УДК 519.9 DOI: 10.18698/1812-3368-2016-6-32-41

ВЫПУКЛЫЕ МАТРИЦЫ И МНОГОМЕРНАЯ ЗАДАЧА О РАНЦЕ ОБЩЕЙ ЛЕСТНИЧНОЙ СТРУКТУРЫ

А.А. Гурченков[1, 2] challenge2005@mail.ru
А.С. Есенков[2] tsur@ccas.ru
А.П. Тизик[2] tizik_ap@mail.ru
В.И. Цурков[2] tsur@ccas.ru

[1] МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
[2] Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ «Информатика и управление» РАН, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Рассмотрены многомерные задачи о ранце с так называемыми выпуклыми матрицами ограничений — матрицами, состоящими из нулей и единиц, в которых в каждой строке (или в каждом столбце) единицы идут подряд, без пропусков. Доказано, что выпуклые матрицы абсолютно унимодулярны. Это позволяет применить для решения таких задач обычный симплекс-метод. Для многомерных задач о ранце с выпуклыми матрицами ограничений общей лестничной структуры предложен декомпозиционный метод решения, что дает возможность значительно увеличить размерность решаемых задач. Декомпозиции подвергаются как ограничения, так и целевая функция. В общем случае цикл итераций состоит из решения всевозможных задач о ранце с двумя ограничениями, имеющими хотя бы одну общую переменную. После решения задачи о ранце с двумя ограничениями ее эквивалентно (изменением коэффициентов целевой функции для общих переменных) заменяют совокупностью двух задач о ранце с одним ограничением каждая. Метод обладает дополнительным достоинством: в нем не накапливаются погрешности вычислений, так как в каждом цикле коэффициенты целевой функции восстанавливают свое значение. Приведен численный пример, иллюстрирующий предложенный метод

Ключевые слова

Задача о ранце, выпуклая матрица, декомпозиция, итерационный метод

Поступила в редакцию 13.07.2016

Введение. При решении различных оптимизационных задач возникают случаи, когда в пределах одного и того же ограничения ненулевые коэффициенты при неизвестных совпадают друг с другом. Такие матрицы можно полагать состоящими из нулей и единиц.

Определение 1. Матрицу, состоящую из нулей и единиц, назовем выпуклой по строкам, если в каждой ее строке сначала идут подряд нули (возможно, ни одного), далее — единицы (возможно, до конца строки), затем до конца строки — нули.

Аналогично определяют матрицы, выпуклые по столбцам. Матрицы, выпуклые по строкам или по столбцам, будем называть просто *выпуклыми*. Некоторые матрицы ограничений могут быть приведены к таким матрицам перестановкой строк и столбцов.

Теорема 1. *Выпуклые матрицы абсолютно унимодулярны.*

◄ Рассмотрим, для определенности, матрицу, выпуклую по строкам. Необходимо доказать в соответствии с определением абсолютной унимодулярности, что любой минор рассматриваемой матрицы равен нулю, +1 или –1. Матрица любого минора будет выпуклой. Вычислим этот минор. Выделим в его матрице строки, в которых единицы начинаются в первом столбце. Если таких строк нет, минор равен нулю. Из выделенных строк возьмем строку, в которой наименьшее число единиц. Прибавим эту строку, взятую с обратным знаком, ко всем выделенным строкам. Эта операция не нарушит выпуклости матрицы минора, сведя его определение к вычислению минора, порядок которого на единицу меньше порядка исходного минора. ►

Следовательно, линейная целочисленная оптимизационная задача с выпуклой матрицей ограничений может решаться с помощь симплекс-метода [1]. Однако этим не ограничивается полезность понятия выпуклой матрицы. Различные применения выпуклых матриц описаны в работах [2–17]. Для многомерной задачи о ранце с матрицей ограничений специального лестничного вида в работе [18] предложен полиномиальный декомпозиционный метод решения, позволяющий значительно увеличить размерность решаемых задач.

