

## ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ НА ГРАНИЦЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ТРИКОМИ — КЕЛДЫША В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

О.Д. Алгазин

mori66@yandex.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

### Аннотация

Методом преобразования Фурье и методом подобия решена краевая задача Дирихле для многомерного обобщения уравнений Трикоми, Геллерстедта и Келдыша в полупространстве, в котором это уравнение эллиплично с краевым условием на граничной гиперплоскости, где уравнение вырождается. Решение представлено в виде интеграла с простым ядром, являющимся аппроксимативной единицей и автомодельным решением уравнения типа Трикоми — Келдыша. В частности, эта формула включает в себя и формулу Пуассона, дающую решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в полупространстве. Если заданное граничное значение является обобщенной функцией медленного роста, то решение задачи Дирихле можно записать в виде свертки этой функции с ядром (если свертка существует)

### Ключевые слова

*Преобразование Фурье, уравнение Трикоми, задача Дирихле, аппроксимативная единица, автомодельное решение, метод подобия, обобщенные функции медленного роста*

Поступила в редакцию 20.03.2016  
© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016

**Введение.** Рассмотрим многомерное эллиптическое уравнение в полупространстве

$$y^m \Delta_x u + u_{yy} = 0, \quad m > -2, \quad y > 0, \quad (1)$$

где  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $y > 0$ ;  $u = u(x, y)$  — функция переменных  $(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ;

$\Delta_x = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$  — оператор Лапласа по переменным  $x$ .

При  $n=1, m=1$  получаем уравнение Трикоми  $yu_{xx} + u_{yy} = 0$ , при  $n=1, m>0$  — уравнение Геллерстедта  $y^m u_{xx} + u_{yy} = 0, m>0$ . При  $n=1, m<0$  уравнение (1) можно записать в виде

$$u_{xx} + y^{-m} u_{yy} = 0, \quad 0 < -m < 2,$$

что представляет собой частный случай уравнения Келдыша [1]. Эти уравнения применяют в трансзвуковой газовой динамике и в математических моделях холодной плазмы [2, 3]. При  $m=0$  получаем уравнение Лапласа  $\Delta u(x, y) = 0$ .

Ограниченное (при  $y \rightarrow \infty$ ) решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в полупространстве

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y > 0,$$

$$u(x, 0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

представим интегралом Пуассона [4, 5]

$$u(x, y) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{y\psi(t)}{(|x-t|^2 + y^2)^{(n+1)/2}} dt.$$

Аналогичную формулу можно вывести при решении задачи Дирихле для уравнения типа Трикоми — Келдыша (1) с помощью преобразования Фурье по переменным в граничной гиперплоскости  $y=0$  в случае  $m=1$  и методом подобия при  $m > -2$ . В такой формуле в частности содержится интегральная формула Пуассона ( $m=0$ ), которую также можно получить с помощью преобразования Фурье. Для  $-2 < m < 0$  ранее эта формула была получена методом преобразования Фурье в работе [6] Л.С. Парасюком. В случае  $m > 0$  при вычислении многомерных преобразований Фурье возникают большие трудности (кроме случая  $m=1$ , рассмотренного далее). В связи с этим применим метод подобия. С его помощью найдем *автомодельное решение* уравнения (1) для любого  $m > -2$ , которое является *аппроксимативной единицей* в пространстве интегрируемых функций. Решение задачи Дирихле представим в виде свертки этого автомодельного решения уравнения (1) с граничной функцией (если свертка существует). Из общих свойств аппроксимативной единицы следует, что в случае ограниченной кусочно-непрерывной граничной функции эта свертка записывается в виде интеграла и дает классическое решение задачи Дирихле. В случае, например, граничной функции, являющейся обобщенной функцией медленного роста, свертка позволяет найти обобщенное решение задачи Дирихле. В частности, ядро представляет собой решение задачи Дирихле, где граничной функцией является дельта-функция Дирака.

Отметим, что методом подобия получены фундаментальные решения для оператора Трикоми ( $m=1, n=1$ ) в работах Х. Баррос-Нето и И.М. Гельфанда [7–9] и методом преобразования Фурье ( $m=1, n \geq 1$ ) в работе Х. Баррос-Нето и Ф. Кардозо [10]. Методом преобразования Фурье в работах [11, 12] были решены задачи Дирихле и Дирихле — Неймана для уравнения Лапласа и Пуассона в многомерном бесконечном слое.

