УДК 519.9 DOI: 10.18698/1812-3368-2017-1-43-58

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ НАСЛЕДСТВЕННО МИНИМАКСНОЙ СЕТИ С ЗАДАННЫМ ВЕКТОРОМ СТЕПЕНЕЙ УЗЛОВ

П.С. Селин[1] selin@gipc.akita-u.ac.jp
В.И. Цурков[2] tsur@ccas.ru
А.А. Гурченков[2, 3] challenge2005@mail.ru

[1] Университет Акита, Акита, Япония
[2] Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ «Информатика и управление» РАН, Москва, Российская Федерация
[3] МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

В отличие от классической транспортной задачи, где известны пункты производства и потребления, и требуется минимизировать стоимость перевозки, в настоящей работе рассмотрен минимаксный критерий. В частности, ищется матрица с минимальным наибольшим элементом в классе неотрицательных матриц с заданными суммами элементов строк и столбцов. В таком случае минимаксный критерий можно интерпретировать следующим образом. Допустим, что время перевозки из пункта производства в пункт потребления пропорционально объему перевозки. Тогда минимакс — минимальное время, необходимое для перевозки всего объема. Это обычная ситуация, когда принимающий решения не знает тарифных коэффициентов. В других ситуациях они не имеют смысла, как и нелинейные тарифные целевые функции. В этих случаях минимаксная интерпретация приводит к эффективному решению. Для классов неоринтированных сетей с заданным вектором степеней узлов (транспортных и сетевых многогранников) с применением характеристических функций получены аналитические формулы для вычисления минимаксных значений, выраженных через координаты вектора и неотрицательный параметр. Минимаксные значения определяют необходимые и достаточные условия, при которых усеченные многогранники не пустые множества. Получен алгоритм построения наследственно минимаксной сети в сетевых многогранниках

Ключевые слова

Оптимизация сетей, задачи транспортного типа, минимакс, минимаксная сеть, наследственно минимаксная сеть, равномерная сеть, транспортные многогранники, сетевые многогранники, заданные степени узлов, фиксированные степени узлов

Поступила в редакцию 13.07.2016

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований № 15-01-05552

Введение. В настоящей работе рассмотрены классы сетей (взвешенных графов), веса дуг которых ограничены неотрицательным параметром с заданным вектором степеней узлов и двудольных сетей, степени узлов которых задаются парой векторов. В транспортных задачах эти классы называются усеченными сетевыми и транспортными многогранниками [1, 2]. Одной из задач оптимизации в моделях транспортного типа, где классические функционалы минимизации заменены минимаксными, является нахождение минимакса и построение наследственно минимаксной сети (матрицы), любая подсеть которой представляет собой минимаксную сеть многогранника, которому она принадлежит [3–6]. Для вычисления минимаксных значений построены системы линейных соотношений и показано, что расчет минимакса можно упростить. Полученные результаты основаны на характеристических функциях, зависящих от координат векторов и параметра. Неотрицательность характеристических функций — это критерий непустоты усеченных сетевых и транспортных многогранников. Для сетей исследуемых классов также приведен алгоритм построения наследственно минимаксной сети.

Перейдем к основным определениям и обозначениям. Все n-вершинные сети рассмотрим с множеством узлов $U(n)=\{u_1,\ldots,u_n\}$, а все n, m-вершинные двудольные сети — с множествами узлов (долями) $U(n)=\{u_1,\ldots,u_n\}$ и $V(m)=$ $=\{v_1,\ldots,v_m\}$. Будем отождествлять n-вершинные сети и n,m-вершинные двудольные сети с неотрицательными матрицами смежности $X=(x_{ij})$, $1\le i,\ j\le n$, и $X=(x_{ij})$, $1\le i\le n$, $1\le j\le m$, где $x_{ij}=x_{ji}$ — вес дуги (петли при $i=j$) с вершинами u_i и u_j в первом случае и x_{ij} — вес дуги с вершинами u_i и v_j во втором.

Для множеств неотрицательных векторов и пар из них применяют следующие обозначения:

$$\mathbb{R}^n_+ = \{\mathbf{A}=(a_1,\ldots,a_n): a_i \ge 0\ \forall i\};$$

$$\overline{\mathbb{R}}^n_+ = \left\{\mathbf{A}\in R^n_+ : a_i \ge a_{i+1},\ 1\le i\le n-1\,(\text{при}\ \ n\ge 2)\right\};$$

$$\mathbb{R}^{n,m}_{+,=} = \left\{(\mathbf{A},\mathbf{B}) : A\in\mathbb{R}^n_+,\ \mathbf{B}\in\mathbb{R}^m_+,\ \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^m b_j\right\};$$

$$\overline{\mathbb{R}}^{n,m}_{+,=} = \left\{(\mathbf{A},\mathbf{B})\in\mathbb{R}^{n,m}_{+,=} : \mathbf{A}\in\overline{\mathbb{R}}^n_+\ \mathbf{B}\in\overline{\mathbb{R}}^m_+\right\}.$$

В транспортных задачах условие равенства сумм координат пары векторов из множества $\mathbb{R}^{n,m}_{+,=}$ называется замкнутостью, или условием баланса [7–9]. Многие утверждения и конструкции (без ограничения общности) рассматриваются с векторами из множества $\overline{\mathbb{R}}^n_+$ и парами векторов из множества $\overline{\mathbb{R}}^{n,m}_{+,=}$.

Обозначим множества сетей, степени узлов которых равны координатам вектора $\mathbf{A}$ из множества $\overline{\mathbb{R}}^n_+$ как $\Gamma(\mathbf{A})=\left\{X(\mathbf{A})=(x_{ij}) : X(\mathbf{A})\in\Gamma_L(\mathbf{A});\ x_{ii}=0\ \forall i\right\}$; $\Gamma(\mathbf{A};c)=\left\{X(\mathbf{A})=(x_{ij}) : X(\mathbf{A})\in\Gamma(\mathbf{A});\ x_{ij}\le c\ \forall i,j\right\}$ — класс сетей, веса дуг которых не превосходят заданного неотрицательного параметра c.

Множества сетей $\Gamma(\mathbf{A})$ и $\Gamma(\mathbf{A};c)$ называются сетевыми и усеченными сетевыми многогранниками [6, 7, 10, 11].

Множества двудольных сетей, степени узлов которых равны координатам векторов из пары $(\mathbf{A},\mathbf{B})\in\mathbb{R}^{n,m}_{+,=}$, обозначим

$$\Gamma(\mathbf{A},\mathbf{B})=\left\{X(\mathbf{A},\mathbf{B})=(x_{ij}) : x_{ij}\ge 0\ \ \forall i,j\right\};$$

$$\deg u_i = \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i \ \forall i; \ \deg v_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j \ \forall j,$$

$$\Gamma(\mathbf{A},\mathbf{B};c) = \left\{ X(\mathbf{A},\mathbf{B}) = (x_{ij}) : X(\mathbf{A},\mathbf{B}) \in \Gamma(\mathbf{A},\mathbf{B});\ x_{ij} \le c \right\}.$$

В транспортных задачах множества $\Gamma(\mathbf{A},\mathbf{B})$ и $\Gamma(\mathbf{A},\mathbf{B};c)$ называются классическим и усеченным транспортными многогранниками [1, 2].

