

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕРМИНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ С УЧЕТОМ ОГРАНИЧЕНИЙ ЗАМЕНОЙ ПЛОСКОГО ВЫХОДА

Ю.С. Белинская

usbelka@mail.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Рассмотрена динамическая система, описывающая движение квадрокоптера. Доказано, что такая система является плоской. Построена динамическая обратная связь, линеаризующая динамическую систему. Решена задача терминального управления для плоской системы с ограничениями. Предлагаемый подход основан на замене плоского выхода системы таким, область возможных значений которого лежит в допустимом множестве. Изучен следующий маневр: взлет; пролет в горизонтальном направлении; поворот. В силу сложности решение задачи терминального управления подразделено на несколько этапов. На первом этапе решена задача подъема на небольшую высоту. Далее плоский выход системы заменен так, чтобы выполнялись все ограничения задачи. Результаты численного моделирования подтвердили эффективность предложенного подхода. Особенность этого подхода заключается в том, что в начале второго этапа движение незначительно отклоняется от планируемой траектории. Отклонение не превышает 20 % текущего значения координаты, что связано с заменой плоского выхода и переключением управления. На других этапах подобного отклонения не происходит

Ключевые слова

Плоские системы, плоский выход, задача терминального управления, динамическая обратная связь, динамические системы с ограничениями

Поступила в редакцию 15.03.2016
© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 16-07-01153, № 15-07-06484

Введение. Задача терминального управления заключается в определении программного движения, переводящего динамическую систему из заданного начального положения в заданное конечное положение. Широким классом систем, для которых известны методы решения задачи терминального управления, являются плоские системы [1]. Каждое решение плоской системы однозначно определяется некоторым набором функций, который называется плоским выходом системы. Известный метод [2, 3] решения задачи терминального управления состоит в построении программной траектории, удовлетворяющей граничным условиям и соответствующей полиномиальной зависимости плоского выхода от времени.

Однако такой метод не учитывает ограничения, накладываемые на систему, которые могут возникать из физической постановки задачи. Кроме того, область определения плоского выхода может быть не ограничена.

В литературе известны различные подходы к решению этой задачи. Так, программная траектория строится как кусочно-полиномиальный В-сплайн, что позволяет учитывать сложные ограничения на переменные состояния [4]. Существуют подходы, основанные на решении задачи оптимального управления с заданными ограничениями [5]. Кроме того, предложен подход [6], основанный на построении специальной динамической системы (r -замыкания), которая обладает инвариантным множеством, лежащим в области допустимых значений.

Ниже предложен еще один подход, основанный на замене плоского выхода системы таким выходом, область допустимых значений которого лежит в допустимом множестве.

Плоские системы и метод динамической обратной связи для плоских систем. Рассмотрим систему с управлением вида

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad (1)$$

где f — гладкая векторная функция; t — независимая переменная; x — вектор состояния; u — вектор управления (вход системы). Задача терминального управления для системы (1) заключается в поиске такой зависимости $u(t)$ в классе допустимых управлений, при которой траектория системы переходит из начального (заданного) состояния $x(t_0)$ в конечное (заданное) состояние $x(T)$ за заданное время $T - t_0$.

Динамической обратной связью [1, 7] системы (1) называют обратную связь вида

$$\dot{\xi} = a(t, x, \xi, v), \quad u = b(t, x, \xi, v), \quad \xi \in \mathbb{R}^d, \quad v \in \mathbb{R}^m, \quad (2)$$

с состоянием ξ , входом (x, v) и выходом u . Динамическую обратную связь можно понимать как преобразование системы (1) в систему

$$\dot{x} = f(t, x, b(t, x, \xi, v)), \quad \dot{\xi} = a(t, x, \xi, v) \quad (3)$$

с состоянием $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{(n+d)}$ и управлением v . Второе равенство в (2) определяет отображение из множества решений системы (3) в множество решений системы (1).

Система (1) линеаризуема динамической обратной связью (2) (или просто динамически линеаризуема), если получающаяся с помощью этой связи система (3) преобразуется в эквивалентную систему

$$y_i^{(n)} = v_i, \quad i = \overline{1, m} \quad (4)$$

обратимой заменой переменных вида

$$t = t, \quad \tilde{y} = \tilde{Y}(t, x, \xi), \quad v = v, \quad (5)$$

где $\tilde{y} = (y_1, \dot{y}_1, \dots, y_1^{(n_1-1)}, y_2, \dots, y_m^{(n_m-1)})$ — состояние системы (4).

