

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УЕДИНЕННЫХ ВОЛН В ДВУХЖИДКОСТНОЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ В ПРОДОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

М.Б. Гавриков^{1,2}
В.В. Савельев^{1,3}

nadya_p@cognitive.ru
ssvvvv@rambler.ru

¹ Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН,
Москва, Российская Федерация

² МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

³ Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»,
Москва, Российская Федерация

Аннотация

Аналитически и численно исследовано взаимодействие уединенных волн в двухжидкостной магнитной гидродинамике. Рассмотрен наиболее общий случай волн в холодной плазме в продольном магнитном поле. Главная особенность — использование «точных» уравнений, а не того или иного приближенного подхода (модельного уравнения). В результате численного исследования решений системы восьми уравнений в частных производных показано, что найденные уединенные волны взаимодействуют с большой точностью как солитоны, т. е. как уединенные волны, являющиеся решениями различных модельных уравнений. Рассмотренные уединенные волны переносят плотные сильно замагниченные плазменные сгустки со скоростями порядка альфвеновской скорости. В качестве основной разностной методики решения системы уравнений использовано естественное обобщение классической двухшаговой схемы Лакса — Вендрофа

Ключевые слова

Двухжидкостная магнитная гидродинамика, уединенные волны, плазма, солитоны, продольное магнитное поле, дисперсия волн, схема Лакса — Вендрофа

Поступила в редакцию 16.06.2016
© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №16-11-10278)

Введение. Исследование уединенных волн — актуальная задача механики сплошных сред, имеющая важные применения. Для существования уединенных волн необходимо, чтобы тензор внутренних напряжений среды имел достаточно сложную структуру, гарантирующую кроме нелинейности уравнений динамики среды также наличие дисперсии. В плазменных сплошных средах кроме нелинейности и дисперсии для существования нелинейных волн требуется не локальная зависимость электрического поля от других параметров плазмы, выражаемая обычно сложной формой обобщенного закона Ома.

Особый интерес представляют уединенные волны, называемые солитонами, которые при взаимодействии с другими такими же уединенными волнами сохраняют форму, скорость и другие характеристики.

Исследование солитонов традиционно основано на следующих модельных уравнениях [1–3]: уравнение Кортевега — Де-Фриза; нелинейное уравнение Шредингера; синус уравнения Гордона. Для плазменных сред к этим уравнениям следует добавить уравнения Захарова [4], Кадомцева — Петвиашвили [5], уравнения нелинейных альфвеновских и магнитозвуковых волн [6] и др.

В настоящей работе численно исследовано взаимодействие уединенных волн специального вида, так называемых волновых пакетов, каждый из которых представляет собой нелинейные колебания, промодулированные по амплитуде уединенной волной. Такие структуры наиболее типичны для плазменных процессов и существуют только в замагниченной плазме. Именно продольное магнитное поле, заставляя вращаться частицы плазмы в поперечной плоскости, приводит к появлению нелинейных колебаний поперечных компонент скорости, магнитного и электрического полей, которые при определенных условиях образуют волновой пакет, бегущий вдоль магнитного поля. Эти условия для случая холодной плазмы и плоских волн приведены в работе [7]. Принципиальное отличие настоящей работы от аналогичных исследований заключается в отказе от идеологии модельных уравнений. Таким образом, точные уравнения двухжидкостной гидродинамики плазмы [8], выражающие фундаментальные законы сохранения массы, энергии, импульса электронов и ионов, а также законы электродинамики служат и для нахождения уединенных волн, и для исследования их взаимодействия. В этом смысле приведенные здесь результаты являются полезными при анализе результатов, полученных другим способом.

Как показано в работе, волновые пакеты при столкновении друг с другом подобны материальным частицам, они сохраняют форму, скорость, амплитуду и т. д., при этом процесс столкновения имеет конечную длительность.

Основные уравнения двухжидкостной магнитной гидродинамики. Двухжидкостная гидродинамика плазмы исходит из представления об электронах и ионах как о двух взаимно проникающих жидкостях, распределенных во всей области течения. В отсутствие диссипации для полностью ионизованной двухкомпонентной и квазинейтральной плазмы уравнения двухжидкостной гидродинамики плазмы [8] можно записать в следующей одножидкостной форме [9]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{U} = 0, \quad \frac{\partial \rho \mathbf{U}}{\partial t} + \operatorname{div} \Pi = 0; \quad (1)$$

$$\frac{d p_e}{d t} + \gamma p_e \operatorname{div} \mathbf{U} = \lambda_i \rho^{\gamma-1} \mathbf{j} \nabla \left(\frac{p_e}{\rho^\gamma} \right), \quad \frac{d p_i}{d t} + \gamma p_i \operatorname{div} \mathbf{U} = -\lambda_e \rho^{\gamma-1} \mathbf{j} \nabla \left(\frac{p_i}{\rho^\gamma} \right); \quad (2)$$

$$\mathbf{E} + \frac{c^2 \lambda_i \lambda_e}{4\pi \rho} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} [\mathbf{U}, \mathbf{H}] + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{W}, \quad \frac{d}{d t} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla, \quad (3)$$