**Постановка задачи. Обозначения.** Введем следующие обозначения:

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad (x, y) = (x_1, \dots, x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad y \in \mathbb{R};$$

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}, \quad xt = x_1 t_1 + \dots + x_n t_n, \quad dx = dx_1 \dots dx_n;$$

$$F(t) = \mathcal{F}[f](t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{ixt} dx.$$

Здесь  $F(t)$  — преобразование Фурье суммируемой функции  $f(x)$ . Если суммируемая по  $x$  функция  $f(x, y)$  зависит от переменных  $x$  и  $y$ , то ее преобразование Фурье по  $x$  обозначим как

$$\mathcal{F}_x[f](t, y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) e^{ixt} dx.$$

Аналогично определяем обратное преобразование Фурье суммируемой функции  $F(t)$

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[F](x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} F(t) e^{-ixt} dt$$

и суммируемой по  $t$  функции  $F(t, y)$

$$\mathcal{F}_t^{-1}[F](x, y) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} F(t, y) e^{-ixt} dt.$$

Определение преобразования Фурье обобщенных функций медленного роста приведено в работе [13].

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения типа Трикоми — Келдыша

$$y^m \Delta_x u + u_{yy} = 0, \quad m > -2, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y > 0; \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n; \quad (3)$$

$$u(x, y) \text{ ограничена при } y \rightarrow \infty. \quad (4)$$

**Решение задачи Дирихле для уравнения типа Трикоми при  $m = 1$  методом преобразования Фурье.** Имеем

$$y \Delta_x u + u_{yy} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y > 0; \quad (5)$$

$$u(x, 0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n; \quad (6)$$

$$u(x, y) \text{ ограничена при } y \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Применим преобразование Фурье по  $x$  к уравнению (5), обозначив  $U(t, y) = \mathcal{F}_x[u](t, y)$ ,  $\Psi(t) = \mathcal{F}[\psi](t)$ . Получим краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения с параметром  $t \in \mathbb{R}^n$ :

$$-y|t|^2 U(t, y) + U_{yy}(t, y) = 0;$$

$$U(t, 0) = \Psi(t); \quad U(t, y) \text{ ограничена при } y \rightarrow \infty.$$

Это уравнение Эйри, общее решение которого запишем через функции Эйри:

$$U(t, y) = c_1(t) \operatorname{Ai}\left(|t|^{2/3} y\right) + c_2(t) \operatorname{Bi}\left(|t|^{2/3} y\right).$$

Поскольку

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \operatorname{Bi}\left(|t|^{2/3} y\right) = \infty \text{ и } \operatorname{Ai}(0) = \frac{1}{3^{2/3} \Gamma(2/3)},$$

с учетом граничных условий получим решение краевой задачи

$$U(t, y) = 3^{2/3} \Gamma(2/3) \Psi(t) \operatorname{Ai}\left(|t|^{2/3} y\right).$$

Применив обратное преобразование Фурье, найдем решение исходной задачи Дирихле для уравнения типа Трикоми (5)–(7) в виде свертки (если свертка существует)

$$u(x, y) = \psi(x) * k_n(x, y), \quad (8)$$

где  $k_{n1}(x, y) = 3^{2/3} \Gamma(2/3) \mathcal{F}_t^{-1} \left[ \operatorname{Ai}\left(|t|^{2/3} y\right) \right] (x, y)$  — ядро.

Обозначим  $|x| = r$ ,  $|t| = \rho$ ,  $\sigma_{n-1}$  — площадь единичной сферы в пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Для вычисления обратного преобразования Фурье перейдем к сферическим координатам и учтем, что для положительных значений аргумента функция Эйри выражается через функцию Макдональда

$$\operatorname{Ai}(\rho^{2/3} y) = \frac{1}{\pi \sqrt{3}} \rho^{1/3} \sqrt{y} K_{1/3}(2/3 y^{3/2} \rho), \quad y > 0.$$

