

## СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОЦЕНОК ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ОДНОНАПРАВЛЕННОГО ВОЛОКНИСТОГО КОМПОЗИТА

В.С. Зарубин

fn2@bmstu.ru

Г.Н. Кувыркин

И.Ю. Савельева

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

---

### Аннотация

На основе двойственной вариационной формулировки стационарной задачи теплопроводности в неоднородном анизотропном твердом теле построены двусторонние оценки главных значений тензора теплопроводности с учетом взаимного расположения поперечных сечений анизотропных армирующих волокон в плоскости, перпендикулярной их осям. Рассмотрены варианты расположения поперечных сечений волокон, при которых композит по отношению к свойству теплопроводности является трансверсально изотропным или ортотропным. Построенные оценки ограничивают область возможных значений компонент тензора теплопроводности изучаемого композита, что позволяет провести объективный сравнительный анализ расчетных зависимостей, полученных с использованием различных подходов и предназначенных для определения искомым характеристик. Представлены оценки наибольшей погрешности, возникающей при выборе в качестве искомым значений каждой компоненты тензора теплопроводности композита полусуммы ее граничных значений. Установлены области определяющих параметров, в которых расчетные зависимости позволяют получить надежные результаты при значительном различии теплопроводности матрицы композита и волокон

### Ключевые слова

Однонаправленный волокнистый композит, двойственная вариационная формулировка задачи установившейся теплопроводности, тензор эффективной теплопроводности

Поступила в редакцию 01.12.2015

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016

---

*Работа выполнена по гранту МК-6573.2015.8 программы Президента России государственной поддержки ведущих научных школ и молодых кандидатов наук, а также в рамках проекта 1712 в сфере научной деятельности в части государственного задания 2014/104 Минобрнауки России и государственного задания по проекту 1.2640.2014*

**Введение.** Механические характеристики волокнистых композитов определяют их все более широкое использование в технике в качестве современного конструкционного материала [1–3]. Одно из существенных преимуществ волокнистых композитов заключается в том, что технологический процесс их получения

как конструкционного материала обычно совмещен по времени с изготовлением конструкции из этого материала [4, 5]. Достаточно часто применяемыми волокнистыми композитами являются однонаправленные композиты. Структура однонаправленного волокнистого композита состоит из одинаково ориентированных в пространстве сравнительно длинных армирующих волокон, расположенных в отвержденном связующем, которое образует матрицу композита. Подбор свойств волокон и материала матрицы позволяет увеличить диапазон возможного изменения характеристик волокнистых композитов и тем самым расширить область применения композита. Для теплонапряженных конструкций, подверженных интенсивным механическим и тепловым воздействиям, кроме механических характеристик важны и теплофизические характеристики конструкционного материала (в том числе его теплопроводность) [6].

Однонаправленный волокнистый композит по отношению к теплопроводности является анизотропным материалом, характеризуемым тензором второго ранга эффективной теплопроводности. Компоненты этого тензора зависят от параметров, которые входят в математическую модель теплового взаимодействия волокон и матрицы в таком композите. Существуют различные подходы к построению модели [7–11], позволяющие получить расчетные зависимости для количественной оценки компонент тензора эффективной теплопроводности однонаправленного волокнистого композита.

Используемый в настоящей работе вариационный подход основан на модификации двойственной вариационной формулировки задачи установившейся теплопроводности в неоднородном анизотропном твердом теле [12]. Эта формулировка включает в себя два альтернативных функционала (минимизируемый и максимизируемый), достигающих на истинном решении задачи совпадающих экстремальных значений. Значение минимизируемого функционала на любом из приближенных решений задачи будет не меньше, чем на истинном, а значение максимизируемого — не больше, чем на истинном решении. Такое свойство двойственной вариационной формулировки задачи позволяет установить двусторонние границы возможных значений компонент тензора эффективной теплопроводности рассматриваемого композита как неоднородного анизотропного твердого тела и оценить наибольшую погрешность, если каждую искомую компоненту приравнять полусумме установленных граничных значений. Вариационный подход реализован в настоящей работе путем рассмотрения представительного элемента структуры композита, отражающего свойства композита и учитывающего взаимное расположение армирующих волокон.

**Основные соотношения.** Пусть однонаправленный волокнистый композит занимает односвязную область  $V$ , в которой отсутствуют объемные источники (или стоки) тепловой энергии. Тогда установившееся распределение температуры  $T(M)$ ,  $M \in V$ , зависящее от положения точки  $M$  в области  $V$ , будет удовлетворять дифференциальному уравнению [13]:

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\lambda}(M) \cdot \nabla T(M)) = 0 \quad \forall M \in V, \quad (1)$$

где  $\nabla$  — векторный дифференциальный оператор Гамильтона;  $\boldsymbol{\lambda}$  — тензор второго ранга теплопроводности композита; знак « $\cdot$ » обозначает операцию свертки по одинаковым индексам этих сомножителей при их координатном представлении.

Для однозначного решения уравнения (1) необходимо располагать граничными условиями на поверхности  $S$  области  $V$ . Выделим на этой поверхности участки  $S_T \subseteq S$  и  $S_q = S \setminus S_T$ . На участках  $S_T$  примем известными распределения температуры, определяемые по равенству

$$T(N) = f_T(N) \quad \forall N \in S_T, \quad (2)$$

где  $f_T(N)$  — заданная функция, зависящая от положения точки  $N$  на участках  $S_T$ . На участках  $S_q$  граничные условия запишем как

$$\mathbf{n}(N) \cdot \boldsymbol{\lambda} \cdot \nabla T(N) + f_q(N) = 0 \quad \forall N \in S_q. \quad (3)$$

Здесь  $\mathbf{n}(N)$  — единичный вектор внешней нормали к поверхности  $S$  в точках  $N \in S_q$ ;  $f_q(N)$  — заданная функция, зависящая от положения точки  $N$  на участках  $S_q$ .