где $\rho = \rho_e + \rho_i$ — суммарная плотность; $\mathbf{U} = (\rho_i \mathbf{v}_i + \rho_e \mathbf{v}_e) / \rho$ — массовая гидродинамическая скорость плазмы; $\lambda_i = m_i / (Ze)$; $\lambda_e = m_e / e$, Z — кратность заряда ионов; γ — показатель адиабаты; Π , \mathbf{W} — тензоры, вычисляемые по формулам

$$\begin{aligned} \Pi &= \Pi^h + \Pi^p + \Pi^c; \\ \Pi^h &= \rho \mathbf{U}\mathbf{U} + p\mathbf{I}_3, \quad \Pi^p = \frac{H^2}{8\pi} \mathbf{I}_3 - \frac{\mathbf{H}\mathbf{H}}{4\pi}, \quad \Pi^c = \lambda_i \lambda_e \frac{\mathbf{j}\mathbf{j}}{\rho}; \\ W &= (\lambda_e - \lambda_i) (\Pi^p + \Pi^c) + (\lambda_e p_i - \lambda_i p_e) \mathbf{I}_3 + \lambda_i \lambda_e (\mathbf{U}\mathbf{j} + \mathbf{j}\mathbf{U}). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь \mathbf{I}_3 — единичный трехмерный тензор. Кроме того, для простоты предположено, что электроны и ионы — идеальные политропные газы с общим показателем адиабаты. Система (1)–(4) замыкается уравнениями электродинамики Максвелла для квазистационарного электромагнитного поля

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \text{rot} \mathbf{E} &= 0, \quad \text{div} \mathbf{H} = 0; \\ \text{rot} \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом, система (1)–(5) — это замкнутая система уравнений относительно величин ρ , p_i , p_e , \mathbf{U} , \mathbf{H} , \mathbf{E} . По ее решению гидродинамические параметры электронов и ионов восстанавливаются по простым формулам

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{U} + \frac{\lambda_e}{\rho} \mathbf{j}, \quad \mathbf{v}_e = \mathbf{U} - \frac{\lambda_i}{\rho} \mathbf{j}, \quad \rho_i = \frac{\lambda_i}{\lambda} \rho, \quad \rho_e = \frac{\lambda_e}{\lambda} \rho, \quad \lambda = \lambda_e + \lambda_i. \quad (6)$$

Уравнения (1)–(3) математически эквивалентны законам сохранения массы, энергии, импульса для электронов и ионов [9]. Система (1)–(5) позволяет рассматривать плазму как сплошную среду, термодинамическое состояние которой задается тремя параметрами (ρ , p_i , p_e). Согласно (3), (4), имеется два принципиальных отличия от теории магнитной гидродинамики (МГД) [10]. Во-первых, тензор плотности потока импульса Π содержит дополнительное слагаемое Π^c (его можно назвать «токовым») — в классической МГД $\Pi_{\text{МГД}} = \Pi^h + \Pi^p$. Во-вторых, кардинально изменился обобщенный закон Ома (3), где появилась добавка $\sim \text{rot} \mathbf{E}$. В результате, в двухжидкостной МГД поле \mathbf{E} нелокально зависит от остальных параметров плазмы, в частности, для его нахождения необходимо решать краевую задачу для системы (вырожденных) эллиптических уравнений (3). Наконец, тензор W в обобщенном законе Ома (3), состоящий из так называемых холловских членов, также отличается от классического и холловского случаев дополнительными слагаемыми (в классической МГД [10] $W = 0$, в холловской МГД [11] $W = -\lambda_i (\Pi^p + p_e \mathbf{I}_3)$). Уравнения классической МГД формально получаются из системы (1)–(5), если в ней удалить все слагаемые, содержащие плотность ρ в знаменателе, а уравнения холловской МГД — если в системе (1)–(5) формально принять $\lambda_e = 0$.

Уравнения динамики холодной плазмы получают из системы (1)–(5) при $p_i = p_e = 0$. Тогда уравнения (2) выполнены тождественно и упрощаются выражения для тензоров Π^h и W :

$$\Pi^h = \rho \mathbf{U}\mathbf{U}, \quad W = (\lambda_e - \lambda_i) (\Pi^p + \Pi^c) + \lambda_e \lambda_i (\mathbf{U}\mathbf{j} + \mathbf{j}\mathbf{U}). \quad (7)$$

Уравнения бегущих волн в холодной плазме. Рассмотрим решения уравнений (1)–(5) в случае холодной плазмы, зависящие от параметров t , \mathbf{r} в комбинации $\theta = \mathbf{r}\mathbf{k} - at$, где \mathbf{k} — единичный вектор; a — константа. Такие решения обычно называются плоскими бегущими волнами, a — фазовой скоростью волны, \mathbf{k} — направлением распространения волны. Интересно взаимодействие уединенных бегущих волн, все параметры которых имеют конечные и равные предельные значения при $\theta \rightarrow \pm\infty$. Параметры произвольной бегущей волны $\mathbf{U}(\theta)$, $\rho(\theta)$, $\mathbf{H}(\theta)$, $\mathbf{E}(\theta)$ при фиксированных параметрах \mathbf{k} и a находят подстановкой в систему (1)–(5), где принято $p_i = p_e = 0$. После несложных преобразований получают следующие уравнения для поперечного магнитного поля $\mathbf{H}_\perp(\theta)$ и продольной скорости $u(\theta) = U_\parallel(\theta) - a$ в системе отсчета движущейся волны:

$$\begin{aligned}
 & Ju + \frac{H_\perp^2}{8\pi} = D; \\
 & \left(u - \frac{H_\parallel^2}{4\pi J} \right) \mathbf{H}_\perp - \frac{c^2 \lambda_i \lambda_e}{4\pi J} u \frac{d}{d\theta} (u \dot{\mathbf{H}}_\perp) + \frac{c H_\parallel}{4\pi J} (\lambda_i - \lambda_e) u [\mathbf{k}, \dot{\mathbf{H}}_\perp] + \mathbf{q} = 0.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь точка над буквой означает дифференцирование по θ , каждый вектор раскладывается вдоль (\parallel) и поперек (\perp) направления распространения волны \mathbf{k} ; $J \neq 0$, $D > 0$, $\mathbf{q} \perp \mathbf{k}$ — произвольные константы интегрирования. Кроме того, в бегущей волне всегда $H_\parallel(\theta) = \text{const}$. Остальные параметры волны выражаются через величины $u(\theta)$, $\mathbf{H}_\perp(\theta)$ по формулам:

$$\begin{aligned}
 & \rho = \frac{J}{u}, \quad U_\parallel = u + a, \quad U_\perp = \frac{\mathbf{q}_0}{J} + \frac{H_\parallel}{4\pi J} \mathbf{H}_\perp; \\
 & \mathbf{E}_\perp = \frac{1}{c} \left[\mathbf{k}, \mathbf{q} + \frac{H_\parallel}{J} \mathbf{q}_0 - a \mathbf{H}_\perp \right], \quad \mathbf{E}_\parallel = -\frac{1}{c} [\mathbf{U}_\perp, \mathbf{H}_\perp] - \frac{\lambda_i - \lambda_e}{8\pi\rho} \frac{dH_\perp^2}{d\theta} \mathbf{k}; \\
 & j_\parallel = 0, \quad j_\perp = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{k}, \dot{\mathbf{H}}_\perp],
 \end{aligned} \tag{9}$$

где $\mathbf{q}_0 \perp \mathbf{k}$ — еще одна константа интегрирования. Из $j_\parallel = 0$, в частности, следует, что в бегущей волне электроны и ионы вдоль направления волны \mathbf{k} двигаются с общей гидродинамической скоростью $U_\parallel(\theta)$, которая, как и поперечное электрическое поле $\mathbf{E}_\perp(\theta)$, зависит от фазовой скорости a . Система (8), очевидно, сводится к автономному дифференциальному уравнению второго порядка относительно $\mathbf{H}_\perp(\theta)$. В частном случае в двухжидкостной форме система (8) получена в работе [12], в общем случае — в работе [7].

Столкновения уединенных волн, являющихся решениями системы (8) для $H_\parallel = 0$ вида $\mathbf{H}_\perp(\theta) = H(\theta)\mathbf{e}_0$, где $\mathbf{e}_0 \perp \mathbf{k}$ — произвольный единичный вектор, $\mathbf{q} = q\mathbf{e}_0$, в которых вектор магнитного поля \mathbf{H} изменяется только по величине, сохраняя при этом фиксированное направление в поперечной плоскости, исследованы в работе [13].

В настоящей работе изучены уединенные волны другого вида, в которых вектор \mathbf{H}_\perp , напротив, вращается в поперечной плоскости вокруг начала координат, тем самым все время изменяя свое направление. Эти уединенные волны

относятся к волновым пакетам и являются частными решениями системы (8) для $\mathbf{q} = 0$. Численное исследование их столкновений представлено ниже. Случай $\mathbf{q} = 0$ соответствует инвариантности системы (8) относительно вращений в поперечной плоскости.

Решение уравнений бегущих волн (8) в случае $\mathbf{q} = 0$. Система (8) в случае $\mathbf{q} = 0$ полностью интегрируется. Оказывается, что удачной заменой независимой переменной ее можно свести к динамической системе, описывающей движение материальной точки в поперечной плоскости в специальном поле сил и тогда полная интегрируемость системы (8) следует из общих теорем классической механики. Однако рассмотрим более простой путь. Перепишем систему (8) для $\mathbf{q} = 0$ в безразмерном виде

$$u + H_{\perp}^2 = 2; \tag{10}$$

$$\left(\frac{u}{2} - b^2\right) \mathbf{H}_{\perp} - \xi^2 u \frac{d}{d\theta} \left(u \frac{d \mathbf{H}_{\perp}}{d\theta}\right) + \xi \Lambda b u \left[\mathbf{k}, \frac{d \mathbf{H}_{\perp}}{d\theta} \right] = 0,$$

где ξ, b, Λ — безразмерные параметры, равные

$$\xi^2 = \frac{c^2 \lambda_i \lambda_e}{4\pi \rho_0 L_0^2}, \quad b = \frac{H_{\parallel}}{H_0}, \quad \Lambda = \sqrt{\frac{\lambda_i}{\lambda_e}} - \sqrt{\frac{\lambda_e}{\lambda_i}}.$$

Здесь L_0, H_0, V_0, ρ_0 — характерные масштабы длины, напряженности магнитного поля, скорости и плотности, при этом выбор параметров H_0, V_0, ρ_0 увязан с константами бегущей волны J и $D - H_0 = \sqrt{4\pi D}, \rho_0 = 4J^2/D, V_0 = D/(2J)$. Тогда, как нетрудно проверить, $V_0 = H_0/\sqrt{4\pi\rho_0}$. Параметр $\xi = c/(\omega_p L_0)$ равен отношению скин-длины c/ω_p к характерному линейному масштабу, где ω_p — плазменная частота. Таким образом, решение системы (10) находится в фиксированной области $|H_{\perp}| < 2$ и зависит от параметров ξ, b .

Для решения системы (10) примем $\mathbf{H}_{\perp} = (0, H_y, H_z)$ и перейдем в поперечной плоскости к полярным координатам $H_y = H \cos \varphi, H_z = H \sin \varphi$. Итак, вместо функций $H_y(\theta), H_z(\theta)$, удовлетворяющих системе (10), будем искать функции $H(\theta), \varphi(\theta)$, удовлетворяющие системе дифференциальных уравнений, которая получится при подстановке величин $H(\theta), \varphi(\theta)$ в систему (10). Далее производные по θ также обозначены точкой над функцией. В результате получают систему уравнений

$$\begin{aligned} A \cos \varphi + B \sin \varphi &= 0; \\ -B \cos \varphi + A \sin \varphi &= 0, \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$\begin{aligned} A &= -\xi^2 u^2 (\dot{H} - H(\dot{\varphi})^2) + 2\xi^2 u H (\dot{H})^2 - \xi \Lambda b u H \dot{\varphi} + \left(\frac{u}{2} - b^2\right) H; \\ B &= \xi^2 u^2 (2\dot{H}\dot{\varphi} + H\ddot{\varphi}) - 2\xi^2 u H^2 \dot{H}\dot{\varphi} - \xi \Lambda b u \dot{H}. \end{aligned}$$