Ограничения классической транспортной задачи не являются выпуклыми, однако любая пара ограничений (взятых по одному из каждой группы) является выпуклой подматрицей матрицы ограничений. Этого достаточно для возможности создания декомпозиционного метода решения транспортной задачи и ее вариаций [19–21]. В настоящей работе рассмотрена многомерная задача о ранце с выпуклой матрицей ограничений общей лестничной структуры.

Постановка задачи. Пусть имеется многомерная задача о ранце с выпуклой матрицей ограничений следующей структуры:

– первое ограничение

$$x_1 + \ldots + x_{J_1} \le a_1; \tag{1}$$

– второе ограничение

$$x_{j2} + x_{j2+1} + \ldots + x_{J_2} \le a_2,\ \ J_1 \ge j_2 \ge 1, \quad J_2 \ge J_1; \tag{2}$$

– третье ограничение

$$x_{j3} + x_{j3+1} + \ldots + x_{J_3} \le a_3,\ \ J_1 \ge j_3 \ge j_2, \quad J_3 \ge J_2; \tag{3}$$

– k-е ограничение

$$x_{jk} + x_{jk+1} + \ldots + x_{J_k} \le a_k,\ \ J_{k-1} \ge j_k \ge j_{k-1}, \quad J_3 \ge J_2; \tag{4}$$

x_j принимают значения 0 или 1, $1 \le j \le J_k$, $a_i > 0$, целые, $1 \le i \le k$.

Целевая функция имеет вид

$$c_1x_1 + c_1x_1 + ... + c_{J_k}x_{J_k} \to \max, \quad 0 < c_j, 1 \le j \le J_k. \tag{5}$$

Задача (1)–(5) является многомерной задачей о ранце с выпуклой матрицей ограничений общей лестничной структуры — некоторые переменные могут присутствовать в двух и более ограничениях.

Алгоритм решения задачи (1)–(5). Обоснование декомпозиции задачи (1)–(5) на множество задач с двумя ограничениями и в конечном счете на множество задач с одним ограничением в каждой проведено в работе [18]. Лишь один параметр — полиномиальность необходимого объема вычислений не определен в работе [18]. Может потребовать бесконечное число итераций для достижения предельного состояния одномерных задач. Однако, если коэффициенты в целевой функции исходной задачи — целые числа, то значение целевой функции в оптимальном решении по крайней мере на единицу больше значения целевой функции для любого допустимого решения. Поэтому при достаточно близких значениях нескольких коэффициентов в целевой функции одномерной задачи можно полагать их равными и формировать решение исходной задачи.

Пример 1. Рассмотрим пример и его решение, являющееся иллюстрацией изложенного выше:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \le 4; \tag{6}$$

$$x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} \le 5; \tag{7}$$

$$x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} \le 6; \tag{8}$$

$$\begin{gathered} 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 9x_4 + 12x_5 + 13x_6 + 14x_7 + 7x_8 + \\ + 8x_9 + 6x_{10} + 4x_{11} + 3x_{12} + 2x_{13} \to \max. \end{gathered} \tag{9}$$

Формируем и решаем задачу с первым и вторым ограничениями (6) и (7):

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \le 4; \tag{10}$$

$$x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} \le 5; \tag{11}$$

$$4x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 9x_4 + 8x_5 + \frac{26}{3}x_6 + \frac{28}{3}x_7 + \frac{7}{2}x_8 + 4x_9 + 3x_{10} \to \max. \tag{12}$$

Поскольку переменные x_1 и x_2 имеются в исходной задаче (6)–(9) только в одном ограничении, и в этой двумерной задаче (10)–(12) коэффициенты такие же. Коэффициенты при переменных x_3 и x_4 совпадают с исходными. Коэффициенты при переменных x_5, x_6 и x_7 составляют $2/3$ от исходных, так как в исходной задаче (6)–(9) они присутствуют в трех ограничениях. Коэффициенты при переменных x_8, x_9 и x_{10} равны половине от исходных, поскольку в исходной задаче (6)–(9) эти переменные присутствуют в двух ограничениях.