Пусть для системы (1) найдено управление $u(t)$, которое позволяет следовать желаемой траектории $x_*(t)$. Однако на техническую систему могут воздействовать (как правило, случайным образом) внешние силы, которые не учитываются в модели (1). В результате этих воздействий система может изменить состояние в некоторый момент времени t_0 на $x(t_0) \neq x_*(t_0)$. В этом случае ставится задача стабилизации: используя управление, вернуть систему на заданную траекторию $x_*(t)$.

В случае системы (1) линеаризуемой динамической обратной связью (2) задачу стабилизации решают выбором таких функций $v = V(t, x, \xi)$ и $\xi_*(t)$, что $(x_*(t), \xi_*(t))$ есть асимптотически устойчивое решение системы

$$\dot{x} = f(t, x, b(t, x, \xi, V(t, x, \xi))); \quad (6)$$

$$\dot{\xi} = a(t, x, \xi, V(t, x, \xi)). \quad (7)$$

Управление выбирают в виде $u = b(t, x(t), \xi(t), V(t, x(t), \xi(t)))$, где $x(t)$ — текущее состояние системы; $\xi(t)$ — решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений $\dot{x} = f(t, x(t), b(t, x(t), \xi, V(t, x(t), \xi)))$, $\dot{\xi} = a(t, x(t), \xi, V(t, x(t), \xi))$ с начальным условием $\xi(t_0) = \xi_*(t_0)$.

Задачу терминального управления

$$x(t_0) = x_0, \quad x(T) = x_T \quad (8)$$

для системы (1) решают следующим образом. Для вспомогательных переменных ξ задают некоторые начальные и конечные значения, и задача терминального управления ставится для расширенного пространства состояний:

$$x(t_0) = x_0, \quad x(T) = x_T, \quad \xi(t_0) = \xi_0, \quad \xi(T) = \xi_T. \quad (9)$$

Систему (3) обратимой заменой переменной вида (5) преобразуют в эквивалентную систему (4). Применяя преобразование (5), получаем для системы (4) задачу терминального управления

$$\tilde{y}(t_0) = \tilde{Y}(t_0, x_0, \xi_0), \quad \tilde{y}(T) = \tilde{Y}(T, x_T, \xi_T). \quad (10)$$

Решение этой задачи обычно находят в некотором заранее заданном пространстве, например, в пространстве полиномов по t степени $2 \sum_{i=1}^m n_i - 1$, где коэффициенты полиномов выбирают так, чтобы выполнялись условия (10). Обозначим это решение как $(y_*(t), v(t))$, $v_i(t) = (y_{*,i}(t))^{(n_i)}$, $i = 1, \dots, m$. Применяя обратную к (5) замену переменных, получаем решение $(x_*(t), \xi_*(t), v(t))$ системы (3). Это решение удовлетворяет (9). Таким образом, зависимость $u(t) = b(t, \xi_*(t), x_*(t), v(t))$, $t \in [t_0, T]$, решает задачу терминального управле-

ния (8). Для решения соответствующей задачи стабилизации обычно строят обратную связь

$$v_i = (y_{*,i}(t))^{(n_i)} + \sum_{j=0}^{n_i-1} \gamma_{i,j} (y_i^{(j)} - (y_{*,i}(t))^{(j)}), \quad i = 1, \dots, m, \quad (11)$$

где $\gamma_{i,j}$ — постоянные коэффициенты, определяемые из условия асимптотической устойчивости следующей системы линейных дифференциальных уравнений (здесь $e_i = y_i - y_{*,i}(t)$):

$$\dot{e}_i^{(n_i)} = \sum_{j=0}^{n_i-1} \gamma_{i,j} e_i^{(j)}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (12)$$

Обратная связь (11) дает решение задачи стабилизации (4), а $y_*(t)$ — асимптотически устойчивое решение этой системы. Метод динамической обратной связи применим к плоским системам.

Систему (1) называют плоской [1], если определены такие функции

$$y_l = h_l(t, x, u, \dot{u}, \dots, u^{(l)}), \dots, y_r = h_r(t, x, u, \dot{u}, \dots, u^{(l)}), \quad (13)$$

что переменные x и u выражаются через t , функции (13) и их производные в силу системы (1) до какого-то конечного порядка, а любой конечный набор этих функций, их производных в силу системы (1) и функции t функционально независим. При этом набор функций (13) называется линеаризующим (или плоским) выходом системы (1). Можно показать, что для плоской системы число плоских выходов равно числу входов системы.