Соотношения (11), очевидно, равносильны равенствам $A = 0$, $B = 0$, которые и образуют искомую систему для нахождения функций $H(\theta)$, $\varphi(\theta)$. Условие $B = 0$ может быть проинтегрировано. Тогда запишем

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{2\Omega + \Lambda bH^2}{2u\xi H^2}, \quad \Omega = \text{const.} \quad (12)$$

Подставляя (12) в равенство $A = 0$, получаем уравнение для нахождения функции $H(\theta)$:

$$-\xi^2 u^2 \dot{H} + 2\xi^2 u H (\dot{H})^2 + \left(1 - \eta^2 b^2 - \frac{H^2}{2}\right) H + \frac{\Omega^2}{H^3} = 0, \quad (13)$$

где $\eta = \sqrt{1 + \frac{\Lambda^2}{4}}$; $u = 2 - H^2$.

Уравнение (13) легко интегрируется. Умножая (13) на \dot{H} , определяем

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{\xi^2}{2} (u\dot{H})^2 \right) + \frac{d}{d\theta} \Phi(H) = 0.$$

Здесь $\Phi(H)$ — потенциальная функция,

$$\Phi(H) = \int \left[-\frac{\Omega^2}{H^3} - \left(1 - \eta^2 b^2 - \frac{H^2}{2}\right) H \right] dH = \frac{H^4}{8} - \frac{1}{2} (1 - \eta^2 b^2) H^2 + \frac{\Omega^2}{2H^2}. \quad (14)$$

Откуда

$$\theta(H) = \pm \xi \int \frac{(2 - H^2) dH}{\sqrt{2(E - \Phi(H))}}, \quad (15)$$

где E — произвольная константа. Теперь из (12) с учетом (15) находим функцию

$$\varphi(H) = \int \frac{2\Omega + \Lambda bH^2}{2u\xi H^2} d\theta = \pm \int \frac{2\Omega + \Lambda bH^2}{2H^2 \sqrt{2(E - \Phi(H))}} dH. \quad (16)$$

Причем знаки в (15) и (16) соответствуют друг другу. Формулы (15), (16) позволяют определить функции $\theta(H)$, $\varphi(H)$, а также $H(\theta)$, $\varphi(\theta)$. Согласно приведенным формулам, решение расположено в «потенциальных ямах» $\Phi(H) \leq E$, лежащих в области $|H| < \sqrt{2}$, и на всей прямой $-\infty < \theta < \infty$ «склеивается» из «дуг», задаваемых формулами (15), (16). Несложно показать, что за исключением вырожденных случаев эти «дуги» выражаются через эллиптические интегралы. Анализ возникающих при этом случаев зависит от вида потенциальной функции $\Phi(H)$ и приведен в работе [7]. Здесь интересны только решения типа уединенной волны, которые относятся к вырожденным случаям и возникают только тогда, когда прямая $E = \text{const}$ касается одного (и только одного) края потенциальной ямы $\Phi(H) \leq E$. Такая ситуация возникает только при $\Omega = 0$ и $\eta^2 b^2 < 1$. Тогда потенци-

альная функция $\Phi(H)$ имеет вид, представленный на рис. 1. Для существования уединенной волны требуется, чтобы $E = 0$ и $H_m < \sqrt{2}$, где $H_m = 2\sqrt{1 - \eta^2 b^2}$. Таким образом, приходим к следующим необходимым и достаточным условиям существования уединенной волны:

$$\begin{aligned} \Omega = 0, \quad E = 0, \quad 0 < \alpha^2 < \frac{1}{2}; \\ \alpha^2 = 1 - \eta^2 b^2, \quad H_m = 2\alpha. \end{aligned} \tag{17}$$

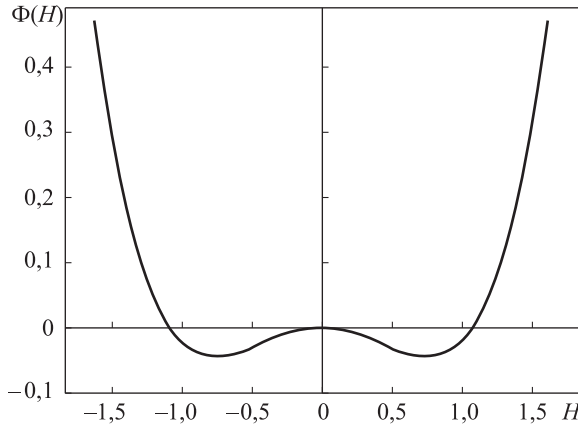


Рис. 1. Потенциальная функция $\Phi(H)$ ($\eta^2 b^2 = 0,7$) (14)

Формулы (15), (16) задают две полуограниченные дуги, аналитические выражения которых получают вычислением интегралов ($0 < H \leq H_m$)

$$\begin{aligned} \theta(H) = \pm \int \frac{(2 - H^2)}{\sqrt{-2\Phi(H)}} dH = \mp 2\xi \left(\frac{1}{H_m} \ln \frac{H_m + \sqrt{H_m^2 - H^2}}{H_m - \sqrt{H_m^2 - H^2}} - \sqrt{H_m^2 - H^2} \right) + \text{const}; \\ \varphi(H) = \pm \frac{\Lambda b}{2} \int \frac{dH}{\sqrt{-2\Phi(H)}} = \mp \frac{\Lambda b}{2H_m} \ln \frac{H_m + \sqrt{H_m^2 - H^2}}{H_m - \sqrt{H_m^2 - H^2}} + \text{const}, \end{aligned} \tag{18}$$

где константы определяются координатой горба $H = H_m$ уединенной волны и фазой вектора \mathbf{H}_\perp в горбе в начальный момент времени. По умолчанию, эти величины полагают нулевыми и тогда постоянные в (18) также равны нулю.