Оптимальное решение задачи (10)–(12):

$$x_2 = x_4 = x_6 = x_7 = x_8 = x_9 = 1, x_1 = x_3 = x_5 = x_{10} = 0.$$

Задачу (10)–(12) можно эквивалентным образом записать как совокупность двух задач с одним ограничением каждая.

Первая задача

$$4x_1 + 6x_2 + 4,5x_3 + 5,5x_4 + 5,1x_5 + \frac{16}{3}x_6 + \frac{17}{3}x_7 \to \max \tag{13}$$

при ограничении (6).

Вторая задача

$$2,5x_3 + 3,5x_4 + 2,9x_5 + \frac{10}{3}x_6 + \frac{11}{3}x_7 + \frac{7}{2}x_8 + 4x_9 + 3x_{10} \to \max \tag{14}$$

при ограничении (7).

Третья задача с двумя ограничениями содержит ограничения (7) и (8) и целевую функцию

$$2,5x_3 + 3,5x_4 + 6,9x_5 + \frac{23}{3}x_6 + \frac{25}{3}x_7 + 7x_8 +$$

$$+ 8x_9 + 6x_{10} + 4x_{11} + 3x_{12} + 2x_{13} \to \max. \tag{15}$$

Целевая функция (15) представляет собой разность целевых функций (9) и (13). Оптимальное решение задачи (7), (8), (15):

$$x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = x_9 = x_{11} = 1, x_3 = x_4 = x_{10} = x_{12} = x_{13} = 0.$$

Далее запишем целевую функцию только для задачи с ограничением (8), необходимую для вычисления коэффициентов целевой функции для следующей задачи с двумя ограничениями:

$$3,1x_5 + \frac{7}{2}x_6 + \frac{23}{6}x_7 + \frac{19}{6}x_8 + \frac{22}{6}x_9 + \frac{17}{6}x_{10} + 4x_{11} + 3x_{12} + 2x_{13} \to \max. \tag{16}$$

Задача с двумя ограничениями (6) и (7) имеет целевую функцию вида

$$4x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 9x_4 + 8,9x_5 + \frac{19}{2}x_6 + \frac{61}{6}x_7 + \frac{23}{6}x_8 + \frac{26}{6}x_9 + \frac{19}{6}x_{10} \to \max. \tag{17}$$

Целевая функция (17) получена вычитанием целевой функции (16) из целевой функции (9).

Оптимальное решение задачи (6), (7), (17):

$$x_2 = x_4 = x_6 = x_7 = x_8 = x_9 = 1, x_1 = x_3 = x_5 = x_{10} = 0.$$

Для формирования целевой функции задачи с двумя ограничениями необходимо получить целевую функцию задачи с ограничением (6):

$$4x_1 + 6x_2 + \frac{9}{2}x_3 + \frac{11}{2}x_4 + \frac{163}{30}x_5 + \frac{35}{6}x_6 + \frac{37}{6}x_7 \to \max. \quad (18)$$

Целевую функцию задачи с ограничениями (7), (8) находят как разность функций (9) и (18):

$$2,5x_3 + 3,5x_4 + \frac{197}{30}x_5 + \frac{43}{6}x_6 + \frac{47}{6}x_7 + 7x_8 +$$
$$+ 8x_9 + 6x_{10} + 4x_{11} + 3x_{12} + 2x_{13} \to \max. \quad (19)$$

Оптимальное решение задачи (7), (8), (19):

$$x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = x_9 = x_{11} = 1, x_3 = x_4 = x_{10} = x_{12} = x_{13} = 0.$$