Уравнение (1) и граничные условия (2), (3) составляют дифференциальную формулировку задачи установившейся теплопроводности в неоднородном анизотропном композите, расположенном в рассматриваемой области  $V$ . Этой формулировке можно поставить в соответствие вариационную формулировку задачи, содержащую минимизируемый функционал

$$J[U] = \frac{1}{2} \int_V (\nabla T(M)) \cdot \boldsymbol{\lambda}(M) \cdot \nabla T(M) dV(M) + \int_{S_q} f_q(N) T(N) dS(N). \quad (4)$$

Функционал (4) допустимо рассматривать на множестве непрерывных в области  $V$  и кусочно дифференцируемых в ней функций  $T(M)$ ,  $M \in V$ , удовлетворяющих в качестве дополнительного условию (2) на участках  $S_T$  поверхности  $S$ . Этот функционал является строго выпуклым (вниз) [12, 14] и в стационарной точке  $T^*(M)$ ,  $M \in \bar{V} = V \cup S$ , достигает наименьшего значения

$$J[T^*] = \frac{1}{2} \int_V (\nabla T^*(M)) \cdot \boldsymbol{\lambda}(M) \cdot \nabla T^*(M) dV(M) + \int_{S_q} f_q(N) T^*(N) dS(N). \quad (5)$$

В случае достаточной гладкости функции  $T^*(M)$  она будет удовлетворять дифференциальной формулировке задачи, включающей в себя дифференциальное уравнение (1) и граничные условия (2), (3).

Область определения функционала (4) можно расширить введением векторной функции  $\mathbf{q}(M) = -\boldsymbol{\lambda}(M) \cdot \nabla T(M)$ ,  $M \in \bar{V}$ , соответствующей вектору

плотности теплового потока. Если наложить на эту функцию дополнительные условия, определяемые по уравнению

$$\nabla \cdot \mathbf{q}(M) = 0 \quad \forall M \in V \quad (6)$$

и равенству

$$\mathbf{q}(N) \cdot \mathbf{n}(N) = f_q(N) \quad \forall N \in S_q, \quad (7)$$

то получим альтернативный по отношению к функционалу (4) максимизируемый функционал

$$I[\mathbf{q}] = -\frac{1}{2} \int_V \mathbf{q}(M) \cdot \hat{\rho}(M) \cdot \mathbf{q}(M) dV(M) - \int_{S_T} f_T(N) \mathbf{q}(N) \cdot \mathbf{n}(N) dS(N), \quad (8)$$

где  $\hat{\rho}$  — тензор второго ранга, обратный тензору  $\lambda$ . Функционал (8) допустимо рассматривать на множестве непрерывно дифференцируемых в области  $V$  векторных функций  $\mathbf{q}(M)$ ,  $M \in V$ , удовлетворяющих уравнению (6) и равенству (7) и интегрируемых на участках  $S_T$  поверхности  $S$ . Функционал (8) является строго выпуклым вверх [12, 14] и в стационарной точке  $\mathbf{q}^*(M)$ ,  $M \in V$ , достигает наибольшего значения  $I[\mathbf{q}^*]$ , совпадающего со значением  $J[T^*]$ , определяемым по формуле (5).

Альтернативные функционалы (4) и (8) в сочетании с соотношением

$$J[T] \geq J[T^*] = I[\mathbf{q}^*] \geq I[\mathbf{q}] \quad (9)$$

составляют двойственную вариационную формулировку задачи установившейся теплопроводности в неоднородном анизотропном твердом теле. Использование этой формулировки позволяет установить двусторонние границы, между которыми должны быть расположены искомые значения тензорных характеристик теплопроводности однонаправленного волокнистого композита, а также оценить наибольшую возможную погрешность, которая возникает в случае приравнивания этих характеристик полусумме установленных граничных значений.

**Представительный элемент структуры композита.** В качестве области  $V$ , занятой однонаправленным волокнистым композитом, выберем прямоугольный параллелепипед со сторонами  $B_\nu$ ,  $\nu = 1, 2, 3$ , объемом  $V_0 = B_1 B_2 B_3$ . В одной из вершин этого параллелепипеда поместим начало прямоугольной декартовой системы координат  $Ox_1 x_2 x_3$ , координатные оси которой направлены вдоль ребер, исходящих из этой вершины. Примем, что все волокна ориентированы параллельно координатной оси  $Ox_3$ .

Матрицу композита полагаем изотропной с коэффициентом теплопроводности  $\lambda$ , а волокна — трансверсально изотропными с главными значениями тензора теплопроводности  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_\perp$  и  $\lambda_3 = \lambda_\parallel$ , определенными в выбранной системе координат. В этом случае главные оси тензора  $\lambda^*$  эффективной тепло-

проводности композита будут совпадать с координатными осями  $Ox_v$ . Главные оси тензора  $\hat{\rho}^*$ , обратного тензору  $\lambda^*$ , также совпадают с координатными осями.

Выделенный прямоугольный параллелепипед является представительным элементом структуры однонаправленного волокнистого композита и обладает идентичными с ним характеристиками теплопроводности. При одинаковом для всех волокон радиусе  $r$  предельное значение  $C_V^*$  их объемной концентрации  $C_V$  будет равно  $\pi/4 \approx 0,7854$ . Если на двух противоположных гранях параллелепипеда задать не равные значения температуры, то применение двойственной вариационной формулировки в виде сочетания альтернативных функционалов (4), (8) и соотношения (9) позволяет оценить главное значение тензора  $\lambda^*$ , соответствующее координатной оси, перпендикулярной этой грани. Последовательное изменение выбираемых противоположных граней параллелепипеда дает возможность получить оценки для всех трех главных значений этого тензора, характеризующих полусумму установленных граничных значений.