Рассмотрим граничную задачу о возбуждении уединенной волны в покоящейся плазме с плотностью ρ_∞ и с напряженностью магнитного поля $H_\infty = H_\parallel$, бегущей вдоль магнитного поля. Для характерных масштабов имеем

$$\begin{aligned} u_\infty = -a, \quad J = \rho_\infty u_\infty = -a\rho_\infty, \quad D = \rho_\infty u_\infty^2 = \rho_\infty a^2, \quad V_0 = \frac{D}{2|J|} = \frac{|a|}{2}; \\ \rho_0 = \frac{4J^2}{D} = 4\rho_\infty, \quad H_0 = \sqrt{4\pi D} = \sqrt{4\pi\rho_\infty} |a|. \end{aligned}$$

Откуда $b = \frac{H_{\parallel}}{H_0} = \frac{V_A}{|a|}$, где $V_A = \frac{H_{\parallel}}{\sqrt{4\pi\rho_{\infty}}}$. Тогда из условий (17) получаем ограничение на фазовую скорость a :

$$|V_A|\eta < |a| < \sqrt{2}|V_A|\eta. \tag{19}$$

Уединенную волну с фазовой скоростью $|a| \approx |V_A|\eta$ будем называть медленной, а с фазовой скоростью $|a| \approx \sqrt{2}|V_A|\eta$ — быстрой. Для любого значения скорости a , удовлетворяющего (19), найдется единственная уединенная волна, подчиненная указанным выше граничным условиям на бесконечности. Для этой волны функции $H(\theta)$ и $\varphi(\theta)$ вычисляются по формулам (18). Относительная амплитуда уединенной волны равна

$$A_m(a) = \frac{H_m H_0}{|H_{\parallel}|} = 2 \left| \frac{a}{V_A} \right| \sqrt{1 - \eta^2 \left(\frac{V_A}{a} \right)^2} = 2 \sqrt{\left(\frac{a}{V_A} \right)^2 - \eta^2}. \tag{20}$$

Очевидно, амплитуда $A_m(a)$ монотонно возрастает по $|a|$, для медленных волн $A_m(a) \approx 0$, для быстрых — $A_m(a) \approx 2\eta^2$. Для электрон-ионной плазмы эта величина приблизительно равна Λ , что составляет несколько десятков единиц. Например, для водородной плазмы максимальное значение амплитуды приблизительно составляет 42. Таким образом, быстрые уединенные волны обладают большими амплитудами, и поперечное магнитное поле в горбе уединенной волны в несколько десятков раз превышает фоновое магнитное поле H_{\parallel} в невозмущенной плазме.

Важнейшей характеристикой волновых пакетов $H_y(\theta)$, $H_z(\theta)$ является их ширина, совпадающая с шириной уединенной волны $H(\theta)$. Функция $H(\theta)$ — четная по θ и имеет единственную точку перегиба $\theta_0 > 0$. Проведем в точках перегиба $\pm\theta_0$ касательные к графику функции $H(\theta)$ до их пересечения с осью θ . Под шириной уединенной волны $H(\theta)$ и волновых пакетов $H_y(\theta)$, $H_z(\theta)$ будем понимать длину отрезка, отсекаемого от оси θ указанными касательными:

$$\Delta = 2 \left(\theta_0 - \frac{H_0}{\dot{H}(\theta_0)} \right) = 2(\theta_0 - H_0 \dot{\theta}(H_0)), \quad H_0 = H(\theta_0). \tag{21}$$

Точки перегиба определяют из уравнения $\ddot{H}(\theta) = 0$. Проще решить равносильное уравнение $\ddot{\theta}(H) = 0$ и убедиться, что оно имеет, с точностью до знака, единственное решение $H_0^2 = \frac{2\alpha^2}{1-\alpha^2}$. Теперь из (18) с учетом (13) для напряженности H_m находят величину θ_0 и получают следующее выражение для ширины (21):

$$\Delta = \frac{2\xi}{\alpha} \left(\ln \left| \frac{\sqrt{2} + s}{\sqrt{2} - s} \right| + 2\sqrt{2}(1-\alpha^2)s \right), \quad s = \sqrt{\frac{1-2\alpha^2}{1-\alpha^2}}. \tag{22}$$

Учитывая выражение $\alpha^2 = 1 - \eta^2 \left(\frac{V_A}{a} \right)^2$, из выражения (22) следует явная зависимость ширины от фазовой скорости волны. Нетрудно проверить, что $\Delta(a)$ монотонно убывает по $|a|$ от $+\infty$ для медленных волн и до 0 для быстрых волн.

Методика численного моделирования. Выше было установлено, что в покоящейся однородной плазме плотностью ρ_∞ в однородном магнитном поле с напряженностью $H_{||}$, вдоль этого поля могут распространяться уединенные волны (18) типа волновых пакетов с фазовой скоростью a , амплитудой $A_m(a)$ и шириной $\Delta(a)$. Волны с большей амплитудой более узкие и перемещаются быстрее более широких волн с меньшей амплитудой. В этих волнах продольное магнитное поле постоянно и равно $H_{||}$, а поперечное магнитное поле вращается в поперечной плоскости вокруг начала координат с переменной скоростью (12), при этом на $\pm\infty$ поперечное поле равно нулю. Тогда из формул (9) следует что, что и $E_{\perp}(\pm\infty) = 0$.