Рассмотрим следующую вероятностную задачу. Пусть $(\mathbf{A},\mathbf{B}) \in \mathbb{R}^{n,m}_{+,=}$, $t > 0$, и пусть $X(\mathbf{A},\mathbf{B}) = (x_{ij})$ — транспортная матрица-план, задаваемая векторами $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$. Тогда $tX(\mathbf{A},\mathbf{B}) = (tx_{ij})$ — матрица времени, необходимого на транспортировку продукта от производителя i к потребителю j, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$. Обозначим $\mathfrak{M}(X)$ — множество всех подматриц матрицы $X = X(\mathbf{A},\mathbf{B})$. Поскольку каждая подматрица задается произвольными подмножествами строк и столбцов, $|\mathfrak{M}(X)| = (2^n - 1)(2^m - 1)$ — число всех подматриц в множестве $\mathfrak{M}(X)$. Введем следующий функционал $\Phi(X(\mathbf{A},\mathbf{B})) = \max\limits_{ij} x_{ij}$. Допустим, что подматрицы Y выбирают из множества $\mathfrak{M}(X)$ равновероятно и критерием для каждого выбора является значение $t\Phi(X(\mathbf{A},\mathbf{B}))$ наибольшего элемента из tY. Распределение вероятности на множестве $\mathfrak{M}(X)$ равномерно, поэтому задача минимизации ожидаемого значения максимального времени, необходимого на транспортировку $t(2^n - 1)(2^m - 1) \sum\limits_{Y \in \mathfrak{M}(X)} \Phi(Y)$, сводится к задаче минимизации функционала

$$\Phi'(X(\mathbf{A},\mathbf{B})) = \sum_{Y \in \mathfrak{M}(X)} \Phi(Y).$$

Задача минимизации функционала $\Phi'(X)$ имеет единственное решение, задаваемое наследственно минимаксной матрицей $X^*(\mathbf{A},\mathbf{B}) = (x^*_{ij})$ [5]:

$$\min_{X(\mathbf{A},\mathbf{B}) \in \Gamma(\mathbf{A},\mathbf{B})} \Phi'(X(\mathbf{A},\mathbf{B})) = \Phi'(X^*(\mathbf{A},\mathbf{B})).$$

Характеристические функции. Сформулируем условия, при которых $\Gamma(\mathbf{A};c)$, $\Gamma(\mathbf{A},\mathbf{B};c) \ne \varnothing$, для чего введем понятия характеристических функций [4, 5, 12].

Пусть $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^n_+$ и $c \ge 0$. Характеристической функцией называется функция вида

$$\delta_k(\mathbf{A};c) = ck(k-1) - \sum_{\substack{i \ge k+1 \\ a_i \le ck}} (a_i - ck) - \sum_{i \le k} a_i + \sum_{i \ge k+1} a_i,\ c \le ck \le a_k + c. \tag{1}$$

Для и характеристическую функцию определяют как

$$\delta_k(\mathbf{A},\mathbf{B};c) = \sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{b_j \ge ck} (b_j - ck) - \sum_{i=1}^{k} a_i,\ \ 1 \le k \le n. \tag{2}$$

$$\delta_k(\mathbf{A},\mathbf{B};c)=\sum_{j=1}^{m} b_j-\sum_{b_j\geq ck}(b_j-ck)-\sum_{i=1}^{k} a_i,\ \ 1\leq k\leq n. \tag{2}$$

Неотрицательность характеристических функций (1) и (2) — критерий того, что усеченные сетевые и транспортные многогранники не являются пустыми [4, 5, 12].

Теорема 1. *Пусть* $\Gamma(\mathbf{A};c)\neq\varnothing \iff \delta_k(\mathbf{A};c)\geq 0 \quad \forall k, \quad c\leq ck\leq a_k+c.$ *Если* $(\mathbf{A},\mathbf{B})\in\overline{\mathbb{R}}^{n,m}_{+,=}$, *то* $\Gamma(\mathbf{A},\mathbf{B};c)\neq\varnothing \iff \delta_k(\mathbf{A},\mathbf{B};c)\geq 0 \ \ \forall k,\ 1\leq k\leq n.$

Далее будем применять функции (1) и (2), а также их упрощенный вид, если обозначим

$$l'_k(\mathbf{A};c)=\begin{cases}\max\{i: a_i\geq ck\},\ a_{k+1}\geq ck;\\ k, a_{k+1}<ck\end{cases} \quad \text{и} \quad l_k(\mathbf{B};c)=\begin{cases}\max\{j: b_j\geq ck\},\ b_1\geq ck;\\ 0, b_1<ck,\end{cases}$$

то

$$\delta_k(\mathbf{A};c)=ck(l'_k(\mathbf{A};c)-1)-\sum_{i\leq k} a_i+\sum_{i>l'_k(\mathbf{A};c)} a_i; \tag{3}$$

$$\delta_k(\mathbf{A},\mathbf{B};c)=ckl_k(\mathbf{B};c)+\sum_{j>l_k(\mathbf{B};c)} b_j-\sum_{i=1}^{k} a_i,\ \ 1\leq k\leq n. \tag{4}$$

Замечание 1. Пусть $\mathbf{A}\in\overline{\mathbb{R}}^{n}_{+}$ и $c\geq 0.$ Для (3) и (4), если $a_{k+1}\geq ck,$ то $l_k(\mathbf{A};c)=l'_k(\mathbf{A};c).$

Минимакс и наследственно минимаксная сеть смежности двудольной сети. Для пары векторов $(\mathbf{A},\mathbf{B})\in\mathbb{R}^{n,m}_{+,=}$ найдем наименьшее значение $c=c(\mathbf{A},\mathbf{B}),$ при котором $\Gamma(\mathbf{A},\mathbf{B};c)\neq\varnothing.$

Определение 1. *Пусть* $(\mathbf{A},\mathbf{B})\in\mathbb{R}^{n,m}_{+,=}.$ *Величина* $c(\mathbf{A},\mathbf{B})=\min\{c:\Gamma(\mathbf{A},\mathbf{B};c)\neq\varnothing\}$ *называется минимаксом для* $(\mathbf{A},\mathbf{B})$ *или* $\Gamma(\mathbf{A},\mathbf{B}).$ *Это определение связано с очевидным тождеством*

$$\min\{c:\Gamma(\mathbf{A},\mathbf{B};c)\neq\varnothing\}=\min_{X(\mathbf{A},\mathbf{B})\in\Gamma(\mathbf{A},\mathbf{B})}\ \max_{i,j}\left\{x_{ij}: X(\mathbf{A},\mathbf{B})=(x_{ij})\right\}.$$

Для минимакса имеет место теорема 2 [3–5].