Пример плоской системы. Рассмотрим динамическую систему, описывающую движение квадрокоптера. Модель задают [8, 9] следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений с управлением:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -u \sin \theta; \\ m\ddot{y} &= u \cos \theta \sin \varphi; \\ m\ddot{z} + mg &= u \cos \theta \cos \varphi; \\ \ddot{\psi} &= \tilde{\tau}_\psi; \\ \ddot{\theta} &= \tilde{\tau}_\theta; \\ \ddot{\varphi} &= \tilde{\tau}_\varphi, \end{aligned} \quad (14)$$

где (x, y, z) — координаты центра масс квадрокоптера; $\vec{a} = (\ddot{x}; \ddot{y}; \ddot{z})^T$ — суммарное ускорение динамической системы; m — масса системы; φ — угол рыскания (угол Эйлера); ψ — угол крена; θ — угол тангажа; \vec{u} — сумма неконсервативных сил, действующих на систему (включая силы лобового сопротивления и силу тяги винтов); $\vec{\tau} = (\tilde{\tau}_\psi \ \tilde{\tau}_\theta \ \tilde{\tau}_\varphi)^T$ — вектор угловых ускорений точки в системе координат, связанной с телом.

Отметим, что выбором соответствующего углового ускорения $\tilde{\tau}_\psi$ можно обеспечить любое значение угла крена и первой производной угла крена, а от

переменной ψ остальные уравнения не зависят. Поэтому четвертое уравнение системы (14) можно рассматривать отдельно от остальных и исследовать систему без четвертого уравнения.

Далее, решая задачи управления, примем $\tilde{\tau}_\varphi$, $\tilde{\tau}_\theta$ и u входами (управлениями) системы. Таким образом, система имеет трехмерное управление.

Система (14) является плоской с плоским выходом

$$h_1 = x, \quad h_2 = y, \quad h_3 = z. \quad (15)$$

Действительно, все переменные состояния системы можно выразить через функции плоского выхода и их производные:

$$\begin{aligned} x = h_1, \quad y = h_2, \quad z = h_3, \quad \dot{x} = \dot{h}_1, \quad \dot{y} = \dot{h}_2, \quad \dot{z} = \dot{h}_3, \\ \varphi = \left(\frac{\dot{h}_2}{\dot{h}_3 + g} \right), \quad \theta = - \left(\cos \varphi \frac{\dot{h}_1}{\dot{h}_3 + g} \right), \end{aligned}$$

а дифференцируя по времени последние соотношения, получаем выражения для $\dot{\theta}$ и $\dot{\varphi}$.

Любая плоская система динамически линеаризуема [1]. Для построения динамической обратной связи, линеаризующей систему (14), используем алгоритм, изложенный в работе [7]. Введем дополнительные переменные ξ_1 , ξ_2 :

$$\xi_1 = \sqrt{\dot{h}_1^2 + \dot{h}_2^2 + (\dot{h}_3 + g)^2}, \quad \xi_2 = \dot{\xi}_1. \quad (16)$$

Такой выбор дополнительных переменных объясняется тем, что функции (16) вместе с функциями состояния системы (14) определяют обратную замену переменных к переменным $h_i^{(j)}$, $i = 1, \dots, 3$, $j = 0, \dots, 3$.

Используя указанную замену переменных, выразим производные $\dot{\xi}_1$, $\dot{\xi}_2$ и входы системы через ξ_1 , ξ_2 , переменные состояния и $v_i = h_i^{(4)}$, $i = 1, 2, 3$. Продифференцировав (16) по времени, получаем

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2; \\ \dot{\xi}_2 &= \xi_1 (\cos^2 \theta \dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2) - \sin \theta \cdot v_1 + \cos \theta \sin \varphi \cdot v_2 + \cos \theta \cos \varphi \cdot v_3. \end{aligned} \quad (17)$$

Суммарную силу тяги u запишем как

$$u = m \xi_1. \quad (18)$$

Чтобы выразить $\tilde{\tau}_\varphi = \dot{\varphi}$ и $\tilde{\tau}_\theta = \dot{\theta}$, используем соотношения, которые были получены при доказательстве плоскостности системы. Имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_\varphi &= \frac{1}{\xi_1} \left(\sec \theta \cdot (v_2 \cos \varphi - v_3 \sin \varphi) - 2\dot{\varphi}(\xi_2 - \xi_1 \dot{\theta} \operatorname{tg} \theta) \right); \\ \tilde{\tau}_\theta &= -\frac{1}{\xi_1} \cos \varphi \left| \sec \varphi \left(v_1 \cos \theta + (v_3 \cos \varphi + v_2 \sin \varphi) \sin \theta + \xi_1 \cos \theta \sin \theta \cdot \dot{\varphi}^2 + 2\xi_2 \dot{\theta} \right) \right|. \end{aligned} \quad (19)$$

Формулы (17)–(19) определяют динамическую обратную связь, линеаризующую систему (14).