Имеем

$$\begin{aligned} k_{n1}(x, y) &= \frac{3^{2/3} \Gamma(2/3)}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{Ai}\left(|t|^{2/3} y\right) e^{-ixt} dt = \\ &= 3^{2/3} \Gamma(2/3) \frac{\sigma_{n-1}}{(2\pi)^n} \int_0^\infty \operatorname{Ai}(\rho^{2/3} y) \rho^{n/2} d\rho \int_0^\pi e^{-ir\rho \cos \theta} \sin^{n-2} \theta d\theta = \\ &= \frac{3^{2/3} \Gamma(2/3)}{(2\pi)^{n/2} r^{n/2-1}} \int_0^\infty \operatorname{Ai}(\rho^{2/3} y) \rho^{n/2} J_{n/2-1}(r\rho) d\rho = \\ &= \frac{3^{2/3} \Gamma(2/3) \sqrt{y}}{(2\pi)^{n/2} r^{n/2-1} \pi \sqrt{3}} \int_0^\infty K_{1/3}(2/3 y^{3/2} \rho) \rho^{1/3+n/2} J_{n/2-1}(r\rho) d\rho, \end{aligned}$$

где  $J_{n/2-1}(r\rho)$  — функция Бесселя первого рода порядка  $\nu = n/2 - 1$ . Приведенная формула справедлива и при  $n = 1$ , что легко проверить. Последний интеграл выражается через гипергеометрическую функцию  $F$  [14]:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} K_{1/3}(2/3 y^{3/2} \rho) \rho^{1/3+n/2} J_{n/2-1}(r\rho) d\rho = \\ & = \frac{3^{n+1/3} \Gamma(n/2+1/3)}{2^{n/2+1} y^{3n/2+1/2}} F\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{3}, \frac{n}{2}; \frac{n}{2}; -\frac{9r^2}{4y^3}\right) = \\ & = \frac{3^{n+1/3} \Gamma(n/2+1/3)}{2^{n/2+1} y^{3n/2+1/2}} \left(1 + \frac{9r^2}{4y^3}\right)^{-n/2-1/3}. \end{aligned}$$

Окончательно получаем выражение для ядра

$$k_{n1}(x, y) = C_{n1}^* \frac{y}{(4y^3 + 9|x|^2)^{n/2+1/3}}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y > 0,$$

$$C_{n1}^* = \frac{3^{n+1/2} \Gamma(2/3) \Gamma(n/2+1/3)}{2^{1/3} \pi^{n/2+1}}.$$

Ядро имеет следующие свойства при  $y > 0$ :

- 1)  $k_{n1}(x, y) > 0$ ;
- 2)  $\int_{\mathbb{R}^n} k_{n1}(x, y) dx = 1$ ;
- 3) для  $\forall \delta > 0, \lim_{y \rightarrow +0} \sup_{|x| \geq \delta} k_{n1}(x, y) = 0$ .

Свойство 1 очевидно. Свойство 2 следует из того, что преобразование Фурье от  $k_n(x, y)$  есть  $3^{2/3} \Gamma(2/3) \text{Ai}(|t|^{2/3} y)$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^n} k_{n1}(x, y) e^{ixt} dx = 3^{2/3} \Gamma(2/3) \text{Ai}(|t|^{2/3} y).$$

Полагая  $t=0$ , получаем

$$\int_{\mathbb{R}^n} k_{n1}(x, y) dx = 3^{2/3} \Gamma(2/3) \text{Ai}(0) = 1.$$

Свойство 3 вытекает из того, что  $k_{n1}(x, y)$  монотонно убывающая функция  $|x|$ .

Перечисленные свойства означают, что  $k_{n1}(x, y)$  — аппроксимативная единица, или  $\delta$ -образная система функций  $x$  (с параметром  $y$ ), при  $y \rightarrow +0, k_{n1}(x, y)$  слабо сходящаяся к  $\delta$ -функции  $\delta(x)$ .

Если  $\psi(x)$  является ограниченной кусочно-непрерывной функцией, то свертка (8) существует и записывается в виде интеграла

$$u(x, y) = C_{n1}^* \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\psi(t) y}{(4y^3 + 9|x-t|^2)^{n/2+1/3}} dt.$$

Поскольку ядро интеграла — аппроксимативная единица, запишем равенство  $\lim_{y \rightarrow +0} u(x, y) = \psi(x)$  в точках непрерывности  $\psi(x)$ , которое означает, что интеграл представляет собой классическое решение задачи Дирихле.