Рассмотрим три задачи о взаимодействии рассмотренных выше волн. Интересно, что происходит

- 1) при движении двух волн одинаковой амплитуды навстречу друг другу;
- 2) при движении двух волн разной амплитуды навстречу друг другу;
- 3) при набегании волны с большой амплитудой на волну с меньшей амплитудой, когда волны движутся в одном направлении.

Принципиально важно, что взаимодействие уединенных волн определяется не модельными уравнениями (типа Кортевега — Де-Фриза и др.), а полной системой уравнений гидродинамики двухжидкостной плазмы, выражающей фундаментальные законы сохранения массы, импульса, энергии, и законами электродинамики. Для математического исследования взаимодействия волн соответствующая система уравнений в частных производных решается численно.

Направим ось x вдоль направления распространения волны \mathbf{k} и введем комплексные обозначения для поперечных компонент векторов \mathbf{U} , \mathbf{H} , \mathbf{E} :

$$U = U_y + iU_z, \quad H = H_y + iH_z, \quad E = E_y + iE_z.$$

Тогда в одномерной ($\partial / \partial y = \partial / \partial z = 0$) геометрии и в приближении холодной плазмы ($p_e = p_i = 0$) уравнения (1)–(5) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_x}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial \rho U_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho U_x^2 + \frac{|H|^2}{8\pi} \right) &= 0; \\ \frac{\partial \rho U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho U_x U - \frac{H_{||}}{4\pi} H \right) &= 0; \end{aligned} \tag{23}$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t} + i \frac{\partial E}{\partial x} = 0;$$

$$E - \frac{c^2 \lambda_e \lambda_i}{4\pi\rho} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = i \frac{H_{\parallel}}{c} H - i \frac{U_x}{c} H + \frac{\lambda_i - \lambda_e}{4\pi\rho} H_{\parallel} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{c \lambda_e \lambda_i}{4\pi\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(U_x \frac{\partial H}{\partial x} \right). \quad (23)$$

Система (23) решается на прямой $-\infty < x < +\infty$ для $t \geq 0$ с начальными условиями при $t = 0$, которые уточняются ниже, и с граничными условиями на бесконечности

$$\rho(\pm\infty) = \rho_{\infty}, \quad U_x(\pm\infty) = 0, \quad U(\pm\infty) = 0, \quad H(\pm\infty) = 0, \quad E(\pm\infty) = 0. \quad (24)$$

Для численного решения задачи (23), (24) перепишем ее в безразмерной форме, полагая, что характерные масштабы величин удовлетворяют соотношениям $E_0 = V_0 H_0 / c$, $V_0 = H_0 / \sqrt{4\pi\rho_0}$, $t_0 = L_0 / V_0$, $\rho_0 = \rho_{\infty}$ и используя компактную векторную запись

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u}, H)}{\partial x} = 0;$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + i \frac{\partial E}{\partial x} = 0; \quad (25)$$

$$E - g(\mathbf{u}) \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = D(\mathbf{u}, H)$$

с граничными условиями

$$u_1(\pm\infty) = 1, \quad u_2(\pm\infty) = 0, \quad u_3(\pm\infty) = 0, \quad H(\pm\infty) = 0, \quad E(\pm\infty) = 0. \quad (26)$$

Здесь

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) = (\rho, \rho U_x, \rho U);$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}, H) = \left(u_2, \frac{u_2^2 + |H|^2}{2}, \frac{u_2 u_3 - H_{\parallel} H}{u_1} \right) = \left(\rho U_x, \rho U_x^2 + \frac{|H|^2}{2}, \rho U_x U - H_{\parallel} H \right);$$

$$g(\mathbf{u}) = \frac{\xi^2}{u_1}, \quad D(\mathbf{u}, H) = \frac{i}{u_1} \left(H_{\parallel} u_3 - H u_2 - i \Lambda \xi H_{\parallel} \frac{\partial H}{\partial x} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_2}{u_1} \frac{\partial H}{\partial x} \right) \right).$$

В записи (25) система (23) распадается на «гидродинамическую» часть, записанную в дивергентном виде, и «электродинамическую» часть, состоящую из закона Ома и закона Фарадея. Рассмотрим численный метод решения системы (25), основанный на двухшаговой схеме Лакса — Вендрофа [14] для гидродинамических уравнений. Выберем равномерную разностную сетку на прямой $x_k = kh$, $-\infty < k < +\infty$, где k — целое; $h > 0$ — шаг сетки. Переход от разностной аппроксимации неизвестных функций на сетке с временного слоя $t = t_0$ $\{\rho_k^0, U_{x,k}^0, U_k^0, H_k^0, E_k^0\}$ на слой $t = t_0 + \tau$ $\{\rho_k^1, U_{x,k}^1, U_k^1, H_k^0, E_k^1\}$ проходит в два этапа.

Этап 1. Вычисляем вспомогательные сеточные функции

$$\{\rho_k^{1/2}, U_{x,k}^{1/2}, U_k^{1/2}, H_k^{1/2}, E_k^{1/2}\},$$

которые можно интерпретировать как приближенные значения неизвестных функций в «дробных» узлах $x_{k+1/2} = (k+1/2)h$ в момент времени $t_0 + \tau/2$:

$$\frac{\mathbf{u}_{k+1/2}^{1/2} - \mathbf{u}_{k+1/2}^0}{\tau/2} + \frac{\mathbf{f}(\mathbf{u}_{k+1}^0, H_{k+1}^0) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_k^0, H_k^0)}{h};$$

$$\frac{H_{k+1/2}^{1/2} - H_{k+1/2}^0}{\tau/2} + i \frac{E_{k+1}^0 - E_k^0}{h} = 0, \quad \mathbf{u}_{k+1/2}^0 = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_k^0 + \mathbf{u}_{k+1}^0), \quad H_{k+1/2}^0 = \frac{1}{2}(H_k^0 + H_{k+1}^0),$$

$$E_{k+1/2}^{1/2} - g(\mathbf{u}_{k+1/2}^{1/2}) \frac{E_{k+3/2}^{1/2} - 2E_{k+1/2}^{1/2} + E_{k-1/2}^{1/2}}{h^2} = D(\mathbf{u}^{1/2}, H^{1/2})_{k+1/2}.$$