**Теплопроводность композита вдоль волокон.** Применим двойственную вариационную формулировку задачи установившейся теплопроводности к оценке главного значения  $\lambda_3^*$  тензора  $\lambda^*$  эффективной теплопроводности однонаправленного волокнистого композита в направлении, параллельном волокнам. На грани  $x_3 = 0$  прямоугольного параллелепипеда зададим нулевое значение температуры, а на грани  $x_3 = B_3$  — значение  $T_3$ . Остальные грани параллелепипеда полагаем идеально теплоизолированными. Примем в области  $V$ , соответствующей выбранному выше представительному элементу структуры композита, в качестве допустимого для функционала (4) линейное распределение температуры  $T(x_3) = T_3 x_3 / B_3$ . Тогда этот функционал будет равен

$$J_3 = \frac{T_3^2}{2B_3^2} \int_V \lambda_3(M) dV(M).$$

Здесь  $\lambda_3 = \lambda$ , если точка  $M \in V$  принадлежит подобласти, занятой матрицей композита, и  $\lambda_3 = \lambda_{||}$ , если эта точка соответствует волокну. В результате получим

$$J_3 = \lambda T_3^2 B_1 B_2 \frac{1 - C_V + \bar{\lambda}_{||} C_V}{2B_3}, \quad (10)$$

где  $\bar{\lambda}_{||} = \lambda_{||} / \lambda$ .

Принятому линейному распределению температуры соответствует вектор  $q$  плотности теплового потока, имеющий единственные составляющие  $q_3 = -\lambda T_3 / B_3 = \text{const}$  в матрице и  $q_3 = -\lambda_{||} T_3 / B_3 = \text{const}$  в волокнах, что приведет к значению максимизируемого функционала (8)

$$I_3 = -\frac{T_3^2 B_1 B_2}{2B_3} ((q_3)^2 \rho (1 - C_V) + q_3^2 \rho_{\parallel} C_V) - U_3 B_1 B_2 (q_3 (1 - C_V) + q_3 C_V),$$

где  $\rho = 1/\lambda$ ,  $\rho_{\parallel} = 1/\lambda_{\parallel}$  — главные значения тензора  $\hat{\rho}$  в формуле (8) при расположении точки  $M$  в подобласти, занятой матрицей или волокнами. После подстановки в приведенное равенство формул для составляющих вектора плотности теплового потока получим значение  $I_3$ , совпадающее со значением  $J_3$  (10). Таким образом, в соответствии с соотношением (9) следует принять  $J_3[T^*] = J_3$ .

Если композит принадлежит области  $V$  с однородной анизотропной средой и искомыми эффективными характеристиками композита, определяемыми тензором  $\lambda^*$ , то принятое выше распределение температуры будет при такой замене истинным:  $T^*(x_3) = T_3 x_3 / B_3$ . Тогда из формулы (5) получим

$$J_3[T^*] = \lambda_3^* T_3^2 \frac{B_1 B_2}{2B_3}$$

и с учетом равенства (10) запишем

$$\lambda_3^* = \lambda (1 - C_V + \bar{\lambda}_{\parallel} C_V). \tag{11}$$

Оценка (11) совпадает с известной формулой, получаемой обычно с применением правила смеси [7, 10]. Следует отметить, что оценка  $\lambda_3^*$  достаточно хорошо согласуется с немногочисленными экспериментальными данными измерения коэффициента теплопроводности однонаправленного волокнистого композита вдоль волокон [2, 5].

**Теплопроводность композита поперек волокон.** Если на противоположных гранях  $x_1 = 0$  и  $x_1 = B_1$  (или  $x_2 = 0$  и  $x_2 = B_2$ ) параллелепипеда задать значения температуры  $T = 0$  и  $T = T_1$  (или  $T = 0$  и  $T = T_2$ ), а остальные грани полагать идеально теплоизолированными, то каждое сечение этого параллелепипеда, перпендикулярное координатной оси  $Ox_3$ , допустимо рассматривать независимо, т. е. задачу установившейся теплопроводности свести к двумерной в прямоугольнике со сторонами  $B_1$  и  $B_2$ , параллельными координатным осям  $Ox_1$  и  $Ox_2$ . Начало системы координат  $Ox_1 x_2$  выберем в вершине прямоугольника. В двумерном случае минимизируемый функционал (4) примет вид

$$J'[T] = \frac{1}{2} \int_F (\nabla T(M)) \cdot \lambda(M) \cdot \nabla T(M) dF(M), \quad M \in F, \tag{12}$$

где  $F = B_1 B_2$  — площадь прямоугольника; при задании на гранях  $x_1 = 0$  и  $x_1 = B_1$  параллелепипеда значений температуры  $T = 0$  и  $T = T_1$  функционалу (8) будет соответствовать максимизируемый функционал

$$I'[q] = -\frac{1}{2} \int_F \mathbf{q}(M) \cdot \hat{\rho}(M) \cdot \mathbf{q}(M) dF(M) - T_1 \int_{\Gamma'} q_1(P) d\Gamma(P), \quad P \in \Gamma'. \tag{13}$$

Здесь  $q_1(P)$  — проекция вектора  $\mathbf{q}$  на координатную ось  $Ox_1$  в точках  $P \in \Gamma'$  стороны  $\Gamma'$  прямоугольника длиной  $B_2$ , на которой задано значение температуры  $T_1$ .

Вместо равенства (5) теперь следует записать

$$J'[T^*] = \frac{1}{2} \int_F (\nabla T^*(M)) \cdot \lambda(M) \cdot \nabla T^*(M) dF(M). \quad (14)$$

При этом соотношение (9) сохраняет силу в виде

$$J'[T] \geq J'[T^*] = I'[\mathbf{q}^*] \geq I'[\mathbf{q}]. \quad (15)$$

Волокна в плоскости прямоугольника будут представлены круговыми поперечными сечениями радиусом  $r$ , равным радиусу волокон. При хаотическом расположении поперечных сечений волокон все направления в плоскости прямоугольника равноправны, а эффективные характеристики теплопроводности композита не зависят от выбора конкретного направления, т. е. композит в этой плоскости является изотропным с искомыми главными значениями  $\lambda_1^* = \lambda_2^*$  тензора теплопроводности  $\lambda^*$ , а с учетом главного значения  $\lambda_3^*$  будет трансверсально изотропным относительно координатной оси  $Ox_3$ , параллельной волокнам. Тогда при выборе в прямоугольнике допустимого для функционала (12) одномерного распределения температуры  $T(x_1) = T_1 x_1 / B_1$  значение этого функционала составит

$$J'_1 = \lambda T_1^2 B_2 \frac{1 - C_V + \bar{\lambda} C_V}{2 B_1},$$

где  $\bar{\lambda} = \lambda_{\perp} / \lambda$ .