В случае обобщенных функций медленного роста  $\psi(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , для которых свертка существует, функция  $u(x, y) = \psi(x) * k_{n1}(x, y)$  является обобщенным решением задачи Дирихле:

$$\lim_{y \rightarrow +0} u(x, y) = \psi(x) \text{ в } \mathcal{S}'.$$

Например, если  $\psi(x) = \delta(x)$ , то решением задачи Дирихле будет ядро интеграла

$$u(x, y) = \delta(x) * k_{n1}(x, y) = k_{n1}(x, y),$$

$$\lim_{y \rightarrow +0} k_{n1}(x, y) = \delta(x) \text{ в } \mathcal{S}'.$$

Если  $\psi(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , то согласно свойствам аппроксимативной единицы [5] имеем  $\lim_{y \rightarrow +0} u(x, y) = \psi(x)$  для почти всех  $x$ , если  $p < \infty$ , то  $u(x, y)$  сходится к  $\psi(x)$  по норме  $L^p(\mathbb{R}^n)$  при  $y \rightarrow +0$ .

Для  $n = 1$  интеграл, дающий решение задачи Дирихле для уравнения типа Трикоми (5)–(7), имеет вид

$$u(x, y) = \frac{3^{3/2} \Gamma(2/3) \Gamma(5/6)}{\pi^{3/2} 2^{1/3}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y \psi(t)}{(4y^3 + 9(x-t)^2)^{5/6}} dt.$$

Ядро интегрального представления решения задачи Дирихле для многомерного уравнения типа Трикоми, которое является аппроксимативной единицей:

$$k_{n1}(x, y) = C_{n1}^* \frac{y}{(4y^3 + 9|x|^2)^{n/2+1/3}} = \frac{1}{y^{n3/2}} \varphi\left(\frac{|x|}{y^{3/2}}\right),$$

где

$$\varphi(r) = \frac{C_{n1}^*}{(4 + 9r^2)^{n/2+1/3}},$$

т. е. ядро  $k_{n1}(x, y)$  — *автомодельное решение* уравнения типа Трикоми, которое можно найти методом подобия [15, 16]. Решим указанным методом задачу Дирихле для уравнения типа Трикоми — Келдыша.

**Решение задачи Дирихле для уравнения типа Трикоми — Келдыша при  $m > -2$  методом подобия.** Найдем ядро интегрального представления решения

задачи Дирихле (2)–(4), являющееся аппроксимативной единицей, в виде автомодельного решения уравнения типа Трикоми — Келдыша (2)

$$u(x, y) = \frac{1}{y^\alpha} \varphi\left(\frac{r}{y^\beta}\right), \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad (9)$$

где  $r = |x|$ , т. е. ищем сферически симметричное решение, зависящее только от  $|x| = r$ . Уравнение типа Трикоми — Келдыша (2) для сферически симметричной функции принимает вид

$$y^m \left( u_{rr} + \frac{n-1}{r} u_r \right) + u_{yy} = 0, \quad y > 0, \quad m > -2. \quad (10)$$

Для определения констант  $\alpha$  и  $\beta$  выполним в уравнении (10) замену переменных  $u = C^l \bar{u}$ ,  $r = C^k \bar{r}$ ,  $y = C \bar{y}$ ,  $C > 0$ , и потребуем, чтобы уравнение перешло само в себя. Получим уравнение в новых переменных

$$C^{m+l-2k} \left( \bar{u}_{\bar{r}\bar{r}} + \frac{n-1}{\bar{r}} \bar{u}_{\bar{r}} \right) + C^{l-2} \bar{u}_{\bar{y}\bar{y}} = 0.$$

Для того чтобы последнее уравнение совпало с уравнением (10), примем  $m+l-2k = l-2$ . Откуда

$$k = \frac{m+2}{2}, \quad l \text{ — любое.}$$

В новых переменных автомодельное решение должно иметь тот же вид (9)

$$\bar{u} = \frac{1}{\bar{y}^\alpha} \varphi\left(\frac{\bar{r}}{\bar{y}^\beta}\right).$$

Возвращаясь к старым переменным, получаем

$$u = \frac{c^{\alpha+l}}{y^\alpha} \varphi\left(\frac{c^{-k+\beta} r}{y^\beta}\right).$$

Для совпадения этого выражения с выражением (9) примем

$$\beta = k = \frac{m+2}{2}, \quad \alpha = -l,$$

т. е. любое. Возьмем  $\alpha = kn = n \frac{m+2}{2}$ . Из условия  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  следует, что  $m > -2$ .