Учет ограничений. Предположим, что квадрокоптер движется по коридору. Таким образом, его перемещение в высоту ограничено полом и потолком, а перемещение вправо и влево — стенами. Оси координат можно направить так, чтобы перемещение в сторону стен соответствовало изменению координаты x , перемещение вдоль коридора — изменению координаты y , а изменение высоты — изменению координаты z . Следовательно, допустимая область значений координат:

$$-L_x < x < L_x, \quad 0 < z < 2L_z. \quad (20)$$

Здесь $L_x = S/2 - a$ — максимально допустимое отклонение по оси Ox ; $L_z = h/2 - a$ — максимальное допустимое отклонение по оси Oz ; S — ширина коридора; h — высота потолка; a — размер квадрокоптера, т. е. максимальное расстояние от точки на квадрокоптере до его центра масс.

Введем следующий плоский выход:

$$\tilde{h}_1 = \left(\frac{\pi x}{2L_x} \right), \quad \tilde{h}_2 = y, \quad \tilde{h}_3 = \left(\frac{\pi(z - L_z)}{2L_z} \right), \quad (21)$$

В таком случае переменные x , y , z выражают через введенные переменные:

$$x = \frac{2L_x}{\pi}(\tilde{h}_1), \quad y = \tilde{h}_2, \quad z = \frac{2L_z}{\pi}(\tilde{h}_3) + L_z. \quad (22)$$

Функции $\tilde{h}_i(t)$ также образуют плоский выход системы (14), поскольку напрямую выражены через плоский выход с помощью обратимой замены переменных.

При введенном плоском выходе из соотношений (22) следует, что при произвольном изменении функций \tilde{h}_i координата x может изменяться только в пределах $-L_x \dots L_x$, а координата z — в пределах $0 \dots 2L_z$. Если поставлена задача терминального управления в исходных переменных, а граничные условия удовлетворяют ограничениям (20), то пересчитав начальные и конечные значения в переменных \tilde{h}_i и вычислив траекторию в переменных \tilde{h}_i , с помощью соотношений (22) можно получить траекторию в исходных переменных системы, которая будет удовлетворять ограничениям (20).

Задача терминального управления. Предположим, что необходимо решить следующую задачу терминального управления. Квадрокоптер сначала взлетает на некоторую заданную высоту z_d , затем движется по коридору (вдоль переменной y) до заданной координаты y_d , совершает разворот на угол $\pi/2$, а далее выполняет предпосадочный маневр, опускаясь до высоты z_1 . В настоящей работе задача посадки не ставится, так как в нижней точке коридора ограничения на переменную z не выполнены, следовательно, посадку с помощью плоского выхода (21)

провести нельзя. Для выполнения посадки с небольшой высоты достаточно выключить двигатели и опуститься под действием силы тяжести. Таким образом, поставлена следующая задача терминального управления:

$$\begin{aligned}
 x(0) &= 0, & y(0) &= 0, & z(0) &= 0; \\
 \dot{x}(0) &= 0, & \dot{y}(0) &= 0, & \dot{z}(0) &= 0; \\
 \theta(0) &= 0, & \varphi(0) &= 0, & \psi(0) &= 0; \\
 \dot{\theta}(0) &= 0, & \dot{\varphi}(0) &= 0, & \dot{\psi}(0) &= 0; \\
 x(T) &= 0, & y(T) &= y_d, & z(T) &= z_1; \\
 \dot{x}(T) &= 0, & \dot{y}(T) &= 0, & \dot{z}(T) &= 0; \\
 \theta(T) &= 0, & \varphi(T) &= 0, & \psi(T) &= \pi/2; \\
 \dot{\theta}(T) &= 0, & \dot{\varphi}(T) &= 0, & \dot{\psi}(T) &= 0.
 \end{aligned} \tag{23}$$

Поскольку начальные условия по переменной z не удовлетворяют ограничениям (20), решение задачи терминального управления при взлете квадрокоптера необходимо разбить на два этапа: 1) подъем на небольшую высоту z_1 ; 2) взлет до требуемой высоты z_d . Следовательно, решение задачи терминального управления разбивают на этапы, приведенные ниже.

Этап 1. Подъем на небольшую высоту z_1 . В этом случае для решения промежуточной задачи терминального управления можно использовать плоский выход (15) и подход, подробно изложенный в работе [10]. Задача посадки может быть решена аналогично.

Этап 2. Подъем на высоту z_d . В таком случае ограничения (20) выполнены и для решения задачи терминального управления (23) можно применять плоский выход (21).

Этап 3. Движение вдоль коридора до заданной координаты y_d . По переменным x и z достаточно стабилизировать значения, которых они достигли на предыдущих этапах. При этом используем плоский выход (21).

Этап 4. Разворот. Выполнение этого маневра подробно изложено в работе [11], здесь достаточно просто повторить результаты, приведенные в указанной работе.

Этап 5. Выполнение предпосадочного маневра. На данном этапе снова используем плоский выход (21).