Целевая функция с одним ограничением (8) может быть равна

$$3,03x_5 + 3,2x_6 + 3,5x_7 + 3,2x_8 + 3,7x_9 + 2,7x_{10} + 4x_{11} + 3x_{12} + 2x_{13} \to \max. \quad (20)$$

Целевая функция задачи с ограничениями (6), (7) — это разность функций (9) и (20):

$$4x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 9x_4 + 8,97x_5 + 9,8x_6 + 10,5x_7 +$$
$$+ 3,8x_8 + 4,3x_9 + 3,3x_{10} \to \max. \quad (21)$$

Оптимальное решение задачи (6), (7), (21):

$$x_2 = x_4 = x_6 = x_7 = x_8 = x_9 = 1, x_1 = x_3 = x_5 = x_{10} = 0.$$

Оптимальные решения задач с ограничениями (6), (7) и (7), (8) остаются различными в части, относящейся к общему ограничению (7). Однако предельное состояние части целевой функции, относящееся к ограничению (7), это различие неизбежно отменит, что и подтверждают дальнейшие вычисления. Предельное значение коэффициента в целевой функции при переменной x_5 в задаче с ограничением (8) равно 3, соответственно в задаче с ограничениями (6), (7) этот коэффициент будет равен 9. Ввиду равенства коэффициентов при переменных x_4 и x_5 их разделения для задач с одним ограничением ((6) и (7)) также будут совпадать. Таким образом, оптимальных решений исходной задачи (6)–(9) будет два:

$$x_2 = x_4 = x_6 = x_7 = x_8 = x_9 = x_{11} = x_{12} = 1, x_1 = x_3 = x_5 = x_{10} = x_{13} = 0;$$

$$x_2 = x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = x_9 = x_{11} = 1, x_1 = x_3 = x_4 = x_{10} = x_{12} = x_{13} = 0.$$

Заключение. Авторы настоящей работы выражают уверенность, что предложенный декомпозиционный прием может оказаться полезным и при решении других задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Таха Х.* Введение в исследование операций. М.: Вильямс, 2001.

2. *Кагиров Р.Р.* Многомерная задача о рюкзаке: новые методы решения // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета им. академика М.Ф. Решетнева. 2007. Вып. 3. С. 16–20.

3. *Федорин А.Н.* Многокритериальные задачи ранцевого типа: разработка и сравнительный анализ алгоритмов. Автореферат дис. … канд. техн. наук. Н. Новгород, 2010.

4. *Думбадзе Л.Г.* Разработка методов и алгоритмов в задачах оптимального использования и развития сетей. Автореферат дис. … канд. физ.-мат. наук. М., 2007.

5. *Батищев Д.И., Коган Д.И., Лейкин М.В.* Алгоритмы синтеза решений для многокритериальной многомерной задачи о ранце // Информационные технологии. 2004. № 1.

6. *Мамедов К.Ш., Мамедов Н.Н.* Алгоритмы построения гарантированного решения и гарантированного приближенного решения многомерной задачи о ранце // Проблемы управления и информатики. 2014. № 5. С. 30–37.

7. *Корбут А.А., Сигал И.Х.* Точные и жадные решения задачи о ранце: отношение значений целевых функций // Известия РАН. Теория и системы управления. 2010. № 5. С. 79–86.

8. *Галимьянова Н.Н., Корбут А.А., Сигал И.Х.* Отношения оптимальных значений целевых функций задачи о ранце и ее линейной релаксации // Известия РАН. Теория и системы управления. 2009. № 6. С. 62–69.

9. *Дюбин Г.Н., Корбут А.А.* Поведение в среднем жадных алгоритмов для минимизационной задачи о ранце — общие распределения коэффициентов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2008. Т. 48. № 9. С. 1556–1570.

10. *Дюбин Г.Н., Корбут А.А.* Жадные алгоритмы для минимизационной задачи о ранце: поведение в среднем // Известия РАН. Теория и системы управления. 2008. № 1. С. 18–28.