Для функционала (13) в качестве допустимого распределения вектора  $\mathbf{q}$  примем постоянное значение  $q_1$  единственной составляющей вектора, соответствующей его проекции на координатную ось  $Ox_1$ , и запишем

$$I'_1 = -\frac{q_1^2 B_1 B_2}{2} (\rho (1 - C_V) + \rho_{\perp} C_V) - T_1 B_2 q_1.$$

Здесь  $\rho_{\perp} = 1 / \lambda_{\perp}$  — главное значение тензора  $\hat{\rho}$  в формуле (13) при расположении точки  $M$  в подобласти, занятой волокнами. Значение  $q_1$  следует из необходимого условия  $dI_1 / dD_1 = 0$  максимума функционала (13) и равно  $q_1 = -\lambda (T_1 / B_1) / (1 - C_V + C_V / \bar{\lambda})$ ,  $\bar{\lambda} = \lambda_{\perp} / \lambda$ . В результате находим

$$I'_1 = \frac{\lambda T_1^2 B_2 / (2 B_1)}{1 - C_V + C_V / \bar{\lambda}}.$$

В случае однородной среды с оцениваемым главным значением  $\lambda_1^*$  тензора  $\lambda^*$  эффективной теплопроводности композита принятое распределение темпе-

ратуры является истинным, поэтому согласно равенству (14) получим  $J[T^*] = \lambda_1^* T_1^2 B_2 / (2B_1)$ . Используя значения  $J_1^+$ ,  $I_1^+$ ,  $J[T^*]$  и соотношение (15), определяем двусторонние оценки

$$\lambda_1^+ = \frac{\lambda_1^+}{\lambda} = 1 - C_V + C_V \bar{\lambda} \geq \lambda_1 = \frac{\lambda_1^*}{\lambda} \geq \frac{1}{1 - C_V + C_V / \bar{\lambda}} = \lambda_1^- = \frac{\lambda_1^-}{\lambda}. \quad (16)$$

Аналогично можно независимо получить идентичные оценки главного значения  $\lambda_2^* = \lambda_1^*$ , если задать значения  $T = 0$  и  $T = T_2$  на сторонах  $x_2 = 0$  и  $x_2 = B_2$  прямоугольника, полагая стороны  $x_1 = 0$  и  $x_1 = B_1$  идеально теплоизолированными.

Определяемые по соотношению (16) двусторонние оценки совпадают при  $C_V = 0$  и теоретически возможном значении  $C_V = 1$ , если принять, что радиус волокон является переменным, убывая от некоторого конечного значения  $r$  до бесконечно малого (это позволяет заполнить волокнами весь объем композита). При промежуточных значениях  $C_V \in (0; 1)$  разность  $\lambda_1^+ - \lambda_1^-$  возрастает по мере отклонения параметра  $\bar{\lambda}$  от единицы. Если в качестве главного значения  $\lambda_1^* = \lambda_2^*$  тензора теплопроводности композита выбрать полусумму полученных оценок, то отношение  $\eta = (\lambda_1^+ - \lambda_1^-) / (\lambda_1^+ + \lambda_1^-)$  можно рассматривать как наибольшую возможную относительную погрешность, которая может возникнуть при таком выборе. Наибольших значений  $\eta_m = 1 - 1 / (1 + (\bar{\lambda} + 1 / \bar{\lambda} - 2) / 8)$  относительная погрешность достигает при  $C_V = 1/2$ .

Двусторонние оценки можно сблизить, если использовать подход, предложенный в работе [16], что приводит к соотношению

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_1^+ &= \lambda_1^+ - \frac{(\lambda - \lambda_{\perp})^2 C_V (1 - C_V)}{(1 - C_V) \lambda_{\perp} + C_V \lambda + \max\{\lambda, \lambda_{\perp}\}} \geq \lambda_1^* \geq \\ &\geq \lambda^+ - \frac{(\lambda - \lambda_{\perp})^2 C_V (1 - C_V)}{(1 - C_V) \lambda_{\perp} + C_V \lambda + \min\{\lambda, \lambda_{\perp}\}} = \hat{\lambda}_1^-. \end{aligned} \quad (17)$$

Такие же оценки можно получить, если применить сингулярное приближение теории случайных функций [8].

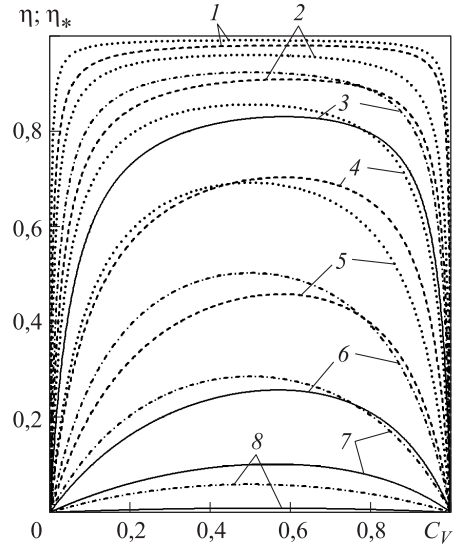
Зависимости погрешности  $\eta$  и  $\eta^* = (\hat{\lambda}_1^+ - \hat{\lambda}_1^-) / (\hat{\lambda}_1^+ + \hat{\lambda}_1^-)$  от объемной концентрации  $C_V$  при различных значениях  $\bar{\lambda} > 1$  приведены на рис. 1. Зависимости  $\eta(C_V)$  одинаковы для значений  $\bar{\lambda}$  и  $1/\bar{\lambda}$ , а кривая  $\eta^*$  при фиксированном значении  $\bar{\lambda}$  совпадает с кривой для значения  $1/\bar{\lambda}$  при условии замены абсциссы  $C_V$  абсциссой  $1 - C_V$ . Сравнение показывает, что использование оценок, определяемых по соотношению (17), существенно уменьшает наибольшую возможную относительную погрешность при  $0,1 < \bar{\lambda} < 10$ , если за значение  $\lambda_1^*$  выбрать полусумму этих оценок. Однако при  $\bar{\lambda} > 10$  и  $\bar{\lambda} < 0,1$  происходит сближе-