Теорема 2. *Пусть* $(\mathbf{A},\mathbf{B})\in\overline{\mathbb{R}}^{n,m}_{+,=}$ *и* $\Gamma(\mathbf{A},\mathbf{B};c)\neq\varnothing.$ *Величина* c *является минимаксом* ($c=c(\mathbf{A},\mathbf{B})$) $\iff \exists k\in\mathbb{Z},\ 1\leq k\leq n,$ *что* $\delta_k(\mathbf{A},\mathbf{B};c)=0$ *и* $b_1\geq ck.$

Построим формулу вычисления минимакса $c(\mathbf{A},\mathbf{B}),$ где $(\mathbf{A},\mathbf{B})\in\overline{\mathbb{R}}^{n,m}_{+,=}.$ Обозначим $T(\mathbf{A},\mathbf{B})=\{(i,j): a_i>a_{i+1}$ или $i=n,\ \ b_j>b_{j+1}$ или $j=m\}.$ Для $\forall(t,r)\in T(\mathbf{A},\mathbf{B})$ построим систему линейных соотношений

$$\begin{aligned}&c_{tr}=\frac{\sum_{i=1}^{t} a_i-\sum_{j>r} b_j}{tr};\\ &c_{tr}t\leq b_r;\\ &c_{tr}t>b_{r+1},\ \ r<m.\end{aligned} \tag{5}$$

Лемма 1. *Для* $(\mathbf{A},\mathbf{B}) \in \overline{\mathbb{R}}^{n,m}_{+,=}$ *имеет место*

$$c(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \max_{(t,r)\in T(\mathbf{A},\mathbf{B})} c_{tr}. \tag{6}$$

Отметим, что пара индексов (k,p), при которой $c(\mathbf{A},\mathbf{B}) = c_{kp}$, определяется неоднозначно.

Определение 2. *Сети (матрицы) из* $\Gamma(\mathbf{A},\mathbf{B};\, c(\mathbf{A},\mathbf{B}))$ *называются минимаксными.*

Следующая теорема характеризует минимаксные матрицы (см. (4)) [3–5].

Теорема 3. *Если* $(\mathbf{A},\mathbf{B}) \in \overline{\mathbb{R}}^{n,m}_{+,=}$, $\delta_k(\mathbf{A},\mathbf{B};\, c(\mathbf{A},\mathbf{B})) = 0$ *и* $b_1 \ge c(\mathbf{A},\mathbf{B})$, *то для* $X(\mathbf{A},\mathbf{B}) = (x_{ij}) \in \Gamma(\mathbf{A},\mathbf{B}; c(\mathbf{A},\mathbf{B}))$ *справедливо*

$$x_{ij} = \begin{cases} c(\mathbf{A},\mathbf{B}),\ 1 \le i \le k, 1 \le j \le l_k(\mathbf{B}; c(\mathbf{A},\mathbf{B})); \\ 0,\ i > k,\ j > l_k(\mathbf{B}; c(\mathbf{A},\mathbf{B})). \end{cases}$$

Вычисление минимакса $c(\mathbf{A},\mathbf{B})$ можно упростить: при его расчете достаточно использовать первое соотношение из системы (5).

Лемма 2. *Пусть* $(\mathbf{A},\mathbf{B}) \in \overline{\mathbb{R}}^{n,m}_{+,=}$. *Для* $\forall t \in \mathbb{Z}$, $1 \le t \le n$, *примем*

$$c_{tq} = \max_{\substack{1\le r\le m \\ (t,r)\in T(\mathbf{A},\mathbf{B})}} \frac{\sum\limits_{i=1}^{t} a_i - \sum\limits_{j>r} b_j}{tr} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{t} a_i - \sum\limits_{j>q} b_j}{tq}.$$

Тогда

а) $c_{tq} t \le b_q$;

б) $c_{tq} t \ge b_{q+1}$ *(если* $q < m$*), причем* $c_{tq} t = b_{q+1} \Leftrightarrow c_{tq} = c_{tq''}$, *где* $q'' = \min\{j : (t,j) \in T(\mathbf{A},\mathbf{B}),\, j > q\}$.

◄ Начнем доказательство леммы с доказательства пункта а леммы. Предположим $c_{tq} t > b_q$. Для q возможны два случая: 1) $b_1 > b_q$; 2) $b_1 = b_q$.

Докажем случай 1. Здесь существует $q' = \max\{j : (t,j) \in T(\mathbf{A},\mathbf{B}),\, j < q\}$. Тогда для разности $c_{tq} - c_{tq'}$ получим

$$c_{tq} - c_{tq'} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{t} a_i - \sum\limits_{j>q} b_j}{tq} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{t} a_i - \sum\limits_{j>q'} b_j}{tq'} = \frac{1}{t}\,\frac{(q'-q)\sum\limits_{i=1}^{t} a_i - q'\sum\limits_{j>q} b_j + q\sum\limits_{j>q'} b_j}{qq'} =$$

$$= \frac{1}{t}\,\frac{(q'-q)\sum\limits_{i=1}^{t} a_i + (q-q')\sum\limits_{j>q} b_j + q\sum\limits_{j=q'+1}^{q} b_j}{qq'} = \frac{1}{q'}\,\frac{-(q-q')\left(\sum\limits_{i=1}^{t} a_i - \sum\limits_{j>q} b_j\right) + q\sum\limits_{j=q'+1}^{q} b_j}{tq} =$$

$$= \frac{1}{q'}\left(\frac{\sum\limits_{j=q'+1}^{q} b_j}{t} - \frac{(q-q')c_{tq}}{tt}\right) = \frac{1}{q't}\sum_{j=q'+1}^{q} (b_j - c_{tq} t).$$

В силу определения множества $T(\mathbf{A},\mathbf{B})$ и упорядоченности координат векторов пары $(\mathbf{A},\mathbf{B})$ по невозрастанию $b_j = b_q \quad \forall j: \; q'+1 \le j \le q,$ тогда $c_{tq} - c_{tq'} = $ $= \dfrac{1}{q't}(q-q')(b_q - c_{tq}t) < 0,$ что противоречит условию леммы.

Докажем случай 2. Предположим $b_q < c_{tq}t,$ следовательно,

$$\frac{b_q}{t} < \frac{\sum\limits_{i=1}^{t} a_i - \sum\limits_{j>q} b_j}{tq}$$

и $b_q q < \sum\limits_{i=1}^{t} a_i - \sum\limits_{j>q} b_j.$ Таким образом, $\sum\limits_{i=1}^{t} a_i - \sum\limits_{j=1}^{m} b_j > 0,$ что противоречит условию замкнутости.

Докажем пункт 6 леммы. Пусть $q < m.$ Для разности $c_{tq} - c_{tq''}$ имеем

$$c_{tq} - c_{tq''} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{t} a_i - \sum\limits_{j>q} b_j}{tq} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{t} a_i - \sum\limits_{j>q''} b_j}{tq''} = \frac{1}{t}\frac{(q''-q)\sum\limits_{i=1}^{t} a_i - q''\sum\limits_{j>q} b_j + q\sum\limits_{j>q''} b_j}{qq''} =$$

$$= \frac{1}{t}\frac{(q''-q)\sum\limits_{i=1}^{t} a_i - (q''-q)\sum\limits_{j>q''} b_j - q''\sum\limits_{j=q+1}^{q''} b_j}{qq''} = \frac{1}{q}\frac{(q''-q)\left(\sum\limits_{i=1}^{t} a_i - \sum\limits_{j>q''} b_j\right) - q''\sum\limits_{j=q+1}^{q''} b_j}{tq''} =$$

$$= \frac{1}{q}\left(\frac{c_{tq''}t(q''-q)}{t} - \frac{\sum\limits_{j=q+1}^{q''} b_j}{t}\right) = \frac{1}{qt}\sum_{j=q+1}^{q''}(c_{tq''}t - b_j).$$

Здесь в силу определения множества $T(\mathbf{A},\mathbf{B})$ и упорядоченности координат векторов пары $(\mathbf{A},\mathbf{B})$ по невозрастанию справедливо $b_j = b_{q+1} \quad \forall j: \; q+1 \le j \le q''.$ Поэтому $c_{tq} - c_{tq''} = \dfrac{1}{qt}(q''-q)(c_{tq''}t - b_{q+1}).$ ▶

Предположим, что $c_{tq}t < b_{q+1}.$ Тогда $c_{tq} - c_{tq''} < \dfrac{q''-q}{q}(c_{tq''} - c_{tq})$ и $(c_{tq} - c_{tq''})\dfrac{q''}{q} <$ $< 0,$ что противоречит условию леммы 2.