Будем искать решение уравнения (10) в виде

$$u = \frac{1}{y^{kn}} \varphi\left(\frac{r}{y^k}\right), \quad k = \frac{m+2}{2}, \quad m > -2. \quad (11)$$

Подставив функцию (11) в уравнение (10), запишем уравнение

$$(1+k^2r^2)\varphi''(r)+\left(\frac{n-1}{r}+2k^2nr+k^2r+kr\right)\varphi'(r)+kn(kn+1)\varphi(r)=0.$$

Выполнив в этом уравнении замену переменной  $1+k^2r^2=\xi$ , для функции  $\bar{\varphi}(\xi)$  найдем гипергеометрическое уравнение

$$\xi(1-\xi)\bar{\varphi}''(\xi)+\left(\frac{n}{2}+1+\frac{1}{2k}-\xi\left(n+1+\frac{1}{2k}\right)\right)\bar{\varphi}'(\xi)-\left(\frac{n^2}{4}+\frac{n}{4k}\right)\bar{\varphi}(\xi)=0,$$

которое запишем в виде

$$\xi(1-\xi)\bar{\varphi}''(\xi)+(c-\xi(a+b+1))\bar{\varphi}'(\xi)-ab\bar{\varphi}(\xi)=0, \quad (12)$$

где

$$c=\frac{n}{2}+1+\frac{1}{2k}; \quad a=\frac{n}{2}; \quad b=\frac{n}{2}+\frac{1}{2k}.$$

Общее решение гипергеометрического уравнения (12) имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(\xi) &= C_1F(a, b; c; \xi) + C_2\xi^{1-c}F(b-c+1, a-c+1; 2-c; \xi) = \\ &= C_1F\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+\frac{1}{2k}; \frac{n}{2}+1+\frac{1}{2k}; \xi\right) + C_2\xi^{-n/2-1/2k}F\left(0, -\frac{1}{2k}; 1+\frac{n}{2}+\frac{1}{2k}; \xi\right) = \\ &= C_1F\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+\frac{1}{m+2}; \frac{n}{2}+1+\frac{1}{m+2}; \xi\right) + C_2\xi^{-n/2-1/(m+2)}. \end{aligned}$$

Здесь  $F(a, b; c; \xi)$  — гипергеометрическая функция. Возьмем частное решение (обозначим константу  $C_2$  как  $C_{nm}$ )

$$\bar{\varphi}(\xi) = \frac{C_{nm}}{\xi^{n/2+1/(m+2)}}.$$

Возвращаясь к старым переменным, получаем

$$\varphi(r) = \frac{C_{nm}}{\left(1+\left(\frac{m+2}{2}\right)^2 r^2\right)^{n/2+1/(m+2)}}.$$

Константу  $C_{nm}$  выберем такой, чтобы интеграл  $\varphi(|x|)$  по всему пространству  $\mathbb{R}^n$  был равен единице. Переходя к сферическим координатам и обозначая через  $\sigma_{n-1}$  площадь единичной сферы в пространстве  $\mathbb{R}^n$ , находим



$$C_{nm}^{-1} = C_{nm}^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(|x|) dx = \sigma_{n-1} \int_0^\infty \frac{r^{n-1} dr}{\left(1 + \left(\frac{m+2}{2}\right)^2 r^2\right)^{n/2+1/(m+2)}} =$$

$$= \frac{\sigma_{n-1}}{2 \left(\frac{m+2}{2}\right)^n} \int_0^\infty \frac{t^{n/2-1}}{(1+t)^{n/2+1/(m+2)}} dt = \frac{\sigma_{n-1} 2^{n-1}}{(m+2)^n} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{m+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{m+2}\right)}.$$

Здесь выполнена замена переменной  $\left(\left(\frac{m+2}{2}\right)r\right)^2 = t$  и использована формула

$$\int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{b+c}} dt = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}, \quad a > 0, \quad b > 0,$$

где  $\Gamma$  — гамма-функция Эйлера. Таким образом, имеем

$$C_{nm} = \frac{(m+2)^n \Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{m+2}\right)}{\pi^{n/2} 2^n \Gamma\left(\frac{1}{m+2}\right)}. \tag{13}$$

Автомодельное решение уравнения типа Трикоми — Келдыша, которое получено по формуле (11), обозначим как

$$k_{nm}(x, y) = \frac{1}{y^{n(m+2)/2}} \varphi\left(\frac{|x|}{y^{(m+2)/2}}\right) =$$

$$= \frac{C_{nm} y}{\left(y^{m+2} + \left(\frac{m+2}{2}\right)^2 |x|^2\right)^{n/2+1/(m+2)}}, \quad m > -2, \tag{14}$$

где  $C_{nm}$  — константа, определяемая по формуле (13).