Этап 6. Посадка. Этот этап аналогичен этапу 1 и поэтому не описан в настоящей работе.

Этап 1. Заданы следующие начальные условия:

$$\begin{aligned}
 x(0) &= 0, & y(0) &= 0, & z(0) &= 0; \\
 \dot{x}(0) &= 0, & \dot{y}(0) &= 0, & \dot{z}(0) &= 0; \\
 \theta(0) &= 0, & \varphi(0) &= 0, & \psi(0) &= 0; \\
 \dot{\theta}(0) &= 0, & \dot{\varphi}(0) &= 0, & \dot{\psi}(0) &= 0.
 \end{aligned} \tag{24}$$

Поскольку в конце этапа 1 не обязательно останавливаться, желаемые траектории по переменным x , y , z можно задать так

$$x_0^*(t) = 0, \quad y_0^*(t) = 0, \quad z_0^*(t) = z_1 \left(\frac{t}{T_1} \right)^4,$$

где T_1 — время окончания движения на этапе 1. Начальные и конечные условия на переменные ξ : $\xi_1(0) = \xi_1(T_1) = g$; $\xi_2(0) = \xi_2(T_1) = 0$.

Пересчитав траекторию и начальные условия в переменных \tilde{h} и их производных до третьего порядка включительно, получим решение задачи терминального управления (24). При этом конечные условия первого этапа имеют вид

$$\begin{aligned} x(T_1) &= 0, & y(T_1) &= 0, & z(T_1) &= z_1; \\ \dot{x}(T_1) &= 0, & \dot{y}(T_1) &= 0, & \dot{z}(T_1) &= 4z_1 / T_1; \\ \theta(T_1) &= 0, & \varphi(T_1) &= 0, & \psi(T_1) &= 0; \\ \dot{\theta}(T_1) &= 0, & \dot{\varphi}(T_1) &= 0, & \dot{\psi}(T_1) &= 0. \end{aligned}$$

Этап 2. Начальные условия на втором этапе берут из конечных условий этапа 1. Конечные условия на этапе 2:

$$\begin{aligned} x(T_2) &= 0, & y(T_2) &= 0, & z(T_2) &= z_d; \\ \dot{x}(T_2) &= 0, & \dot{y}(T_2) &= 0, & \dot{z}(T_2) &= 0; \\ \theta(T_2) &= 0, & \varphi(T_2) &= 0, & \psi(T_2) &= 0; \\ \dot{\theta}(T_2) &= 0, & \dot{\varphi}(T_2) &= 0, & \dot{\psi}(T_2) &= 0. \end{aligned}$$

Начальные и конечные условия пересчитывают в переменные \tilde{h} по формулам (21) и их производные по времени до третьего порядка включительно. Программная траектория в переменных \tilde{h} представляет собой полином седьмого порядка. Таким образом, желаемая траектория по переменным x , y , z задана в виде

$$x(t) = 0, \quad y(t) = 0, \quad z(t) = L_z + \frac{2L_z}{\pi} (a_7 t^7 + a_6 t^6 + a_5 t^5 + a_4 t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0),$$

где коэффициенты a_i рассчитывают так, чтобы были выполнены ограничения на переменные \tilde{h}_3 и их производные до третьего порядка включительно, вычисленные по формулам (21) в начальной и конечной точках.

Обратную связь v_i задают с помощью соотношений

$$\begin{aligned} v_1 &= -4(x - x^*) - 6(\dot{x} - \dot{x}^*) - 4(\ddot{x} - \ddot{x}^*) - (\dddot{x} - \dddot{x}^*); \\ v_2 &= -4(y - y^*) - 6(\dot{y} - \dot{y}^*) - 4(\ddot{y} - \ddot{y}^*) - (\dddot{y} - \dddot{y}^*); \\ v_3 &= -4(z - z^*) - 6(\dot{z} - \dot{z}^*) - 4(\ddot{z} - \ddot{z}^*) - (\dddot{z} - \dddot{z}^*). \end{aligned}$$

Этап 3. Начальные условия на этом этапе берут из конечных условий этапа 2. Конечные условия этапа 3:

$$\begin{aligned}
 x(T_3) &= 0, & y(T_3) &= y_d, & z(T_3) &= z_d; \\
 \dot{x}(T_3) &= 0, & \dot{y}(T_3) &= 0, & \dot{z}(T_3) &= 0; \\
 \theta(T_3) &= 0, & \varphi(T_3) &= 0, & \psi(T_3) &= 0; \\
 \dot{\theta}(T_3) &= 0, & \dot{\varphi}(T_3) &= 0, & \dot{\psi}(T_3) &= 0.
 \end{aligned}$$

Решение задачи терминального управления на этапе 3 проводят аналогично решению этой задачи на этапе 2. Программную траекторию по переменной y задают в виде полинома седьмого порядка от времени.