11. *Davis T.A., Hager W.W., Hungerford J.T.* An efficient hybrid algorithm for the separable convex quadratic Knapsack problem // ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS). 2016. Vol. 42. No. 3.

12. *Caprara A., Furini F., Malaguti E., Traversi E.* Solving the temporal Knapsack problem via recursive Dantzig — Wolfe reformulation // Information Processing Letters. 2016. Vol. 116. No. 5. P. 379–386.

13. *Cunha J.O., Simonetti L., Lucena A.* Lagrangian heuristics for the quadratic Knapsack problem // Computational Optimization and Applications. 2016. Vol. 63. No. 1. P. 97–120.

14. *Peng B., Liu M., Lu Z., Kochengber G., Wang H.* An ejection chain approach for the quadratic multiple Knapsack problem // European Journal of Operational Research. 2016. Vol. 253. No. 2. P. 328–336.

15. *Qin J., Xu X., Wu Q., Cheng T.C.E.* Hybridization of tabu search with feasible and infeasible local searches for the quadratic multiple Knapsack problem // Computers & Operations Research. 2016. Vol. 66. P. 199–214.

16. *Taylor R.* Approximation of the quadratic Knapsack problem // Operations Research Letters. 2016. Vol. 44. No. 4. P. 495–497.

17. *Haddar B., Khemakhem M., Hanafi S., Wilbaut C.* A hybrid quantum particle swarm optimization for the multidimensional Knapsack problem // Engineering Applications of Artificial Intelligence. 2016. Vol. 55. P. 1–13.

18. *Dumbadze L.G., Tizik A.P.* Many-dimensional Knapsack problem of a special ladder structure // Известия РАН. Теория и системы управления. 1996. № 4. С. 119–122.

19. *Есенков А.С., Леонов В.Ю., Тизик А.П., Цурков В.И.* Нелинейная целочисленная транспортная задача с дополнительными пунктами производства и потребления // Известия РАН. Теория и системы управления. 2015. № 1. С. 88–94.

20. *Кузовлев Д.И., Тизик А.П., Тресков Ю.П.* Декомпозиционный алгоритм для решения транспортной задачи с ограниченными пропускными способностями // Мехатроника, автоматизация, управление. 2012. № 1. С. 45–48.

21. *Тизик А.П., Кузовлев Д.И., Соколов А.А.* Метод последовательной модификации функционала для транспортной задачи с дополнительными пунктами производства и потребления // Вестник ТвГУ. Серия прикладная математика. 2012. № 4. С. 91–98.

Гурченков Анатолий Андреевич — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, Москва, 105005, 2-я Бауманская ул., д. 5), ведущий научный сотрудник Вычислительного центра им. А.А. Дородницына ФИЦ «Информатика и управление» РАН (Российская Федерация, Москва, 119333, ул. Вавилова, д. 40).

Есенков Александр Сергеевич — канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник Вычислительного центра им. А.А. Дородницына ФИЦ «Информатика и управление» РАН (Российская Федерация, Москва, 119333, ул. Вавилова, д. 40).

Тизик Александр Петрович — канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Вычислительного центра им. А.А. Дородницына ФИЦ «Информатика и управление» РАН (Российская Федерация, Москва, 119333, ул. Вавилова, д. 40).

Цурков Владимир Иванович — д-р физ.-мат. наук, заведующий отделом Вычислительного центра им. А.А. Дородницына ФИЦ «Информатика и управление» РАН (Российская Федерация, Москва, 119333, ул. Вавилова, д. 40).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Гурченков А.А., Есенков А.С., Тизик А.П., Цурков В.И. Выпуклые матрицы и многомерная задача о ранце общей лестничной структуры // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2016. № 6. С. 32–41. DOI: 10.18698/1812-3368-2016-6-32-41