При  $m = 0$  получаем ядро Пуассона

$$k_{n0}(x, y) = \frac{C_{n0} y}{\left(y^2 + |x|^2\right)^{(n+1)/2}}.$$

Здесь

$$C_{n0} = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}}.$$

При  $m = 1$  получаем ядро интегрального представления решения задачи Дирихле (5)–(7), найденное выше методом преобразования Фурье:

$$k_{n1}(x, y) = \frac{C_{n1}y}{\left(y^3 + \frac{9}{4}|x|^2\right)^{n/2+1/3}} = \frac{2^{n+2/3}C_{n1}y}{\left(4y^3 + 9|x|^2\right)^{n/2+1/3}},$$

где

$$2^{n+2/3}C_{n1} = \frac{2^{2/3}3^n\Gamma(n/2+1/3)}{\pi^{n/2}\Gamma(1/3)} = \frac{3^{n+1/2}\Gamma(2/3)\Gamma(n/2+1/3)}{2^{1/3}\pi^{n/2+1}} = C_{n1}^*.$$

Покажем, что функция  $k_{nm}(x, y)$ , определяемая по формуле (14), является аппроксимативной единицей в пространстве интегрируемых в  $\mathbb{R}^n$  функций, т. е. обладает следующими свойствами при  $y > 0$ :

- 1)  $k_{nm}(x, y) > 0$ ;
- 2)  $\int_{\mathbb{R}^n} k_{nm}(x, y) dx = 1$ ;
- 3) для  $\forall \delta > 0$ ,  $\lim_{y \rightarrow +0} \sup_{|x| \geq \delta} k_{nm}(x, y) = 0$ .

Свойства 1 и 3 доказывают так же, как и для  $m = 1$ . Докажем свойство 2. Имеем

$$\int_{\mathbb{R}^n} k_{nm}(x, y) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{y^{n(m+2)/2}} \varphi\left(\frac{|x|}{y^{(m+2)/2}}\right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(|t|) dt = 1.$$

Следовательно, решение задачи Дирихле для уравнения типа Трикоми может быть записано в виде свертки граничной функции  $\psi(x)$  с ядром  $k_{nm}(x, y)$  (если свертка существует)

$$u(x, y) = \psi(x) * k_{nm}(x, y).$$

Если  $\psi(x)$  — ограниченная кусочно-непрерывная функция, то свертка существует и записывается в виде интеграла

$$u(x, y) = C_{nm} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\psi(t)y}{\left(y^{m+2} + ((m+2)/2)^2|x-t|^2\right)^{n/2+1/(m+2)}} dt.$$

В точках непрерывности функции  $\psi(x)$   $\lim_{y \rightarrow +0} u(x, y) = \psi(x)$ , т. е. интеграл представляет собой классическое решение задачи Дирихле.

Для обобщенных функций медленного роста  $\psi(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , для которых свертка существует, функция

$$u(x, y) = \psi(x) * k_{nm}(x, y)$$

является обобщенным решением задачи Дирихле,  $\lim_{y \rightarrow +0} u(x, y) = \psi(x)$  в  $\mathcal{S}'$ .

Например, если  $\psi(x) = \delta(x)$ , то решением задачи Дирихле будет ядро интеграла

$$u(x, y) = \delta(x) * k_{nm}(x, y) = k_{nm}(x, y),$$

$$\lim_{y \rightarrow +0} k_{nm}(x, y) = \delta(x) \text{ в } \mathcal{S}'.$$

Если  $\psi(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , то из свойств аппроксимативной единицы [5] следует, что  $\lim_{y \rightarrow +0} u(x, y) = \psi(x)$  для почти всех  $x$ , если  $p < \infty$ , то функция  $u(x, y)$  сходится к  $\psi(x)$  по норме  $L^p(\mathbb{R}^n)$  при  $y \rightarrow +0$ .

