ b, x > 0, \end{cases}$$

тогда

$$u(x, y) = 2ay \int_{-\infty}^{0} \frac{dt}{\left(4y + (x - t)^2\right)^{3/2}} + 2by \int_{0}^{\infty} \frac{dt}{\left(4y + (x - t)^2\right)^{3/2}} =$$

$$= \frac{a + b}{2} + \frac{b - a}{2} \frac{x}{\sqrt{4y + x^2}}. \qquad (15)$$

Легко проверить, что функция (15)

1) удовлетворяет уравнению Келдыша $u_{xx} + yu_{yy} = 0$, $y > 0$;
2) ограничена $|u(x, y)| \le \max(|a|, |b|)$, $y > 0$;
3) удовлетворяет краевому условию

$$\lim_{y \to +0} u(x, y) = \frac{a + b}{2} + \frac{b - a}{2} \frac{x}{|x|} = \begin{cases} a, \ x < 0 \\ b, \ x > 0 \end{cases} = \psi(x).$$

В точке разрыва

$$\lim_{y\to+0} u(0,y) = \frac{a+b}{2}.$$

Заключение. Найдено точное решение задачи Дирихле для вырождающегося на границе эллиптического уравнения типа Трикоми — Келдыша в полупространстве. Решение записано в виде интеграла, обобщающего известную формулу Пуассона для уравнения Лапласа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Келдыш М.В.* О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области // ДАН СССР. 1951. Т. 77. № 2. С. 181–183.

2. *Берс Л.* Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. М.: Изд-во Иностранной литературы, 1961. 208 с.

3. *Otway T.H.* Dirichlet problem for elliptic-hyperbolic equations of Keldych type. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2012. 214 p.

4. *Бицадзе А.В.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. 296 с.

5. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973. 344 с.

6. *Парасюк Л.С.* Граничні задачі для еліптичних диференціальних рівнянь, що вироджуються на границі області // Україньска академія друкарства. Наукові записки. 1961. № 13. С. 65–75.

7. *Barros-Neto J., Gelfand I.M.* Fundamental solutions for the Tricomi operator // Duke Math. J. 1999. Vol. 98(3). P. 465–483.

8. *Barros-Neto J., Gelfand I.M.* Fundamental solutions for the Tricomi operator, II // Duke Math. J. 2002. Vol. 111 (3). P. 561–584.

9. *Barros-Neto J., Gelfand I.M.* Fundamental solutions for the Tricomi operator, III // Duke Math. J. 2005. Vol. 128(1). P. 119–140.

10. *Barros-Neto J., Cardoso F.* Bessel integrals and fundamental solutions for a generalized Tricomi operator // Journal of Functional Analysis. 2001. Vol. 183. P. 472–497. DOI: 10.1006/jfan.2001.3749

11. *Алгазин О.Д., Копаев А.В.* Решение смешанной краевой задачи для уравнения Лапласа в многомерном бесконечном слое // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2015. № 1. С. 3–13. DOI: 10.18698/1812-3368-2015-1-3-13

12. *Алгазин О.Д., Копаев А.В.* Решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона в многомерном бесконечном слое // Математика и математическое моделирование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2015. № 4. DOI: 10.7463/mathm.0415.0812943 URL: http://mathmjournal.ru/doc/812943.html

13. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979. 320 с.

14. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.

15. *Баренблатт Г.И.* Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л.: Гидрометеоиздат, 1982. 256 с.

16. *Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И.* Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 2005. 256 с.

Алгазин Олег Дмитриевич — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Алгазин О.Д. Точное решение задачи Дирихле для вырождающегося на границе эллиптического уравнения типа Трикоми — Келдыша в полупространстве // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2016. № 5. С. 4–17.
DOI: 10.18698/1812-3368-2016-5-4-17

EXACT SOLUTION TO THE DIRICHLET PROBLEM FOR DEGENERATING ON THE BOUNDARY ELLIPTIC EQUATION OF TRICOMI — KELDYSH TYPE IN THE HALF-SPACE