ние значений  $\eta_*$  и  $\eta$ , а при  $\bar{\varepsilon} = 1000$  различием кривых  $\eta$  и  $\eta_*$  можно пренебречь. Таким образом, и оценки, определяемые по соотношению (17), не обеспечивают заметное снижение возможной погрешности при большом отклонении значения  $\bar{\lambda}$  от единицы. Полученные двусторонние оценки не учитывают конкретное расположение волокон в композите. Вариационный подход, основанный на двойственной вариационной формулировке задачи установившейся теплопроводности, позволяет при построении оценок использовать информацию о взаимном расположении волокон.

**Рис. 1.** Зависимости наибольшей возможной относительной погрешности вычисления главных значений тензора эффективной теплопроводности композита от объемной концентрации волокон при значениях параметра  $\bar{\lambda} = 1000$  (1), 200 (2), 100 (3), 50 (4), 20 (5), 10 (6), 5 (7) и 2 (8):

$\eta$  — пунктирные и штрихпунктирные линии;  $\eta_*$  — штриховые и сплошные линии



**Влияние взаимного расположения волокон.** Однонаправленный волокнистый композит является трансверсально изотропным по отношению к теплопроводности не только при хаотическом расположении поперечных сечений волокон в плоскости рассмотренного выше прямоугольника. Это свойство будет сохранено, когда центры круговых поперечных сечений волокон одинакового радиуса  $r$  совпадают с узлами плоской сетки с одинаковыми ячейками в виде правильных треугольников, квадратов и правильных шестиугольников, поскольку ось, проходящая через центр таких многоугольников перпендикулярно их плоскости, имеет порядок выше второго [17]. Если сетка состоит из одинаковых прямоугольных ячеек, то  $\lambda_2^* \neq \lambda_1^*$  и композит будет ортотропным по отношению к теплопроводности.

Рассмотрим расположение волокон, соответствующее прямоугольной ячейке со сторонами, равными  $2b_1$  и  $2b_2$ . Для определенности примем  $b_1 \geq b_2$  и поместим центр поперечного сечения волокна в одной из вершин прямоугольной ячейки, совместив с этой вершиной начало локальной прямоугольной декартовой системы координат  $O\xi_1\xi_2$ . Выделим в ячейке четвертую часть, содержащую четверть поперечного сечения волокна радиусом  $r$  (рис. 2). Остальная площадь ячейки соответствует матрице композита. При касании соседних волокон

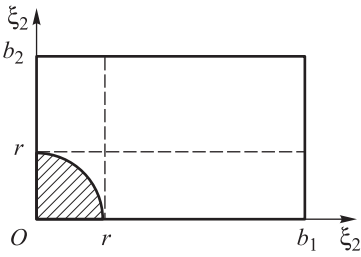


Рис. 2. Расчетная схема прямоугольной ячейки

$r = b_2$  и максимально достижимое значение объемной концентрации волокон составляет  $C'_V = (\pi/4)b_2/b_1$ . В частном случае квадратных ячеек  $C'_V = C^*_V = \pi/4 \approx 0,7854$ .

При задании на сторонах  $\xi_1 = 0$  и  $\xi_1 = b_1$  значений  $T = 0$  и  $T = T_1$  температуры и идеально теплоизолированных сторонах  $\xi_2 = 0$  и  $\xi_2 = b_2$  одну из оценок главного значения  $\lambda_1^*$  тензора эффективной теплопроводности композита можно получить, если принять все изотермические линии в прямоугольной ячейке параллельными координатной оси  $O\xi_2$ . Такое распределение температуры является допустимым для минимизируемого функционала вида (12), соответствующего двумерной задаче установившейся теплопроводности. Поэтому оценка, построенная с использованием этого функционала, будет верхней оценкой значения  $\lambda_1^*$ , которую можно представить в виде  $\lambda_1^\Delta = 1/R^\nabla$ , где  $R^\nabla$  — нижняя оценка термического сопротивления рассматриваемой ячейки в направлении координатной оси  $O\xi_1$ . Термическое сопротивление  $R^\nabla$  включает в себя термическое сопротивление  $R = (b_1 - r)/(b_2\lambda)$  полосы шириной  $b_2$  и длиной  $b_1 - r$  с коэффициентом теплопроводности  $\lambda$  материала матрицы и термическое сопротивление  $R_r$  полосы шириной  $b_2$  и длиной  $r$ , содержащей четверть кругового поперечного сечения волокна с коэффициентом теплопроводности  $\lambda_\perp$  и фрагмент поперечного сечения матрицы.