**Пример.** В случае  $n=1$ ,  $m=-1$  имеем задачу Дирихле для уравнения Келдыша

$$u_{xx} + yu_{yy} = 0, \quad -\infty < x < \infty, y > 0;$$

$$u(x, 0) = \psi(x), \quad -\infty < x < \infty;$$

$$u(x, y) \text{ ограничена при } y \rightarrow \infty.$$

Если  $\psi(x)$  — ограниченная кусочно-непрерывная функция, то решение этой задачи представим интегралом

$$u(x, y) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y \psi(t) dt}{(4y + (x-t)^2)^{3/2}}.$$

Возьмем

$$\psi(x) = \begin{cases} a, & x < 0; \\ b, & x > 0, \end{cases}$$

тогда

$$\begin{aligned} u(x, y) &= 2ay \int_{-\infty}^0 \frac{dt}{(4y + (x-t)^2)^{3/2}} + 2by \int_0^{\infty} \frac{dt}{(4y + (x-t)^2)^{3/2}} = \\ &= \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \frac{x}{\sqrt{4y+x^2}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Легко проверить, что функция (15)

- 1) удовлетворяет уравнению Келдыша  $u_{xx} + yu_{yy} = 0$ ,  $y > 0$ ;
- 2) ограничена  $|u(x, y)| \leq \max(|a|, |b|)$ ,  $y > 0$ ;
- 3) удовлетворяет краевому условию

$$\lim_{y \rightarrow +0} u(x, y) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \frac{x}{|x|} = \begin{cases} a, & x < 0 \\ b, & x > 0 \end{cases} = \psi(x).$$

В точке разрыва

$$\lim_{y \rightarrow +0} u(0, y) = \frac{a+b}{2}.$$

**Заключение.** Найдено точное решение задачи Дирихле для вырождающегося на границе эллиптического уравнения типа Трикоми — Келдыша в полупространстве. Решение записано в виде интеграла, обобщающего известную формулу Пуассона для уравнения Лапласа.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Келдыш М.В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области // ДАН СССР. 1951. Т. 77. № 2. С. 181–183.
2. Берс Л. Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. М.: Изд-во Иностранной литературы, 1961. 208 с.
3. Otway T.H. Dirichlet problem for elliptic-hyperbolic equations of Keldych type. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2012. 214 p.
4. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. 296 с.
5. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973. 344 с.
6. Парасюк Л.С. Граничні задачі для еліптичних диференціальних рівнянь, що виходять на границі області // Українська академія друкарства. Наукові записки. 1961. № 13. С. 65–75.
7. Barros-Neto J., Gelfand I.M. Fundamental solutions for the Tricomi operator // Duke Math. J. 1999. Vol. 98(3). P. 465–483.
8. Barros-Neto J., Gelfand I.M. Fundamental solutions for the Tricomi operator, II // Duke Math. J. 2002. Vol. 111 (3). P. 561–584.
9. Barros-Neto J., Gelfand I.M. Fundamental solutions for the Tricomi operator, III // Duke Math. J. 2005. Vol. 128(1). P. 119–140.
10. Barros-Neto J., Cardoso F. Bessel integrals and fundamental solutions for a generalized Tricomi operator // Journal of Functional Analysis. 2001. Vol. 183. P. 472–497. DOI: 10.1006/jfan.2001.3749
11. Алгазин О.Д., Конаев А.В. Решение смешанной краевой задачи для уравнения Лапласа в многомерном бесконечном слое // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2015. № 1. С. 3–13. DOI: 10.18698/1812-3368-2015-1-3-13
12. Алгазин О.Д., Конаев А.В. Решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона в многомерном бесконечном слое // Математика и математическое моделирование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2015. № 4. DOI: 10.7463/mathm.0415.0812943 URL: <http://mathmjournal.ru/doc/812943.html>
13. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979. 320 с.
14. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.

15. Баренблатт Г.И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л.: Гидрометеиздат, 1982. 256 с.
16. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 2005. 256 с.

**Алгазин Олег Дмитриевич** — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5).

**Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Алгазин О.Д. Точное решение задачи Дирихле для вырождающегося на границе эллиптического уравнения типа Трикоми — Келдыша в полупространстве // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2016. № 5. С. 4–17.  
DOI: 10.18698/1812-3368-2016-5-4-17

**EXACT SOLUTION TO THE DIRICHLET PROBLEM FOR DEGENERATING ON THE BOUNDARY ELLIPTIC EQUATION OF TRICOMI — KELDYSH TYPE IN THE HALF-SPACE**