Пусть $c_{tq}t = b_{q+1}.$ Тогда $(c_{tq} - c_{tq''})\dfrac{q''}{q} = 0,$ что справедливо тогда и только тогда, когда $c_{tq} = c_{tq''}.$

Из лемм 1 и 2 следует теорема 4 [3–5].

Теорема 4. *Пусть* $(\mathbf{A},\mathbf{B}) \in \overline{\mathbb{R}}^{n,m}_{+,=}.$ *Для минимакса* $c(\mathbf{A},\mathbf{B})$ *имеет место*

$$c(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \max_{(t,r)\in T(\mathbf{A},\mathbf{B})} \frac{\sum\limits_{i=1}^{t} a_i - \sum\limits_{j>r} b_j}{tr}. \tag{7}$$

Определение 3. *Сеть (матрица)* $X(A,B)=(x_{ij})$ *называется равномерной, если справедливы два условия [3–5]:*

1) $a_i=a_p,\ b_j=b_q\ \Rightarrow\ x_{ij}=x_{pq}$;

2) $a_i\ge a_p,\ b_j\ge b_q\ \Rightarrow\ x_{ij}\ge x_{pq}$.

Каждая неотрицательная матрица $X=(x_{ij}),\ 1\le i\le n,\ 1\le j\le m,$ задает пару векторов $(\mathbf{A},\mathbf{B})\in\mathbb{R}^{n,m}_{+,=}$, где $a_i=\sum_{j=1}^{m}x_{ij},\ b_j=\sum_{i=1}^{n}x_{ij},\ X=X(\mathbf{A},\mathbf{B})\in\Gamma(\mathbf{A},\mathbf{B})$. Будем говорить, что матрица X задает пару векторов $(\mathbf{A},\mathbf{B})$.

Определение 4. *Для* $(\mathbf{A},\mathbf{B})\in\mathbb{R}^{n,m}_{+,=}$ *двудольная сеть (минимаксная)* $X(\mathbf{A},\mathbf{B})$ *называется наследственно минимаксной, если каждая ее подматрица есть минимаксная матрица пары векторов, которую задает эта подматрица [3–5].*

Основные свойства наследственно минимаксных сетей заключены в двух (эквивалентных) утверждениях [3–5].

Теорема 5. *Для каждой пары векторов* $(\mathbf{A},\mathbf{B})$ *из множества* $\mathbb{R}^{n,m}_{+,=}$ *существует единственная наследственно минимаксная матрица* $X(\mathbf{A},\mathbf{B})$, *причем она является равномерной.*

Теорема 6. *Каждый транспортный многогранник* $\Gamma(\mathbf{A},\mathbf{B})$ *содержит одну и только одну наследственно минимаксную матрицу, которая является равномерной.*

Алгоритм построения наследственно минимаксной сети заключен в следующей лемме [3–5].

Лемма 3. *Пусть* $(\mathbf{A},\mathbf{B})\in\mathbb{R}^{n,m}_{+,=}$ *и* $X(\mathbf{A},\mathbf{B})=(x_{ij})\in\Gamma(\mathbf{A},\mathbf{B};c(\mathbf{A},\mathbf{B}))$, *причем* $c(\mathbf{A},\mathbf{B})=c_{kq}$. *Тогда для пар векторов* $(\mathbf{A}',\mathbf{B}')$ *и* $(\mathbf{A}'',\mathbf{B}'')$, *где* $a_i'=a_i-c(\mathbf{A},\mathbf{B})\cdot q$, $1\le i\le k,\ \ b_j'=b_{q+j},\ \ 1\le j\le m-q,\ \ a_i''=a_{k+i}, 1\le i\le n-k,\ \ b_j''=b_j-c(\mathbf{A},\mathbf{B})\cdot k,\ \ 1\le j\le q$, *имеет место* $(\mathbf{A}',\mathbf{B}')\in\overline{\mathbb{R}}^{k,m-q}_{+,=}$, $(\mathbf{A}'',\mathbf{B}'')\in\overline{\mathbb{R}}^{n-k,q}_{+,=}$ *и* $\Gamma(\mathbf{A}',\mathbf{B}';c(\mathbf{A},\mathbf{B}))\ne\varnothing$,, $\Gamma(\mathbf{A}'',\mathbf{B}'';c(A,B))\ne\varnothing$.

Замечание 2 к лемме 1. Из теоремы 3 следует: а) если $k=n$, то пары векторов $(\mathbf{A}'',\mathbf{B}'')$ не существует; б) если $q=m$, то пары векторов $(\mathbf{A}',\mathbf{B}')$ не существует; в) при $k=n$ и $q=m$ пары векторов $(\mathbf{A}',\mathbf{B}')$ и $(\mathbf{A}'',\mathbf{B}'')$ не существует.

Алгоритм 1. Построение наследственно минимаксной двудольной сети [3–5].

Пусть $(\mathbf{A},\mathbf{B})$ — произвольная пара векторов из множества $\overline{\mathbb{R}}^{n,m}_{+,=}$. Наследственно минимаксную матрицу $X(\mathbf{A},\mathbf{B})=(x_{ij})$ строят следующим образом.

Шаг 1. Вычисляют минимакс $c(\mathbf{A},\mathbf{B})=\max\limits_{(t,r)\in T(\mathbf{A},\mathbf{B})}c_{tr}=c_{kq}$ (теорема 4) и строят подматрицы искомой матрицы $X(\mathbf{A},\mathbf{B})$, первая из которых состоит из минимаксных элементов, а вторая — нулевая (теорема 3).

Шаг 2. Определяют пары векторов $(\mathbf{A}',\mathbf{B}')$, $(\mathbf{A}'',\mathbf{B}'')$ (см. лемму 3), применяется теорема 4 для вычисления минимаксов $c(\mathbf{A}',\mathbf{B}')$, $c(\mathbf{A}'',\mathbf{B}'')$ и теорема 3 для определения части элементов подматриц $X_1(\mathbf{A}',\mathbf{B}')\in\Gamma(\mathbf{A}',\mathbf{B}';\ c(\mathbf{A}',\mathbf{B}'))$ и $X_2(\mathbf{A}'',\mathbf{B}'')\in\Gamma(\mathbf{A}'',\mathbf{B}'';\ c(\mathbf{A}'',\mathbf{B}''))$ искомой матрицы $X(\mathbf{A},\mathbf{B})$ и т. д. Очевидно, что процесс, содержащийся в алгоритме, конечен.

Минимакс и наследственно минимаксная сеть с заданным вектором степеней узлов. Для вектора $A \in \mathbb{R}_+^n$ вычислим наименьшее значение $c = c(\mathbf{A})$, при котором $\Gamma(\mathbf{A}; c) \neq \varnothing$.