При линейном распределении температуры в пределах полосы толщиной  $r$  минимизируемый функционал вида (12) будет равен

$$J_r = \lambda T_1^2 (b_2 r + (\bar{\lambda} - 1)\pi r^2 / 4) / (2b_1^2),$$

а оценка снизу термического сопротивления  $R_r$  [14] —

$$R_r^\nabla = \frac{(T_1 r / b_1)^2}{2J_r} = \frac{r / \lambda}{b_2 + (\bar{\lambda} - 1)\pi r / 4} \leq R_r.$$

В результате получим верхнюю оценку

$$\lambda_1^\Delta = \frac{1}{R + R_r^\nabla} = \frac{\lambda}{(b_1 - r) / (\lambda b_2) + r / (b_2 + (\bar{\lambda} - 1)\pi r / 4)}. \tag{18}$$

Оценку термического сопротивления  $R_r$  можно уточнить, если представить полосу шириной  $b_2$  и длиной  $r$ , содержащей четверть кругового поперечного сечения волокна (см. рис. 2), совокупностью  $N - 1$  параллельных координатной оси  $O\xi_2$  полос одинаковой шириной  $b_2$  и малой толщиной  $\Delta\xi_1 = r/N$ . Термическое сопротивление полосы с номером  $n \in \overline{1, N}$  и координатой  $\xi_1^{(n)} \in (0; r)$  составит

$$\Delta R_n = \frac{\Delta \xi_1}{\lambda (b_2 - \sqrt{r^2 - (\xi_1^{(n)})^2} + \lambda_{\perp} \sqrt{r^2 - (\xi_1^{(n)})^2}}.$$

Последовательное соединение  $N$  термических сопротивлений дает сопротивление

$$\frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^N \frac{\Delta \xi_1}{b_2 + (\bar{\lambda} - 1) \sqrt{r^2 - (\xi_1^{(n)})^2}}.$$

Переходя к пределу при  $N \rightarrow \infty$ , получаем уточненную нижнюю оценку термического сопротивления  $R_r$ :

$$\hat{R}_r^{\nabla} = \frac{1}{\lambda} \int_0^r \frac{d\xi_1}{b_2 + (\bar{\lambda} - 1) \sqrt{r^2 - \xi_1^2}}. \quad (19)$$

Для построения нижней оценки величины  $\lambda_1^*$  необходимо использовать распределение вектора плотности теплового потока в рассматриваемой ячейке, допустимое для максимизируемого функционала (13). Такое распределение можно получить, представив исходную прямоугольную ячейку (см. рис. 2) совокупностью двух параллельных полос одинаковой длиной  $b_1$ , разделенных адиабатической границей [18]. В пределах каждой полосы модуль вектора плотности теплового потока постоянен и имеет единственную составляющую, параллельную координатной оси  $O\xi_1$ . Термическое сопротивление одной из полос шириной  $b_2 - r$  равно  $R_1 = (b_1 / \lambda) / (b_2 - r)$ , а термическое сопротивление  $R'_r$  другой полосы шириной  $r$ , включающей в себя четверть поперечного сечения волокна, можно оценить сверху значением [14]  $R_r^{\Delta} = T_1^2 / (2I_r) \geq R'_r$ , где в соответствии с формулой (13) имеем  $I_r = -q_r^2 (b_1 r + (1/\bar{\lambda} - 1)\pi r^2 / 4) / (2\lambda) - T_1 q_r r$ .

Значение составляющей  $q_r = \text{const}$  вектора плотности теплового потока в полосе шириной  $r$  из условия  $dI_r / dq_r = 0$  максимума функционала (13) равно  $q_r = -\lambda T_1 / (b_1 + (1/\bar{\lambda} - 1)\pi r / 4)$ . Последовательно вычисляя значения  $I_r$  и  $R^{\Delta}$ , находим нижнюю оценку

$$\lambda_1^{\nabla} = \frac{1}{R_1 + R_r^{\Delta}} = \frac{\lambda (b_2 - r)}{b_1} + \frac{\lambda r}{b_1 + (1/\bar{\lambda} - 1)\pi r / 4}. \quad (20)$$

Аналогично уточнению нижней оценки термического сопротивления  $R_r$  можно провести уточнение верхней оценки термического сопротивления  $R'$  и получить

$$\hat{R}_r^{\Delta} = \frac{1}{\lambda} \int_0^r \frac{d\xi_2}{b_1 + (\bar{\lambda} - 1) \sqrt{r^2 - \xi_2^2}}. \quad (21)$$

Интегралы в формулах (19) и (21) можно представить достаточно громоздкими соотношениями, содержащими элементарные функции [19]. Однако при

количественном анализе полученных расчетных соотношений удобнее значения этих интегралов находить численно, используя достаточно точные квадратурные формулы.

Аналогично можно определить двусторонние оценки главного значения  $\lambda_2^*$  тензора эффективной теплопроводности ортотропного композита. Отличие двусторонних оценок от полученных выше оценок  $\lambda_1^\Delta$  и  $\lambda_1^\nabla$  состоит лишь во взаимной замене параметров  $b_1$  и  $b_2$ . При  $b_2 = b_1$  эти оценки определяют границы возможных значений  $\lambda_2^* = \lambda_1^*$  для трансверсально изотропного композита в случае расположения центров поперечных сечений волокон в узлах квадратной сетки.

**Количественный анализ расчетных зависимостей.** В целях сокращения объема исходных данных количественный анализ полученных расчетных зависимостей проведем при условии  $b_1 = b_2$ , что соответствует квадратным ячейкам (см. рис. 2), свойству трансверсальной изотропии композита относительно координатной оси  $Ox_3$  с главным значением  $\lambda_3^*$  тензора эффективной теплопроводности и равенству  $\lambda_1^* = \lambda_2^*$  двух остальных главных значений этого тензора. Для более рационального использования масштаба рисунков все результаты расчетов нормируем по верхней оценке  $\lambda_1^+$  главного значения  $\lambda_1^*$ , определяемой по соотношению (16).

Зависимости отношения  $\lambda_1^- / \lambda_1^+ = \bar{\lambda}^-$  (пунктирные линии) от безразмерного радиуса  $\bar{r} = r / b_2$  волокна при значениях  $\bar{\lambda} = 4$  и  $\bar{\lambda} = 20$  приведены на рис. 3. Пунктирная линия с наименьшей ординатой, равной примерно 0,64 при  $\bar{r} \approx 0,8$ , ограничивает снизу область возможных значений отношения  $\lambda_1^- / \lambda_1^+$  при  $\bar{\lambda} = 4$ . Нижняя граница аналогичной области при  $\bar{\lambda} = 20$  — пунктирная линия с наименьшей ординатой около 0,18 при  $\bar{r} \approx 0,8$ .