**O.D. Algazin**

mopi66@yandex.ru

**Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation**

**Abstract**

In the paper we solve the Dirichlet problem for a multidimensional equation by means of Fourier transform method and similarity method. The problem is a generalization of the Tricomi, Gellerstedt and Keldysh equations in the half-space, the equation is of an elliptic type with the boundary condition on the boundary hyperplane where equation degenerates. We present the solution in the form of an integral with a simple kernel. It is an approximation to the identity and self-similar solution of Tricomi type equation. In particular, this formula contains a Poisson's formula, which gives the solution of the Dirichlet problem for the Laplace equation for the half-space. If the given boundary value is a generalized function of slow growth, the solution of the Dirichlet problem can be presented as a convolution of this function with the kernel (if a convolution exists)

**Keywords**

*Fourier transform, Tricomi equation, Dirichlet problem, approximation to the identity, self-similar solution, similarity method, generalized functions of slow growth*

**REFERENCES**

- [1] Keldysh M.V. On some cases of degenerate elliptic equations on the boundary of a domain. *Dokl. Akad. nauk USSR* [Proc. Acad. Sci. USSR], 1951, vol. 77, no. 2, pp. 181–183 (in Russ.).
- [2] Bers L. *Mathematical aspects of subsonic and transonic gas dynamics*. N.Y., Wiley, 1958.
- [3] Otway T.H. *Dirichlet problem for elliptic-hyperbolic equations of Keldych type*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2012. 214 p.

- [4] Bitsadze A.V. Equations of mathematical physics. Moscow, Mir Publ., 1980. 318 p.
- [5] Stein E. Singular integrals and differentiability properties of functions. N.J., Princeton University Press, 1970.
- [6] Parasyuk L.S. Boundary problems for elliptic differential equations that degenerate on the boundary of domain. *Ukrainska akademiya drukarstva. Naukovi zapysky*, 1961, no. 13, pp. 65–75 (in Ukrainian).
- [7] Barros-Neto J., Gelfand I.M. Fundamental solutions for the Tricomi operator. *Duke Math. J.* 1999, vol. 98(3), pp. 465–483.
- [8] Barros-Neto J., Gelfand I.M. Fundamental solutions for the Tricomi operator, II. *Duke Math. J.*, 2002, vol. 111(3), pp. 561–584.
- [9] Barros-Neto J., Gelfand I.M. Fundamental solutions for the Tricomi operator, III. *Duke Math. J.*, 2005, vol. 128(1), pp. 119–140.
- [10] Barros-Neto J., Cardoso F. Bessel integrals and fundamental solutions for a generalized Tricomi operator. *Journal of Functional Analysis*, 2001, vol. 183, pp. 472–497. DOI: 10.1006/jfan.2001.3749
- [11] Algazin O.D., Kopaev A.V. Solution to the mixed boundary-value problem for Laplace equation in multidimensional infinite layer. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2015, no. 1, pp. 3–13 (in Russ.). DOI: 10.18698/1812-3368-2015-1-3-13
- [12] Algazin O.D., Kopaev A.V. Dirichlet problem solution for Poisson equation in a multidimensional infinite layer. *Mat. i mat. model. MGTU im. N.E. Baumana* [Mathematics and Mathematical Modelling of the Bauman MSTU. Electron. Journ.], 2015, no. 4. DOI: 10.7463/mathm.0415.0812943 Available at: <http://mathjournal.ru/en/doc/812943.html>
- [13] Vladimirov V.S. *Obobshchennye funktsii v matematicheskoy fizike* [Generalized functions in mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 320 p.
- [14] Ryshik I.M., Gradstein I.S. Tables of integrals, series, and products. N.Y., Academic Press, 2007.
- [15] Barenblatt G.I. Scaling, self-similarity, and intermediate asymptotics. Cambridge University Press, 2002.
- [16] Polyanin A.D., Zaytsev V.F., Zhurov A.I. *Metody resheniya nelineynykh uravneniy matematicheskoy fiziki i mekhaniki* [Methods for solving nonlinear equations of mathematical physics and mechanics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2005. 256 p.

**Algazin O.D.** — Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Professor of Computational Mathematics and Mathematical Physics Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Please cite this article in English as:**

Algazin O.D. Exact Solution to the Dirichlet Problem for Degenerating on the Boundary Elliptic Equation of Tricomi — Keldysh Type in the Half-Space. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2016, no. 5, pp. 4–17. DOI: 10.18698/1812-3368-2016-5-4-17