Простейшая аппроксимация дифференциального оператора $D(\mathbf{u}^{1/2}, H^{1/2})$:

$$D(\mathbf{u}^{1/2}, H^{1/2})_{k+1/2} = iH_{\parallel} U_{k+1/2}^{1/2} - iH_{k+1/2}^{1/2} U_{x,k+1/2}^{1/2} + \frac{i\xi}{\rho_{k+1/2}^{1/2}} \left\{ -i\Lambda H_{\parallel} \frac{H_{k+3/2}^{1/2} - H_{k-1/2}^{1/2}}{2h} + \right.$$

$$\left. + \frac{\xi}{h} \left[\frac{U_{x,k+3/2}^{1/2} + U_{x,k+1/2}^{1/2}}{2} \frac{H_{k+3/2}^{1/2} - H_{k+1/2}^{1/2}}{h} - \frac{U_{x,k+1/2}^{1/2} + U_{x,k-1/2}^{1/2}}{2} \frac{H_{k+1/2}^{1/2} - H_{k-1/2}^{1/2}}{h} \right] \right\}.$$

Этап 2. Вычисляем искомые сеточные функции на новом слое, зная вспомогательные функции, определенные на этапе 1:

$$\frac{\mathbf{u}_k^1 - \mathbf{u}_k^0}{\tau} + \frac{\mathbf{f}(\mathbf{u}_{k+1/2}^{1/2}, H_{k+1/2}^{1/2}) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_{k-1/2}^{1/2}, H_{k-1/2}^{1/2})}{h} = 0;$$

$$\frac{H_k^1 - H_k^0}{\tau} + i \frac{E_{k+1}^{1/2} - E_k^{1/2}}{h} = 0;$$

$$E_k^1 - g(\mathbf{u}_k^1) \frac{E_{k+1}^1 - 2E_k^1 + E_{k-1}^1}{h^2} = D(\mathbf{u}^1, H^1)_k.$$

Естественная аппроксимация для оператора $D(\mathbf{u}^1, H^1)_k$:

$$D(\mathbf{u}^1, H^1)_k = iH_{\parallel} U_k^1 - iH_k^1 U_{x,k}^1 + \frac{i\xi}{\rho_k^1} \left\{ -i\Lambda H_{\parallel} \frac{H_{k+1}^1 - H_{k-1}^1}{2h} + \right.$$

$$\left. + \frac{\xi}{h} \left[\frac{U_{x,k+1}^1 + U_{x,k}^1}{2} \frac{H_{k+1}^1 - H_k^1}{h} - \frac{U_{x,k}^1 + U_{x,k-1}^1}{2} \frac{H_k^1 - H_{k-1}^1}{h} \right] \right\}.$$

При этом $g(\mathbf{u}_{k+1/2}^{1/2}) = \frac{\xi^2}{\rho_{k+1/2}^{1/2}}, \quad g(\mathbf{u}_k^1) = \frac{\xi}{\rho_k^1}.$

Реальный расчет проводят на конечной сетке в области $[0, L]$ в целочисленных узлах $x_k = kh, \quad h = L/N, \quad 0 \leq k \leq N$, с учетом граничных условий (26). На этапе 1 вспомогательные величины $\mathbf{u}^{1/2}, H^{1/2}, E^{1/2}$ вычисляют во внутренних дробных узлах. На этапе 2 расчет величин \mathbf{u}^1, H^1 выполняют во всех целых узлах, а расчет

величины E^1 — во всех внутренних целых узлах. Недостающие (при расчете $E^{1/2}$ на этапе 1 и u^1 , H^1 на этапе 2 значения полагают константами в соответствии с граничными условиями (26). Сеточные функции $E^{1/2}$, E^1 находят прогонкой с нулевыми, согласно (26), условиями на границе. Наконец, шаг по времени τ выбирают из условия Куранта

$$\tau = q \frac{h}{\varepsilon + \max(|V_{A,k}^0| + |U_{x,k}^0|)},$$

где ε — малая величина; $0 < q < 1$ — коэффициент запаса; $V_{A,k}^0 = |H_k^0| / \sqrt{4\pi\rho_k^0}$.

Результаты расчетов. Рассмотрим безразмерную запись полученных выше решений, используя те же единицы измерения, что и для системы (25):

$$\begin{aligned} \theta(H) &= \pm \frac{\xi}{a} \left(\sqrt{H_m^2 - H^2} - \frac{a^2}{H_m} \ln \frac{H_m + \sqrt{H_m^2 - H^2}}{H_m - \sqrt{H_m^2 - H^2}} \right); \\ \varphi(H) &= \pm \frac{\Lambda}{2H_m} \ln \frac{H_m + \sqrt{H_m^2 - H^2}}{H_m - \sqrt{H_m^2 - H^2}}, \quad u = -\frac{2a^2 - H^2}{2a}, \quad \rho = \frac{2a^2}{2a^2 - H^2}, \quad E = iaHe^{i\varphi}. \end{aligned} \tag{27}$$

Причем $0 < H \leq H_m = \sqrt{4a^2 - 4 - \Lambda^2}$, $\eta < |a| < \sqrt{2}\eta$, где a — безразмерная фазовая скорость (скорость в единицах $V_A = H_{||} / \sqrt{4\pi\rho_{\infty}}$). Функцию $H(\theta) = H_a(\theta)$ получают обращением $\theta(H)$ в (27).