CONVEX MATRICES AND MULTIDIMENSIONAL KNAPSACK PROBLEM OF GENERALIZED LADDER STRUCTURE

A.A. Gurchenkov[1, 2] challenge2005@mail.ru
A.S. Esenkov[2] tsur@ccas.ru
A.P. Tizik[2] tizik_ap@mail.ru
V.I. Tsurkov[2] tsur@ccas.ru

[1] Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
[2] Dorodnitsyn Computing Centre, Federal Research Centre Computer Science and Control, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

Abstract

The article deals with solving multidimensional knapsack problems with the so-called convex constraint matrices — consisting of zeros and ones in which in each row (or each column) the ones are consecutive, with no gaps. It is proved that convex matrices are absolutely unimodular. This allows for the usual simplex method to be applied to solve such

Keywords

Knapsack problem, convex matrix, decomposition, iterative method

problems. For multidimensional knapsack problems with convex constraint matrices of the generalized ladder structure we proposed the decomposition solution method, which makes it possible to significantly increase the solved problems dimension. Decomposition is exposed on the constraints and the objective function. In the general case, the iteration loop consists of solving various knapsack problems with two constraints with at least one common variable. After solving the knapsack problem with two constraints, it is equivalently replaced by a combination of the two knapsack problems with one constraint each. It is done by modifying the coefficients of the objective function for the common variables. The method has an additional advantage — it does not accumulate computation errors, since in each cycle the objective function coefficients restore their values. Numerical example is given to illustrate the proposed method

REFERENCES

[1] Taha Hamdy A. Operations research: An Introduction. Prentice Hall, Inc., 1997.

[2] Kagirov R.R. Multiple Knapsack problem: new solving methods. *Vestnik SibGAU* [Vestnik of the Reshetnev Siberian State Aerospace University], 2007, iss. 3, pp. 16–20 (in Russ.).

[3] Fedorin A.N. Mnogokriterial'nye zadachi rantsevogo tipa: razrabotka i sravnitel'nyy analiz algoritmov. Avtoreferat diss. kand. tekh. nauk [Multicriteria problems of knapsack type: Development and comparative analysis of algorithms. Cand. tech. sci. diss. abstr.]. Nizhniy Novgorod, 2010.

[4] Dumbadze L.G. Razrabotka metodov i algoritmov v zadachakh optimal'nogo ispol'zovaniya i razvitiya setey. Avtoreferat diss. kand. fiz.-mat. nauk [Development of methods and algorithms in the problems of network optimal use and development. Cand. phys.-math. sci. diss. abstr.]. Moscow, 2007.

[5] Batishchev D.I., Kogan D.I., Leykin M.V. Decisions synthesis algorithms for multicriteria many-dimensional Knapsack problem. *Informatsionnye tekhnologii* [Information Technologies], 2004, no. 1.

[6] Mamedov K.Sh., Mamedov N.N. Algorithms for constructing multidimensional Knapsack problem guaranteed solutions and guaranteed approximate solution. *Problemy upravleniya i informatiki* [Journal of Automation and Information Sciences], 2014, no. 5, pp. 30–37 (in Russ.).

[7] Korbut A.A., Sigal I.Kh. Exact and greedy solutions of the Knapsack problem: The ratio of values of objective functions. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2010, vol. 49, no. 5, pp. 757–764. DOI: 10.1134/S1064230710050102

[8] Galim'yanova N.N., Korbut A.A., Sigal I.Kh. Ratios of optimal values of objective functions of the Knapsack problem and its linear relaxation. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2009, vol. 48, no. 6, pp. 906–913. DOI: 10.1134/S1064230709060070

[9] Dyubin G.N., Korbut A.A. Average behavior of greedy algorithms for the minimization Knapsack problem: General coefficient distributions. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2008, vol. 48, no. 9, pp. 1521–1535. DOI: 10.1134/S0965542508090042

[10] Dyubin G.N., Korbut A.A. Greedy algorithms for the minimization Knapsack problem: Average behavior. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2008, vol. 47, no. 1, pp. 14–24. DOI: 10.1007/s11488-008-1003-1

[11] Davis T.A., Hager W.W., Hungerford J.T. An efficient hybrid algorithm for the separable convex quadratic Knapsack problem. *ACM Transactions on Mathematical Software* (*TOMS*), 2016, vol. 42, no. 3.