O.D. Algazin mopi66@yandex.ru

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

In the paper we solve the Dirichlet problem for a multidimensional equation by means of Fourier transform method and similarity method. The problem is a generalization of the Tricomi, Gellerstedt and Keldysh equations in the half-space, the equation is of an elliptic type with the boundary condition on the boundary hyperplane where equation degenerates. We present the solution in the form of an integral with a simple kernel. It is an approximation to the identity and self-similar solution of Tricomi type equation. In particular, this formula contains a Poisson's formula, which gives the solution of the Dirichlet problem for the Laplace equation for the half-space. If the given boundary value is a generalized function of slow growth, the solution of the Dirichlet problem can be presented as a convolution of this function with the kernel (if a convolution exists)

Keywords

Fourier transform, Tricomi equation, Dirichlet problem, approximation to the identity, self-similar solution, similarity method, generalized functions of slow growth

REFERENCES

[1] Keldysh M.V. On some cases of degenerate elliptic equations on the boundary of a domain. *Dokl. Akad. nauk USSR* [Proc. Acad. Sci. USSR], 1951, vol. 77, no. 2, pp. 181–183 (in Russ.).

[2] Bers L. Mathematical aspects of subsonic and transonic gas dynamics. N.Y., Wiley, 1958.

[3] Otway T.H. Dirichlet problem for elliptic-hyperbolic equations of Keldych type. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2012. 214 p.

[4] Bitsadze A.V. Equations of mathematical physics. Moscow, Mir Publ., 1980. 318 p.

[5] Stein E. Singular integrals and differentiability properties of functions. N.J., Princeton University Press, 1970.

[6] Parasyuk L.S. Boundary problems for elliptic differential equations that degenerate on the boundary of domain. *Ukrainska akademia drukarstva. Naukovi zapysky*, 1961, no. 13, pp. 65–75 (in Ukrainian).

[7] Barros-Neto J., Gelfand I.M. Fundamental solutions for the Tricomi operator. *Duke Math. J.* 1999, vol. 98(3), pp. 465–483.

[8] Barros-Neto J., Gelfand I.M. Fundamental solutions for the Tricomi operator, II. *Duke Math. J.*, 2002, vol. 111(3), pp. 561–584.

[9] Barros-Neto J., Gelfand I.M. Fundamental solutions for the Tricomi operator, III. *Duke Math. J.*, 2005, vol. 128(1), pp. 119–140.

[10] Barros-Neto J., Cardoso F. Bessel integrals and fundamental solutions for a generalized Tricomi operator. *Journal of Functional Analysis*, 2001, vol. 183, pp. 472–497. DOI: 10.1006/jfan.2001.3749

[11] Algazin O.D., Kopaev A.V. Solution to the mixed boundary-value problem for Laplace equation in multidimentional infinite layer. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2015, no. 1, pp. 3–13 (in Russ.). DOI: 10.18698/1812-3368-2015-1-3-13

[12] Algazin O.D., Kopaev A.V. Dirichlet problem solution for Poisson equation in a multidimensional infinite layer. *Mat. i mat. model. MGTU im. N.E. Baumana* [Mathematics and Mathematical Modelling of the Bauman MSTU. Electron. Journ.], 2015, no. 4. DOI: 10.7463/mathm.0415.0812943 Available at: http://mathmjournal.ru/en/doc/812943.html

[13] Vladimirov V.S. Obobshchennye funktsii v matematicheskoy fizike [Generalized functions in mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 320 p.

[14] Ryshik I.M., Gradstein I.S. Tables of integrals, series, and products. N.Y., Academic Press, 2007.

[15] Barenblatt G.I. Scaling, self-similarity, and intermediate asymptotics. Cambridge University Press, 2002.

[16] Polyanin A.D., Zaytsev V.F., Zhurov A.I. Metody resheniya nelineynykh uravneniy matematicheskoy fiziki i mekhaniki [Methods for solving nonlinear equations of mathematical physics and mechanics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2005. 256 p.

Algazin O.D. — Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Professor of Computational Mathematics and Mathematical Physics Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Algazin O.D. Exact Solution to the Dirichlet Problem for Degenerating on the Boundary Elliptic Equation of Tricomi — Keldysh Type in the Half-Space. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2016, no. 5, pp. 4–17. DOI: 10.18698/1812-3368-2016-5-4-17