Определение 5. *Пусть* $A \in \mathbb{R}_+^n$ *и* $\Gamma(\mathbf{A}) \neq \varnothing$. *Значение* $c(\mathbf{A}) = \min\{c : \Gamma(\mathbf{A}; c) \neq \varnothing\}$ *называется минимаксом для* $\mathbf{A}$ *или* $\Gamma(\mathbf{A})$ *[12].*

Величина $c(\mathbf{A})$ в работах [3–5] называется весом вектора $\mathbf{A}$. Легко заметить справедливость тождества $\min\{c : \Gamma(\mathbf{A}; c) \neq \varnothing\} = \min\limits_{X(\mathbf{A}) \in \Gamma(\mathbf{A})} \max\limits_{i,j}\{x_{ij} : X(\mathbf{A}) = (x_{ij})\}$.

Для минимакса имеет место теорема 7 [12].

Теорема 7. *Пусть* $A \in \overline{\mathbb{R}}_+^n$ *и* $\Gamma(\mathbf{A}) \neq \varnothing$. *Величина* c *является минимаксом* $(c = c(\mathbf{A}))$ $\Leftrightarrow$ $\Gamma(\mathbf{A}; c) \neq \varnothing$ *и* $\exists p \in \mathbb{Z}$, $c \le cp \le a_p + c$, *что* $\delta_p(\mathbf{A}; c) = 0$.

Перейдем к построению формулы вычисления минимакса $c(\mathbf{A})$, где $A \in \overline{\mathbb{R}}_+^n$. Обозначим $T'(\mathbf{A}) = \{(i, j) : i, j \in \mathbb{Z}, 1 \le i \le j \le n\}$. Для $\forall$ $(t, r) \in T'(\mathbf{A})$ построим систему соотношений

$$\begin{gathered} c_{tr} = \frac{\sum\limits_{i \le t} a_i - \sum\limits_{i > r} a_i}{t(r-1)}; \\ c_{tt} t \le a_t + c_{tt}; \\ c_{tr} t > a_{r+1}, \quad r < n; \\ c_{tr} t \le a_r, \quad r > t. \end{gathered} \tag{8}$$

Примем $c_{tr} = 0$, если система (8) не имеет решений.

Замечание 3. При $r = 1$ (тогда и $t = 1$) система (8) не имеет решения, и в этом случае, как отмечено выше, $c_{11} = 0$, но $c(A) = 0$ $\Leftrightarrow$ $\mathbf{A}$ — нулевой вектор. Поэтому будем предполагать, что в системе (8) вектор $\mathbf{A}$ отличен от нулевого и $r > 1$.

Теорема 8. *Пусть* $A \in \overline{\mathbb{R}}_+^n$, *где* $a_1 > 0$, *и* $\Gamma(\mathbf{A}) \neq \varnothing$. *Тогда* $c(\mathbf{A}) = \max\limits_{(t,r) \in T'(\mathbf{A})} c_{tr}$.

◀ Примем $c_{pq} = \max\limits_{(t,r) \in T'(\mathbf{A})} c_{tr}$. Из первого равенства системы (8) следует $c_{pq} p(q-1) - \sum\limits_{i \le p} a_i + \sum\limits_{i > q} a_i = 0$, а из неравенств в системе (8) — $q = l'_p(\mathbf{A}; c_{pq})$. Поэтому

$$\delta_p(\mathbf{A}; c_{pq}) = c_{pq} p(q-1) - \sum_{i \le p} a_i + \sum_{i > q} a_i = 0.$$

Применяя (1), получаем

$$\delta_p(\mathbf{A}; c_{pq}) = c_{pq} p(p-1) - \sum_{\substack{i \ge p+1 \\ a_i \ge c_{pq} p}} (a_i - c_{pq} p) - \sum_{i=1}^{p} a_i + \sum_{i > p} a_i = 0.$$

Очевидно, что при $c < c_{pq}$ имеет место $\delta_p(\mathbf{A}; c) < 0$. Из теоремы 1 (пункт а) следует, что $c(\mathbf{A}) \ge c_{pq} = \max\limits_{(t,r) \in T'(\mathbf{A})} c_{tr}$. Используя теорему 7, получаем, что $\exists$ $p \in \mathbb{Z}$, $c \le cp \le a_p + c$, при котором

$$\delta_p(\mathbf{A}; c(\mathbf{A})) = c(\mathbf{A}) p(l'_p(\mathbf{A}; c(\mathbf{A})) - 1) - \sum_{i \le p} a_i + \sum_{i > l'_p(\mathbf{A}; c(\mathbf{A}))} a_i = 0.$$

Поэтому

$$c(\mathbf{A}) = \frac{\sum\limits_{i \le p} a_i - \sum\limits_{i > l'_p(\mathbf{A}; c(\mathbf{A}))} a_i}{p(l'_p(\mathbf{A}; c(\mathbf{A})) - 1)} = c_{pl'_p(\mathbf{A}; c(\mathbf{A}))}.$$

Из соотношений $c(\mathbf{A}) \ge \max\limits_{(t,r) \in T'(\mathbf{A})} c_{tr}$ и $c(A) = c_{pl'_p(\mathbf{A}; c(\mathbf{A}))}$ следует утверждение теоремы 8. ►

Определение 6. *Сети без петель (матрицы) из множества* $\Gamma(\mathbf{A}; c(\mathbf{A}))$ *называются минимаксными.*

Приведенная ниже теорема характеризует минимаксные матрицы [3–5].

Теорема 9. *Если* $\mathbf{A} \in \overline{\mathbb{R}}_+^n$ *и* $\delta_p(\mathbf{A}; c(\mathbf{A})) = 0$, *где* $c \le cp \le a_p + c$, *то для* $X(\mathbf{A}) = (x_{ij}) \in \Gamma(\mathbf{A};\ c(\mathbf{A}))$ *имеет место*

$$x_{ij} = \begin{cases} c(A), (i,j) \in \{(i,j) : i \ne j,\ 1 \le i, j \le p\} \cup \\ \cup \{(i,j) : 1 \le i \le p, p < j \le l'_p\} \cup \end{cases}$$

$$\cup \{(i,j) : p < i \le l'_p,\ 1 \le j \le p\};\ 0, (i,j) \in$$

$$\in \{(i,j) : p < i \le n,\ l'_p < j \le n\} \cup \{(i,j) : l'_p < i \le n, p < j \le l'_p\} \cup \{(i,j) : i = j, p < i \le l'_p\}.$$

Упростим вычисление минимакса $c(\mathbf{A})$. Обозначим $T(n) = \{(i,i) : 2 \le i \le n\}$ и $T''(A) = \{(i,j) \in T'(A) : i < j; a_i > a_{i+1},\ i = n; a_j > a_{j+1},\ j = n\}$. Покажем, что при нахождении минимакса можно удалить последние два неравенства из системы (8) и при вычислении минимакса $c(\mathbf{A})$ рассматривать только пары индексов из $T(\mathbf{A}) = T(n) \cup T''(\mathbf{A})$. Для этого докажем две леммы.