Сплошные и штрихпунктирные линии с кружками (светлыми при  $\bar{\lambda} = 4$  и темными при  $\bar{\lambda} = 20$ ) построены по соотношению (17) и соответствуют отношениям  $\hat{\lambda}_1^+ / \lambda_1^+ = \lambda^+$  и  $\hat{\lambda}_1^- / \lambda_1^+ = \lambda^-$  (см. рис. 3). Сплошными и штриховыми линиями с квадратами (светлыми при  $\bar{\lambda} = 4$  и темными при  $\bar{\lambda} = 20$ ) показаны рассчитанные по формулам (18) и (20) и отнесенные к величине  $\lambda_1^+$  двусторонние оценки  $\lambda_{\square}^\Delta$  и  $\lambda_{\square}^\nabla$ , учитывающие расположение поперечных сечений волокон в узлах квадратной ячейки. Такие же линии без символов соответствуют уточненным оценкам  $\lambda^\Delta$  и  $\lambda^\nabla$ , которые получены с использованием формул (19) и (21). Отличие линий без символов от линий с квадратами увеличивается по мере возрастания параметра  $\bar{r}$  и становится существенным при  $\bar{r} > 0,8$ .

**Заключение.** Использование двойственной вариационной формулировки задачи установившейся теплопроводности в неоднородном анизотропном твердом теле позволило провести последовательное уточнение и сближение двусторонних границ областей, в которых расположены главные значения тензора эффективной теплопроводности однонаправленного волокнистого композита.

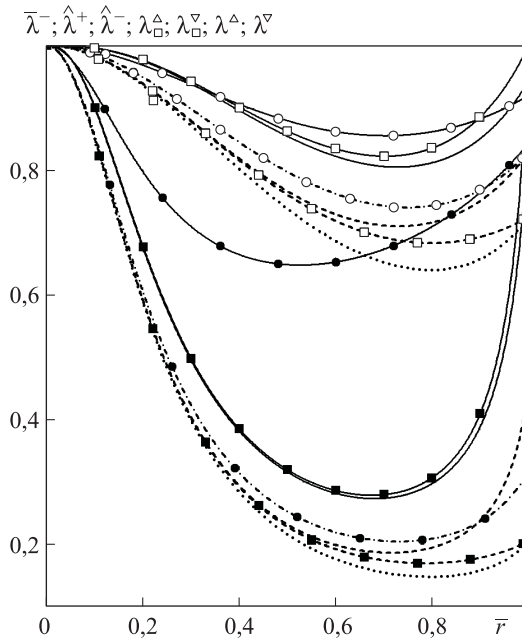


Рис. 3. Результаты количественного анализа расчетных зависимостей

При уточнении оценок учтено влияние взаимного расположения волокон. Количественным анализом полученных расчетных зависимостей установлены области определяющих параметров, в которых эти зависимости дают приемлемые результаты при значительном различии коэффициентов теплопроводности материала матрицы композита и волокон.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Композиционные материалы. Справочник / под ред. Д.М. Карпиноса. Киев: Наук. думка, 1985. 592 с.
2. Справочник по композиционным материалам / под ред. Дж. Любина; пер. с англ. В 2 т. М.: Машиностроение, 1988. Т. 1. 448 с. Т. 2. 584 с.
3. Композиционные материалы. Справочник / под общ. ред. В.В. Васильева, Ю.М. Тарнопольского. М.: Машиностроение, 1990. 512 с.
4. Калинин В.А., Ягодников Д.А. Технология производства ракетных двигателей твердого топлива. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 688 с.
5. Комков М.А., Тарасов В.А. Технология намотки композитных конструкций ракет и средств поражения. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015. 432 с.
6. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математическое моделирование термомеханических процессов при интенсивном тепловом воздействии // Теплофизика высоких температур. 2003. Т. 41. № 2. С. 300–309.
7. Дульнев Г.Н., Заричняк Ю.П. Теплопроводность смесей и композиционных материалов. Л.: Энергия, 1974. 264 с.

8. *Шермергор Т.Д.* Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 400 с.
9. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. Пер. с англ. М.: Мир, 1982. 336 с.
10. *Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю.* Теплопроводность композита, армированного волокнами // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2013. № 5. С. 75–81. DOI: 10.18698/0536-1044-2013-5-75-81
11. *Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю.* Эффективные коэффициенты теплопроводности композита с включениями в виде удлиненных эллипсоидов вращения // Тепловые процессы в технике. 2013. № 6. С. 76–82.
12. *Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н.* Двусторонние оценки термического сопротивления неоднородного твердого тела // Теплофизика высоких температур. 2013. Т. 51. № 4. С. 578–585. DOI: 10.7868/S0040364413040248
13. *Формалев В.Ф.* Теплопроводность анизотропных тел. Аналитические методы решения задач. М.: Физматлит, 2014. 354 с.
14. *Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н.* Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 512 с.
15. *Chen Y.-M., Ting J.-M.* Ultra high thermal conductivity polymer composites // Carbon. 2002. Vol. 40. P. 359–362.
16. *Hashin Z., Strikman S.* A variational approach to the theory of the effective magnetic permeability of multiphase materials // J. Appl. Phys. 1962. Vol. 3. P. 3125–3132. DOI: 10.1063/1.1728579
17. *Вустер У.* Применение тензоров и теории групп для описания физических свойств кристаллов. Пер. англ. М.: Мир, 1977. 384 с.
18. *Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю.* Влияние взаимного расположения волокон на теплопроводность однонаправленного волокнистого композита // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2014. № 2. С. 16–24. DOI: 10.18698/0536-1044-2014-2-16-24
19. *Градиштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.

**Зарубин Владимир Степанович** — д-р техн. наук, профессор кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5).

**Кувыркин Георгий Николаевич** — д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5).

**Савельева Инга Юрьевна** — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5).

#### **Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Сравнительный анализ оценок теплопроводности однонаправленного волокнистого композита // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2016. № 5. С. 67–83.