Этап 4. Начальные условия на этапе 4 берут из конечных условий этапа 3. Конечные условия этапа 4:

$$\begin{aligned}
 x(T_4) &= 0, & y(T_4) &= y_d, & z(T_4) &= z_d; \\
 \dot{x}(T_4) &= 0, & \dot{y}(T_4) &= 0, & \dot{z}(T_4) &= 0; \\
 \theta(T_4) &= 0, & \varphi(T_4) &= 0, & \psi(T_4) &= \pi/2; \\
 \dot{\theta}(T_4) &= 0, & \dot{\varphi}(T_4) &= 0, & \dot{\psi}(T_4) &= 0.
 \end{aligned}$$

Поскольку поворот представляет собой изменение угла рыскания (переменной ψ), решением задачи является полином третьего порядка от времени (дифференциальное уравнение, описывающее динамику угла рыскания, имеет второй порядок и не зависит от остальных переменных).

Этап 5. Начальные условия на этом этапе берут из конечных условий этапа 4. Конечные условия этапа 5:

$$\begin{aligned}
 x(T_5) &= 0, & y(T_5) &= y_d, & z(T_5) &= z_1; \\
 \dot{x}(T_5) &= 0, & \dot{y}(T_5) &= 0, & \dot{z}(T_5) &= 0; \\
 \theta(T_5) &= 0, & \varphi(T_5) &= 0, & \psi(T_5) &= \pi/2; \\
 \dot{\theta}(T_5) &= 0, & \dot{\varphi}(T_5) &= 0, & \dot{\psi}(T_5) &= 0.
 \end{aligned}$$

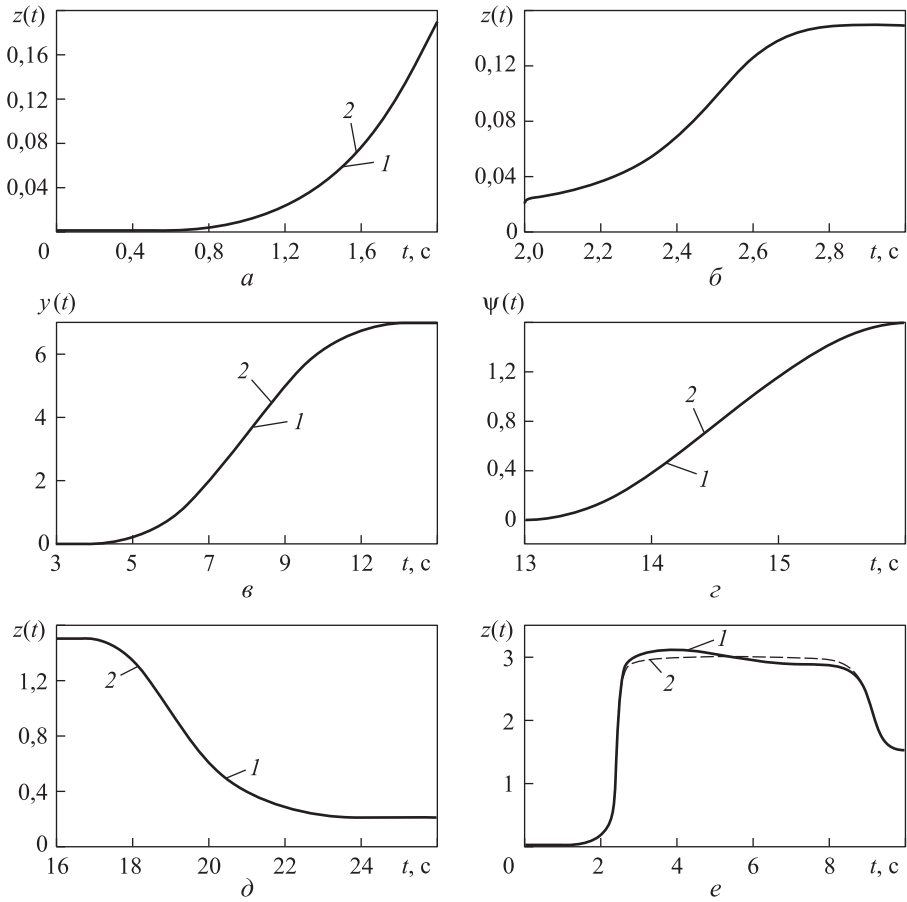
Далее расчет программной траектории происходит аналогично расчету на этапе 2 или 3.