Лемма 4. *Пусть* $A \in \overline{\mathbb{R}}_+^n$, *где* $\Gamma(\mathbf{A}) \ne \varnothing$, $a_1 > 0$, *и*

$$c_{tq} = \max_{\substack{1 < r \le n \\ (t,r) \in T'(\mathbf{A}) \setminus T(n)}} \frac{\sum\limits_{i=1}^{t} a_i - \sum\limits_{i > r} a_i}{t(r-1)} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{t} a_i - \sum\limits_{i > q} a_i}{t(q-1)}.$$

Тогда 1) $c_{tq} t \ge a_{q+1}$ *(если* $q < n$*), причем* $c_{tq} t = a_{q+1} \Leftrightarrow c_{tq} = c_{tq+1}$, *2)* $c_{tq} t \le a_q$.

◄ 1. Пусть $q < n$. Для разности $c_{tq} - c_{tq+1}$ имеем

$$c_{tq} - c_{tq+1} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{t} a_i - \sum\limits_{i > q} a_i}{t(q-1)} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{t} a_i - \sum\limits_{i > q+1} a_i}{tq} =$$

$$= \frac{1}{t} \frac{\sum\limits_{i=1}^{t} a_i - \sum\limits_{i > q+1} a_i - q a_{q+1}}{(q-1)q} = \frac{1}{t(q-1)} \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{t} a_i - \sum\limits_{i > q+1} a_i}{q} - a_{q+1} \right).$$

Согласно первому соотношению из системы (8)

$$c_{tq+1} = \frac{\sum_{i=1}^{t} a_i - \sum_{i>q+1} a_i}{tq},$$

поэтому справедливо $c_{tq} - c_{tq+1} = \dfrac{1}{t(q-1)}(c_{tq+1}t - a_{q+1})$.

Предположим, что $c_{tq}t < a_{q+1}$. Тогда $c_{tq} - c_{tq+1} < \dfrac{1}{q-1}(c_{tq+1} - c_{tq})$ и $(c_{tq} - c_{tq+1})\dfrac{q}{q-1} < 0$, что противоречит условию леммы.

Пусть $c_{tq}t = a_{q+1}$. Тогда $(c_{tq} - c_{tq+1})\dfrac{q}{q-1} = 0$, что справедливо тогда и только тогда, когда $c_{tq} = c_{tq+1}$.

2. Пусть $q > 2$. Предположим $c_{tq}t > a_q$. Тогда для разности $c_{tq} - c_{tq-1}$ получим

$$c_{tq} - c_{tq-1} = \frac{\sum_{i=1}^{t} a_i - \sum_{i>q} a_i}{t(q-1)} - \frac{\sum_{i=1}^{t} a_i - \sum_{i>q-1} a_i}{t(q-2)} = \frac{1}{t}\frac{-\sum_{i=1}^{t} a_i + \sum_{i>q} a_i + (q-1)a_q}{(q-1)(q-2)} =$$

$$= \frac{1}{q-2}\frac{-c_{tq}t + a_q}{t} = \frac{1}{t(q-2)}(a_q - c_{tq}t) < 0,$$

что противоречит условию леммы.

Пусть $q = 2$. Тогда $t = 1$ (так как $(t, r) \in T'(\mathbf{A}) \setminus T(n)$). Из (1) следует $a_1 \le \sum_{i=2}^{n} a_i$ и $a_1 - \sum_{i=3}^{n} a_i \le a_2$. Теперь очевидно $c_{12} = \dfrac{a_1 - \sum_{i>2} a_i}{1\cdot(2-1)} \le a_2$. Лемма доказана. ▶

Замечание 4. Согласно лемме 4, в системе (8) второй индекс r можно рассматривать только в случае $a_r > a_{r+1}$ (если $r \ne n$).

Лемма 5. *Пусть* $A \in \overline{\mathbb{R}}_+^n$, *где* $\Gamma(\mathbf{A}) \ne \varnothing$ *и* $a_1 > 0$. *Если* $c_{pq} = c(\mathbf{A})$ *и* $a_p = a_{p+1}$, *то* $c_{p+1q} = c(\mathbf{A})$.

◀ Рассмотрим разность $c_{pq} - c_{p+1q}$, где $q > p$:

$$c_{pq} - c_{p+1q} = \sum_{i=1}^{p} a_i - \sum_{i>q} a_i p(q-1) - \sum_{i=1}^{p+1} a_i - \sum_{i>q} a_i (p+1)(q-1) =$$

$$= \frac{(p+1)\sum_{i=1}^{p} a_i - (p+1)\sum_{i>q} a_i - p\sum_{i=1}^{p+1} a_i + p\sum_{i>q} a_i}{p(p+1)(q-1)} =$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{p}a_i-\sum_{i>q}a_i-pa_{p+1}}{p(p+1)(q-1)}=\frac{1}{(p+1)(q-1)}\left(\frac{\sum_{i=1}^{p}a_i-\sum_{i>q}a_i}{p(q-1)(q-1)}-a_{p+1}\right).$$

Согласно первому соотношению из системы (8)

$$c_{pq}=\frac{\sum_{i=1}^{p}a_i-\sum_{i>q}a_i}{p(q-1)},$$

тогда $c_{pq}-c_{p+1q}=\dfrac{1}{(p+1)(q-1)}(c_{pq}(q-1)-a_{p+1}).$

Очевидно, что $c_{pq}(q-1)\le a_p=a_{p+1}$. Поэтому $c_{pq}-c_{p+1q}=c(\mathbf{A})-c_{p+1q}\le 0$. Поскольку $c(\mathbf{A})=\max\limits_{(t,r)\in T'(\mathbf{A})}c_{tr}=c_{tq}$, то $c_{pq}-c_{p+1q}\ge 0$. Следовательно, $c(\mathbf{A})=c_{p+1q}$.

Лемма 4 исключает из системы (8) последние два неравенства. Следовательно, если $c_{tq}=\max\limits_{(t,r)\in T'(\mathbf{A})\setminus T(n)}c_{tr}$, то для значения c_{tq} заведомо имеет место $c_{tq}t\le a_q$ и, учитывая замечание к лемме 4, $c_{tq}t>a_{q+1}$ (если $q\ne n$). Поэтому, из теоремы 8 и лемм 4 и 5 следует теорема 10 [12].

Теорема 10. *Пусть $A\in\overline{\mathbb{R}}_+^n$, где $a_1>0$, и $\Gamma(\mathbf{A})\ne\varnothing$. Тогда*

$$c(\mathbf{A})=\max_{(t,r)\in T(\mathbf{A})}\frac{\sum_{i\le t}a_i-\sum_{i>r}a_i}{t(r-1)}.$$

Определение 7. *Сеть без петель — матрица $X(\mathbf{A})=(x_{ij})$ — называется равномерной, если справедливы два условия [12]: 1) $a_i=a_p$, $a_j=a_q$, где $i\ne j$ и $p\ne q$ $\Rightarrow$ $x_{ij}=x_{pq}$; 2) $a_i\ge a_p$, $a_j\ge a_q$, где $i\ne j$ и $p\ne q$ $\Rightarrow$ $x_{ij}\ge x_{pq}$.*

Каждая неотрицательная симметричная матрица $X=(x_{ij})$, $1\le i,j\le n$, где $x_{ii}=0$, задает вектор $\mathbf{A}$, для которого $a_i=\sum_{j=1}^{n}x_{ij}$, и $X=X(\mathbf{A})\in\Gamma(\mathbf{A})$. Будем говорить, что матрица (сеть без петель) X задает вектор $\mathbf{A}$.