DOI: 10.18698/1812-3368-2016-5-67-83

## COMPARATIVE ANALYSIS FOR THERMAL CONDUCTIVITY ESTIMATES OF UNIDIRECTIONAL FIBER COMPOSITES

V.S. Zarubin  
G.N. Kuvyrkin  
I.Yu. Savel'eva

fn2@bmstu.ru

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

---

### Abstract

This work is based on the dual variational formulation of the stationary heat conductivity problem for inhomogeneous anisotropic solids. The article offers two-sided estimates for the principal values of the tensor taking into account the mutual arrangement of the anisotropic reinforcing fiber cross-sections in a plane perpendicular to their axes. We considered different types of arrangement of fiber cross-sections: the heat conduction composite is transversely isotropic or orthotropic. The estimates we calculated show that there are limits to the possible values of the thermal conductivity tensor components for the composite analyzed. As a result, it is possible to carry out an objective comparative analysis for the calculated ratios obtained using various approaches and intended to determine the desired characteristics. We estimated the most significant margins of error that occur when the target values for each component of the tensor are selected as half-sum of its boundary values. We determined the limits for key parameters that show reliable results with a significant difference in the thermal conductivity of the composite matrix and fibers

---

### Keywords

*Unidirectional fiber composite, dual variational formulation of steady thermal conductivity problem, effective thermal conductivity tensor*

## REFERENCES

- [1] Karpinos D.M., ed. *Kompozitsionnye materialy. Spravochnik* [Handbook of composites]. Kiev, Nauk. Dumka Publ., 1985. 592 p.
- [2] *Handbook of composites*. Ed. by Lubin G. N.Y., Van Nostrand Reinhold, 1982. 786 p.
- [3] Vasil'ev V.V., Tarnopol'skiy Yu.M., ed. *Kompozitsionnye materialy. Spravochnik* [Handbook of composites]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1990. 512 p.
- [4] Kalinchev V.A., Yagodnikov D.A. *Tekhnologiya proizvodstva raketnykh dvigateley tverdogo topliva* [Production technology of solid-propellant rocket engine]. Moscow, MGTU im. N.E. Baumana Publ., 2011. 688 p.
- [5] Komkov M.A., Tarasov V.A. *Tekhnologiya namotki kompozitnykh konstruktsiy raket i sredstv porazheniya* [Wound composite structures technology and missile weapons]. Moscow, MGTU im. N.E. Baumana Publ., 2015. 432 p.
- [6] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Mathematical modeling of thermomechanical processes under intense thermal effect. *High Temperature*, 2003, vol. 41, iss. 2, pp. 257–265. DOI: 10.1023/A:1023390021091

- [7] Dul'nev G.N., Zarichnyak Yu.P. *Teploprovodnost' smesey i kompozitsionnykh materialov* [Thermal conductivity of mixtures and composite materials]. Leningrad, Energiya Publ., 1974. 264 p.
- [8] Shermergor T.D. *Teoriya uprugosti mikroneodnorodnykh sred* [Theory of elasticity of micronon-uniform environments]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 400 p.
- [9] Christensen R.M. *Mechanics of composite materials*. N.Y., Wiley-Interscience publication, 1979. 348 p.
- [10] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Yu. Thermal conductivity of composite reinforced with fibers. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mashinost.* [Proc. of Higher Educational Institutions. Machine Building], 2013, no. 5, pp. 75–81 (in Russ.).  
DOI: 10.18698/0536-1044-2013-5-75-81
- [11] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Yu. Effective thermal conductance of the composite with inclusions in the form of elongated ellipsoid of revolution. *Teplovye protsessy v tekhnike* [Therm. Process. in Engineering], 2013, no. 6, pp. 76–82 (in Russ.).
- [12] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Two-sided estimates for thermal resistance of an inhomogeneous solid body. *High Temperature*, 2013, vol. 51, iss. 4, pp. 519–525.  
DOI: 10.1134/S0018151X1304024X
- [13] Formalev V.F. *Teploprovodnost' anizotropnykh tel. Analiticheskie metody resheniya zadach* [The thermal conductivity of anisotropic bodies. Analytical methods for solving problems]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2014. 354 p.
- [14] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. *Matematicheskie modeli mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoy sredy* [Mathematical models of mechanics and electrodynamics of continuous media]. Moscow, MGTU im. N.E. Baumana Publ., 2008. 512 p.
- [15] Chen Y.-M., Ting J.-M. Ultra high thermal conductivity polymer composites. *Carbon*, 2002, vol. 40, pp. 359–362.
- [16] Hashin Z., Strikman S. A variational approach to the theory of the effective magnetic permeability of multiphase materials. *J. Appl. Phys.*, 1962, vol. 3. pp. 3125–3132.  
DOI: 10.1063/1.1728579
- [17] Wooster W.A. *Tensors and group theory for the physical properties of crystals*. Oxford, Clarendon Press, 1973. 344 p.
- [18] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Yu. The influence of relative position of fibers on the thermal conductivity of unidirectional fiber composites. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mashinost.* [Proc. of Higher Educational Institutions. Machine Building], 2014, no. 2, pp. 16–24 (in Russ.). DOI: 10.18698/0536-1044-2014-2-16-24
- [19] Ryshik I.M., Gradstein I.S. *Tables of integrals, series, and products*. N.Y., Academic Press, 2007.

**Zarubin V.S.** — Dr. Sci. (Eng.), Professor of Applied Mathematics Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Kuvyrkin G.N.** — Dr. Sci. (Eng.), Professor, Head of Applied Mathematics Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation).



**Savel'eva I.Yu.** — Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Professor of Applied Mathematics Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Please cite this article in English as:**

Zarubin V.S., Kuyrkin G.N., Savel'eva I.Yu. Comparative Analysis for Thermal Conductivity Estimates of Unidirectional Fiber Composites. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2016, no. 5, pp. 67–83. DOI: 10.18698/1812-3368-2016-5-67-83