Результаты численного моделирования. Зададим параметры задачи:

$$\begin{aligned}
 L_x &= 3 \text{ м}, & L_z &= 1,5 \text{ м}, & z_1 &= 0,2 \text{ м}, & z_d &= 1,5 \text{ м}, & y_d &= 7 \text{ м}, \\
 T_1 &= 2 \text{ с}, & T_2 &= 3 \text{ с}, & T_3 &= 13 \text{ с}, & T_4 &= 16 \text{ с}, & T_5 &= 26 \text{ с}.
 \end{aligned}$$

Выполним численное моделирование движения системы при указанных параметрах. Изменение координаты $z(t)$ на этапе 1 приведено на части *a* рисунка.

Программная траектория является асимптотически устойчивой и с незначительными отклонениями движение происходит по этой траектории (часть *b* рисунка). Во время движения до T_2 переменные x и y остаются равными нулю. В начале движения происходит незначительное отклонение от построенной программной траектории, которое не превышает 20 % текущего значения координаты. Это вызвано резким переключением управления при смене плоского



Изменение координат $z(t)$ на этапах 1 (а) и 2 (б), $y(t)$ на этапе 3 (в), $\psi(t)$ на этапе 4 (г), $z(t)$ на этапе 5 (д), $z(t)$ на этапе 2 выполнения маневра при $T_2 = 10$ с (е)

выхода. На этапе 3 управления по переменной y наблюдается хорошее следование по заданной траектории (часть в рисунка). При этом координата x остается равной нулю, а координата z — координате z_d .

За промежуток времени $T_3 \dots T_4$ переменная ψ изменяется от заданного начального положения до заданного конечного (часть г рисунка).

На этапе 5 координата z плавно уменьшается до заданного конечного значения, точно следуя заданной программной траектории (часть д рисунка). В конце этого этапа квадрокоптер останавливается, чтобы переключить управление, и выполняет посадку.

Отметим, что указанный подход требует тонкой настройки параметров: если время выполнения маневра на этапе 2 задать слишком большим, то программная траектория приближается к границам коридора, а отклонение от программной траектории может достигать достаточно больших значений (часть е рисунка).

Заключение. Предложен подход к решению задачи терминального управления для плоской системы с ограничениями, который заключается в замене плоского выхода системы таким набором функций, чтобы ограничения выполнялись автоматически при любом значении переменных плоского выхода. Однако предложенная замена не учитывает ограничения на управления, возникающие из физической постановки задачи, либо в силу ограниченности области определения плоского выхода. Поэтому в некоторых случаях такие ограничения могут не выполняться. Для учета указанных ограничений необходимо использовать другие методы. Тем не менее результаты численного моделирования демонстрируют эффективность предложенного подхода для заданного набора параметров и краевых условий.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fliess M., Lévine J., Martin Ph., Rouchon P.* A Lie — Bäcklund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems // *IEEE Trans. Automat. Control.* 1999. Vol. 44. No. 5. P. 922–937.
2. *Крищенко А.П.* Стабилизация программных движений нелинейных систем // *Изв. АН СССР. Техническая кибернетика.* 1985. № 6. С. 103–112.
3. *Крищенко А.П.* Преобразование нелинейных систем и стабилизация программных движений // *Труды МВТУ им. Н.Э. Баумана.* 1988. № 512. С. 69–87.
4. *Flores M.E., Milam M.B.* Trajectory generation for differentially flat systems via NURBS basis functions with obstacle avoidance // *Proceedings of the 2006 American Control Conference.* 2006. P. 5769–5775.
5. *Faulwasser T., Hagenmeyer V., Findeisen R.* Optimal exact path-following for constrained differentially flat systems // *Preprints of the 18th IFAC World Congress.* 2011. P. 9875–9880.
6. *Белинская Ю.С., Четвериков В.Н.* Метод накрытий для терминального управления с учетом ограничений // *Дифференциальные уравнения.* 2014. Т. 50. № 12. С. 1629–1639. DOI: 10.1134/S0374064114120073
7. *Четвериков В.Н.* Управляемость плоских систем // *Дифференциальные уравнения.* 2007. Т. 43. № 11. С. 1518–1527.
8. *Beji L., Abichou A., Slim R.* Stabilization with motion planning of a four rotor mini-rotorcraft for Terrain Missions // *Fourth International Conference on Intelligent Systems Design and Applications (ISDA).* 2004. P. 335–340.
9. *Beji L., Abichou A.* Trajectory and tracking of a mini-rotorcraft // *Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation.* 2005. P. 2618–2623.
10. *Белинская Ю.С., Четвериков В.Н.* Управление четырехвинтовым вертолетом // *Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн.* 2012. № 5. DOI: 10.7463/0512.0397373 URL: <http://technomag.bmstu.ru/doc/397373.html>
11. *Белинская Ю.С.* Реализация типовых маневров четырехвинтового вертолета // *Молодежный научно-технический вестник. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн.* 2013. № 2. URL: <http://sntbul.bmstu.ru/doc/551872.html>

Белинская Юлия Сергеевна — аспирант кафедры «Математическое моделирование» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5).

Пробьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Белинская Ю.С. Решение задачи терминального управления для плоской системы с учетом ограничений заменой плоского выхода // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2016. № 6. С. 122–134. DOI: 10.18698/1812-3368-2016-6-122-134

SOLUTION TO POINT-TO-POINT STEERING PROBLEM FOR CONSTRAINED FLAT SYSTEM BY CHANGING THE FLAT OUTPUT

Yu.S. Belinskaya

usbelka@mail.ru

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

This article presents a solution to point-to-point steering problem for constrained flat system. Constraints arise from the physical formulation of the problem. The proposed approach is based on the replacement of the flat output of the system by the one with the range of possible values within the feasible set. This work analyses the system describing the motion of the four rotor mini-rotorcraft and proves the flatness of such a dynamic system. Author designed the dynamic feedback linearizing the system. The maneuver for a point-to-point steering problem is the following: the mini-rotorcraft moves in a corridor from takeoff, through the horizontal flight, around the corner and to the landing. Thus, its movement is restricted by the floor, ceiling and walls. The solution of such a complex point-to-point steering problem can be divided into several steps. The first step is the problem of a small height lift and its solution. Then the flat output of the system is changed in order to satisfy all the constraints. In the beginning of the second step the trajectory deviates insignificantly from the planned one. It happens because of the replacement of the flat output and switching the control. Other steps do not have any deviation. The article demonstrates the effectiveness of the proposed approach by showing the results of numerical simulation

Keywords

Flat systems, flat output, point-to-point steering problem, dynamic feedback, constrained dynamic systems

REFERENCES

- [1] Fliess M., Lévine J., Martin Ph., Rouchon P. A Lie — Bäcklund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 1999, vol. 44, no. 5, pp. 922–937.
- [2] Krishchenko A.P. Stabilization of programmed motion of nonlinear systems. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*, 1985, no. 6, pp. 103–112 (in Russ.).

- [3] Krishchenko A.P. The transformation of nonlinear systems and stabilization of programmed motions]. *Trudy MVTU im. N.E. Baumana* [Proc. of the Bauman MSTU], 1988, no. 512, pp. 69–87 (in Russ.).
- [4] Flores M.E., Milam M.B. Trajectory generation for differentially flat systems via NURBS basis functions with obstacle avoidance. *Proc. of the 2006 American Control Conference*, 2006, pp. 5769–5775.
- [5] Faulwasser T., Hagenmeyer V., Findeisen R. Optimal exact path-following for constrained differentially flat systems. *Preprints of the 18th IFAC World Congress*, 2011, pp. 9875–9880.
- [6] Belinskaya Yu.S., Chetverikov V.N. Covering method for terminal control with regard of constraints. *Differential Equations*, 2014, vol. 50, no. 12, pp. 1632–1642.
DOI: 10.1134/S0012266114120076
- [7] Chetverikov V.N. Controllability of flat systems. *Differential Equations*, 2007, vol. 43, no. 11, pp. 1558–1568. DOI: 10.1134/S0012266107110110
- [8] Beji L., Abichou A., Slim R. Stabilization with motion planning of a four rotor mini-rotorcraft for Terrain Missions. *Fourth International Conference on Intelligent Systems Design and Applications (ISDA)*, 2004, pp. 335–340.
- [9] Beji L., Abichou A. Trajectory and tracking of a mini-rotorcraft. *Proc. of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2005, pp. 2618–2623.
- [10] Belinskaya Yu.S., Chetverikov V.N. Control of four-propeller rotorcraft. *Nauka i obrazovanie. MGTU im. N.E. Baumana* [Science & Education of the Bauman MSTU. Electronic Journal], 2012, no. 5. DOI: 10.7463/0512.0397373
Available at: <http://technomag.bmstu.ru/en/doc/397373.html>
- [11] Belinskaya Yu.S. Implementation of typical maneuvers of four-propeller helicopter. *Jelektr. zhur. "Molodezhnyy nauchno-tekhnicheskij vestnik". MGTU im. N.E. Baumana* [El. J. "Youth Sci.&Tech. Herald" of Bauman MSTU], 2013, no. 2.
Available at: <http://sntbul.bmstu.ru/doc/551872.html>

Belinskaya Yu.S. — post-graduate student of Mathematical Modelling Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Belinskaya Yu.S. Solution to Point-to-Point Steering Problem for Constrained Flat System by Changing the Flat Output. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2016, no. 6, pp. 122–134.
DOI: 10.18698/1812-3368-2016-6-122-134