Определение 8. *Сеть без петель (минимаксная) называется наследственно минимаксной, если каждая ее подсеть без петель и каждая двудольная подсеть, порожденные своими узлами, есть минимаксные.*

Из теоремы 10 следует лемма, в которой заключен алгоритм построения наследственно минимаксной сети без петель.

Лемма 6. *Пусть $A\in\overline{\mathbb{R}}_+^n$ и $X(\mathbf{A})=(x_{ij})\in\Gamma(\mathbf{A};\,c(\mathbf{A}))$, причем $c(\mathbf{A})=c_{kq}$. Тогда для пары векторов $(\mathbf{A}',\mathbf{A}'')$ и вектора $\mathbf{A}'''$, где $a_i'=a_i-c(\mathbf{A})(q-1)$, $1\le i\le k$, $a_i''=a_i$, $q<i\le n$, $a_i'''=a_i-c(\mathbf{A})(q-k)$, $k<i\le q$, имеет место $(\mathbf{A}',\mathbf{A}'')\in\overline{\mathcal{R}}_{+,=}^{k,n-q}$, $\mathbf{A}'''\in\overline{\mathcal{R}}_+^{q-k}$ и $\Gamma(\mathbf{A}',\mathbf{A}'';\,c(\mathbf{A}))\ne\varnothing$, $\Gamma(\mathbf{A}''';c(\mathbf{A}))\ne\varnothing$.*

Алгоритм 2. Построение наследственно минимаксной сети без петель.

Пусть $\mathbf{A}$ — произвольный вектор из множества $\overline{\mathbb{R}}_+^n$. Наследственно минимаксная сеть строится следующим образом.

Шаг 1. Применяют теорему 10 для вычисления минимакса

$$c(\mathbf{A}) = \max_{(t,r)\in T(\mathbf{A})} \frac{\sum\limits_{i\le t} a_i - \sum\limits_{i>r} a_i}{t(r-1)} = c_{kq}.$$

Числа c_{kq}, k, q задают веса дуг искомой сети (элементы симметричной матрицы) $X(\mathbf{A})$, равные $c(\mathbf{A})$ и равные 0 (теорема 9).

Шаг 2. Применяя лемму 6, вычисляют пару векторов $(\mathbf{A}', \mathbf{A}'')$ и вектор $\mathbf{A}'''$. Для пары векторов $(\mathbf{A}', \mathbf{A}'')$ применяют алгоритм 1, чтобы построить наследственно минимаксную двудольную сеть, в результате будут найдены веса дуг x_{ij} искомой сети $X(\mathbf{A})$, где $1 \le i \le k$, $q < j \le n$.

Далее для вектора $\mathbf{A}'''$ применяют шаги 1 и 2 алгоритма 2 и т. д.

Очевидно, что построенная с помощью алгоритма 2 матрица $X(\mathbf{A})$ — равномерная. Следующим шагом может быть распространение результатов исследования на целочисленные сети, а также многоиндексные, нелинейные и бесконечномерные обобщения [3, 4], а также широкий класс теоретических и прикладных задач [13–20].

Заключение. Классические транспортные задачи и методы их решения широко известны. Рассмотрены транспортные модели с минимаксным критерием. Во многих случаях тарифные коэффициенты неизвестны принимающему решения, а иногда и не имеют смысла. В этих случаях минимаксная модель приводит к эффективному решению. В частности, часто ищется матрица с минимальным наибольшим элементом в классе неотрицательных матриц с заданными суммами элементов строк и столбцов. Минимаксный критерий показывает, что время перевозки продукции минимально при условии, что время перевозки пропорционально объему продукции. Для классов сетей с заданным вектором степеней узлов с использованием характеристических функций были получены формулы для вычисления минимаксных значений, определяющих необходимые и достаточные условия, при которых усеченные сетевые и транспортные многогранники не пустые множества. Для рассматриваемых классов сетей также получен алгоритм построения наследственно минимаксной сети. Основное отличие от результатов, полученных ранее, заключается в том, что расчет минимакса можно упростить, исключив неравенства из систем линейных соотношений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К.* Алгоритмы: построение и анализ / под ред. И.В. Красикова. М.: Вильямс, 2005. 1296 с.
2. *Зыков А.А.* Основы теории графов. М.: Вузовская книга, 2004. 664 с.

3. *Миронов А.А., Цурков В.И.* Наследственно минимаксные матрицы в моделях транспортного типа // Известия РАН. Теория и системы управления. 1998. № 6. С. 104–121.

4. *Миронов А.А., Цурков В.И.* Открытые транспортные модели с минимаксным критерием // ДАН. 2001. Т. 381. № 4. С. 448–451.

5. *Tsurkov V., Mironov A.* Minimax under transportation constrains. Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 1999.

6. *Лукоянов Н.Ю.* Минимаксные и вязкостные решения в задачах оптимизации наследственных систем // Труды института математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15. № 4. С. 183–194.

7. *Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б.* Задачи линейного программирования транспортного типа. М.: Наука, 1969. 382 с.

8. *Goldsmith A.* Wireless communications. Cambridge University Press, 2005. 571 p.

9. *Lewis F.L.* Wireless sensor networks // Smart Environments: Technologies, Protocols, and Applications. New York: John Wiley, 2004. 432 p.

10. *Тищенко С.А.* Сепараторы в планарных графах как новый способ их характеризации // Фундамент. и прикл. матем. 2002. Т. 8. № 4. С. 1193–1214.

11. *Voloshin V.I.* Introduction to graph and hypergraph theory. New York: Nova Science Publishers, 2009.

12. *Селин П.С., Цурков В.И.* Метод характеристических функций для классов сетей с фиксированными степенями узлов // Известия РАН. Теория и системы управления. 2014. № 5. С. 28–37. DOI: 10.7868/S0002338814050126

13. *Ding J., Tana P., Lu Y.-Z.* Optimizing the controllability index of directed networks with the fixed number of control nodes // Neurocomputing. 2016. Vol. 171. P. 1524–1532.

14. *Fontanari J.F., Rodrigues F.A.* Influence of network topology on cooperative problem-solving systems // Theory in Biosciences. 2015. P. 1–10.

15. *Peng G.-S., Wu J.* Optimal network topology for structural robustness based on natural connectivity // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2016. Vol. 443. P. 212–220. URL: http://dx.doi.org/10.1016/j.physa.2015.09.023

16. *Abello J., Queyroi F.* Network decomposition into fixed points of degree peeling // Social Network Analysis and Mining. 2014. No. 4. P. 191.

17. *Horvat E.-A., Zweig K.A.* A fixed degree sequence model for the one-mode projection of multiplex bipartite graphs // Social Network Analysis and Mining. 2013. Vol. 3. No. 4. P. 1209–1224.

18. *Dong G., Gao J., Du R., Tian L., Stanley H.E., Havlin S.* Robustness of network of networks under targeted attack // Physical Review E. 2013. Vol. 87. No. 5. P. 052804-1–052804-11. DOI: 10.1103/PhysRevE.87.052804

19. *Richard M.G.A., Fanchon E.* Reduction and fixed points of Boolean networks and linear network coding solvability // IEEE Transactions on Information Theory. 2016. Vol. 62. No. 5. P. 2504–2519.

20. *Назаров М.Н.* О представлении графов в виде группоидов специального вида // Прикладная дискретная математика. 2015. № 1. С. 96–104.