[12] Caprara A., Furini F., Malaguti E., Traversi E. Solving the temporal Knapsack problem via recursive Dantzig — Wolfe reformulation. *Information Processing Letters*, 2016, vol. 116, no. 5, pp. 379–386.

[13] Cunha J.O., Simonetti L., Lucena A. Lagrangian heuristics for the quadratic Knapsack problem. *Computational Optimization and Applications*, 2016, vol. 63, no. 1, pp. 97–120.

[14] Peng B., Liu M., Lu Z., Kochengber G., Wang H. An ejection chain approach for the quadratic multiple Knapsack problem. *European Journal of Operational Research*, 2016, vol. 253, no. 2, pp. 328–336.

[15] Qin J., Xu X., Wu Q., Cheng T.C.E. Hybridization of tabu search with feasible and infeasible local searches for the quadratic multiple Knapsack problem. *Computers & Operations Research*, 2016, vol. 66, pp. 199–214.

[16] Taylor R. Approximation of the quadratic Knapsack problem. *Operations Research Letters*, 2016, vol. 44, no. 4, pp. 495–497.

[17] Haddar B., Khemakhem M., Hanafi S., Wilbaut C. A hybrid quantum particle swarm optimization for the multidimensional Knapsack problem. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 2016, vol. 55, pp. 1–13.

[18] Dumbadze L.G., Tizik A.P. Many-dimensional Knapsack problem of a special ladder structure. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 1996, vol. 35, no. 4, pp. 614–617.

[19] Esenkov A.S., Leonov V.Yu., Tizik A.P., Tsurkov V.I. Nonlinear integer transportation problem with additional supply and consumption points. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2015, vol. 54, no. 1, pp. 86–92. DOI: 10.1134/S1064230715010050

[20] Kuzovlev D.I., Tizik A.P., Treskov Yu.P. Decompositional algorithm for solving transportation problem with fixed channel capasities. *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie* [Mechatronics, automation, control], 2012, no. 1, pp. 45–48 (in Russ.).

[21] Tizik A.P., Kuzovlev D.I., Sokolov A.A. Method of successive modifications of functional for transportation problem with additional warehouse points for suppliers and consumers. *Vestnik TvGU. Ser. prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2012, no. 4, pp. 91–98 (in Russ.).

Gurchenkov A.A. — Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor of Higher Mathematics Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation), leading researcher of the Dorodnitsyn Computing Centre, Federal Research Centre Computer Science and Control, Russian Academy of Sciences (ul. Vavilova 40, Moscow, 119333 Russian Federation).

Esenkov A.S. — Cand. Sci. (Phys.-Math.), researcher of the Dorodnitsyn Computing Centre, Federal Research Centre Computer Science and Control, Russian Academy of Sciences (ul. Vavilova 40, Moscow, 119333 Russian Federation).

Tizik A.P. — Cand. Sci. (Phys.-Math.), senior researcher of the Dorodnitsyn Computing Centre, Federal Research Centre Computer Science and Control, Russian Academy of Sciences (ul. Vavilova 40, Moscow, 119333 Russian Federation).

Tsurkov V.I. — Dr. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of the Dorodnitsyn Computing Centre, Federal Research Centre Computer Science and Control, Russian Academy of Sciences (ul. Vavilova 40, Moscow, 119333 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Gurchenkov A.A., Esenkov A.S., Tizik A.P., Tsurkov V.I. Convex Matrices and Multidimensional Knapsack Problem of Generalized Ladder Structure. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2016, no. 6, pp. 32–41. DOI: 10.18698/1812-3368-2016-6-32-41