Селин Павел Сергеевич — канд. физ.-мат. наук, доцент факультета технических наук, Университет Акита (Япония, префектура Акита, Акита, Тэгата Гакуэн-мати, 1-1).

Цурков Владимир Иванович — д-р физ.-мат. наук, заведующий отделом Вычислительного центра им. А.А. Дородницына ФИЦ «Информатика и управление» РАН (Российская Федерация, Москва, 119333, ул. Вавилова, д. 40).

Гурченков Анатолий Андреевич — д-р физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Вычислительного центра им. А.А. Дородницына ФИЦ «Информатика и управление» РАН (Российская Федерация, Москва, 119333, ул. Вавилова, д. 40), профессор кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, Москва, 105005, 2-я Бауманская ул., д. 5).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Селин П.С., Цурков В.И., Гурченков А.А. Алгоритм построения наследственно минимаксной сети с заданным вектором степеней узлов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2017. № 1. С. 43–58. DOI: 10.18698/1812-3368-2017-1-43-58

AN ALGORITHM FOR CONSTRUCTING A HEREDITARILY MINIMAX NETWORK WITH PREDEFINED VECTOR OF NODE DEGREES

P.S. Selin[1] selin@gipc.akita-u.ac.jp
V.I. Tsurkov[2] tsur@ccas.ru
A.A. Gurchenkov[2, 3] challenge2005@mail.ru

[1] **Akita University, Akita, Japan**
[2] **Dorodnitsyn Computing Centre Federal Research Centre Cumputer Science and Centrol, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation**
[3] **Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation**

Abstract

In contrast to the classical transportation problem, where supply and demand points are known, and it is required to minimize the transportation cost, we consider a minimax criterion. In particular, a matrix with the minimal largest element is sought in the class of nonnegative matrices with given sums of row and column elements. In this case, the concept of the minimax criterion can be interpreted as follows. Suppose that the shipment time from a supply point to a demand point is proportional to the amount to be shipped. Then, the minimax is the minimal time required to transport the total amount. It is a common situation that the decision maker does not know the tariff coefficients. In other situations, they do not have any meaning, and neither do nonlinear tariff objective functions. In such cases, the minimax interpretation leads to an effective solution. For the classes of undirected networks with predefined vector of node degrees (transport and network polyhedrons) by using a characteristic functions the analytical formulas of calculating the minimax values expressed in terms of the vector coordinates and a nonnegative parameter are obtained.

Keywords

Network optimization, transport type problems, minimax, minimax network, hereditarily minimax network, uniform network, transportation polyhedrons, network polyhedrons, predefined node degrees, fixed node degrees

The minimax values determine the necessary and sufficient conditions under which the truncated polyhedrons are not empty sets. Finally, we obtained an algorithm for constructing a hereditarily-minimax network in network polyhedrons

REFERENCES

[1] Cormen T., Leiserson Ch., Rivest R., Stein C. Introduction to algorithms. 3rd Edition. MIT Press, 2009.

[2] Zykov A.A. Osnovy teorii grafov [Fundamentals of graph theory]. Moscow, Vuzovskaya kniga, 2004. 664 p.

[3] Mironov A.A., Tsurkov V.I. Hereditarily minimax matrices in models of transportation type. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 1998, vol. 37, no. 6, pp. 927–944.

[4] Mironov A.A., Tsurkov V.I. Open transportation models with a minimax criterion. *Dokl. Math.*, 2001, vol. 64 (3), pp. 374–377.

[5] Tsurkov V., Mironov A. Minimax under transportation constrains. Dordrecht–Boston–London, Kluwer Academic Publishers, 1999.

[6] Lukoyanov N.Yu. Minimax and viscosity solutions in optimization problems for hereditary systems. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2010, vol. 269, pp. 214–225.
DOI: 10.1134/S0081543810060179

[7] Holstein E.G., Yudin D.B. Zadachi lineynogo programmirovaniya transportnogo tipa [Linear programming problem of the transport type]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 382 p.

[8] Goldsmith A. Wireless communications. Cambridge University Press, 2005. 571 p.

[9] Lewis F.L. Wireless sensor networks. *Smart Environments: Technologies, Protocols, and Applications*. N.Y., John Wiley, 2004. 432 p.

[10] Tishchenko S.A. Separators in planar graphs as a new characterization tool. *Fundam. Prikl. Mat.*, 2002, vol. 8, no. 4, pp. 1193–1214 (in Russ.).

[11] Voloshin V.I. Introduction to graph and hypergraph theory. N.Y., Nova Science Publishers, 2009.

[12] Selin P.S., Tsurkov V.I. Method of characteristic functions for classes of networks with fixed node degrees. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2014, vol. 53, no. 5, pp. 645–655. DOI: 10.1134/S1064230714050128

[13] Ding J., Tana P., Lu Y.-Z. Optimizing the controllability index of directed networks with the fixed number of control nodes. *Neurocomputing*, 2016, vol. 171, pp. 1524–1532.

[14] Fontanari J.F., Rodrigues F.A. Influence of network topology on cooperative problem-solving systems. *Theory in Biosciences*, 2015, pp. 1–10.

[15] Peng G.-S., Wu J. Optimal network topology for structural robustness based on natural connectivity. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2016, vol. 443, pp. 212–220. Available at: http://dx.doi.org/10.1016/j.physa.2015.09.023

[16] Abello J., Queyroi F. Network decomposition into fixed points of degree peeling. *Social Network Analysis and Mining*, 2014, no. 4, pp. 191.

[17] Horvat E.-A., Zweig K.A. A fixed degree sequence model for the one-mode projection of multiplex bipartite graphs. *Social Network Analysis and Mining*, 2013, vol. 3, no. 4, pp. 1209–1224.

[18] Dong G., Gao J., Du R., Tian L., Stanley H.E., Havlin S. Robustness of network of networks under targeted attack. *Physical Review E*, 2013, vol. 87, no. 5, pp. 052804-1–052804-11. DOI: 10.1103/PhysRevE.87.052804

[19] Richard M.G.A., Fanchon E. Reduction and fixed points of Boolean networks and linear network coding solvability. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2016, vol. 62, no. 5, pp. 2504–2519.

[20] Nazarov M.N. On the representation of graphs in the form of a special type of binary algebra. *Prikl. Diskr. Mat.*, 2015, no. 1, pp. 96–104.

Selin P.S. — Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Professor of Technical Sciences Faculty, Akita University (1-1 Tegatagakuen mach, Akita, Akita City, Japan).

Tsurkov V.I. — Dr. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department, Dorodnitsyn Computing Centre Federal Research Centre Computer Science and Control, Russian Academy of Sciences (Vavilova ul. 40, Moscow, 119333 Russian Federation).

Gurchenkov A.A. — Dr. Sci. (Phys.-Math.), leading researcher of the Dorodnitsyn Computing Centre Federal Research Centre Computer Science and Control, Russian Academy of Sciences (Vavilova ul. 40, Moscow, 119333 Russian Federation), Professor of Higher Mathematics Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Selin P.S., Tsurkov V.I., Gurchenkov A.A. An Algorithm for Constructing a Hereditarily Minimax Network with Predefined Vector of Node Degrees. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2017, no. 1, pp. 43–58. DOI: 10.18698/1812-3368-2017-1-43-58