Рассмотрим результаты расчетов для электрон-позитронной плазмы, когда $\Lambda = 0$, $\varphi(H) = \text{const}$. Полагая эту постоянную равной нулю, получаем $H_y = H_a(\theta)$, $H_z = 0$, $E_y = 0$, $E_z = aH_y$, а остальные параметры волны определяем по формулам (27). Таким образом, в случае электронно-позитронной плазмы волновой пакет вырождается в линейно поляризованную уединенную волну. Далее предположим $\xi = 1, H_{||} = 1$.

Задача о взаимодействии волн при движении двух волн одинаковой амплитуды навстречу друг другу. Рассмотрим эволюцию двух волн равной амплитуды $A_m = 0,9$,двигающихся навстречу друг другу с фазовой скоростью $a = 1,1$. Для этого систему (25), (26) решают численно с начальным условием для магнитного поля

$$H(0, x) = H_{1,1}(x - 25), \quad 0 \leq x \leq 50;$$

$$H(0, x) = H_{-1,05}(x - 75), \quad 50 \leq x \leq 100$$

на отрезке $[0, 100]$. Начальные условия для других параметров плазмы вычисляют по $H(0, x)$ и формулам (27). Расчетные профили $H(t, x)$ для различных моментов времени приведены на рис. 2. Сначала волны двигаются навстречу друг другу, не меняя формы (рис. 2, а). Затем (рис. 2, б) начинается слияние двух волн в одну (рис. 2, в), в результате чего возникает единая волна, с амплитудой,

меньшей, чем суммарная амплитуда волн до слияния. Далее образовавшееся возмущение распадается и рождает две волны (рис. 2, з), расходящиеся в противоположные стороны с теми же скоростями и амплитудами, что и до слияния (рис. 2, д). Как показал расчет, в хвосте каждой расходящейся волны все же возникают колебания малой амплитуды, заполняющие пространство между волнами. Эти колебания, по-видимому, можно интерпретировать как излучение, возникающее после столкновения волн. Однако этот вопрос требует дальнейшего изучения.

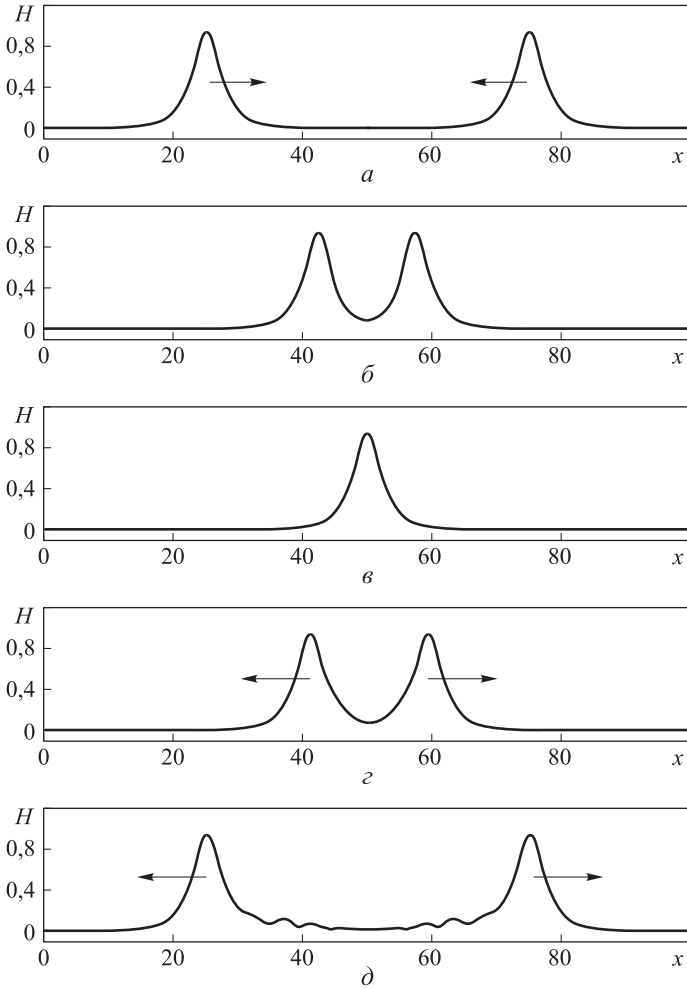


Рис. 2. Профили распределений $H(t, x)$ по x в различные моменты времени (представлены пять моментов времени (a–д), показывающих эволюцию системы из двух уединенных волн одинаковой амплитуды,двигающихся навстречу друг другу)

Задача о взаимодействии волн при движении двух волн разной амплитуды навстречу друг другу. Пусть навстречу друг другу двигаются уединенные волны с разными амплитудами и фазовыми скоростями: слева направо движется волна с амплитудой $A_m=0,9$ и фазовой скоростью $a = 1,1$, справа налево

волна с амплитудой $A_m=0,7$ и скоростью $a=-1,05$. Для этого случая начальное магнитное поле равно

$$H(0, x) = H_{1,1}(x-25), \quad 0 \leq x \leq 50;$$

$$H(0, x) = H_{-1,05}(x-75), \quad 50 \leq x \leq 100.$$

Расчетные профили $H(t, x)$ приведены на рис. 3. Основные закономерности взаимодействия волн такие же, как и в предыдущем (симметричном) случае равных амплитуд. Амплитуда возмущения после слияния волн по-прежнему меньше суммарной амплитуды волн до слияния. Форма, фазовые скорости и амплитуды волн после взаимодействия совпадают с теми, которые были до взаимодействия.

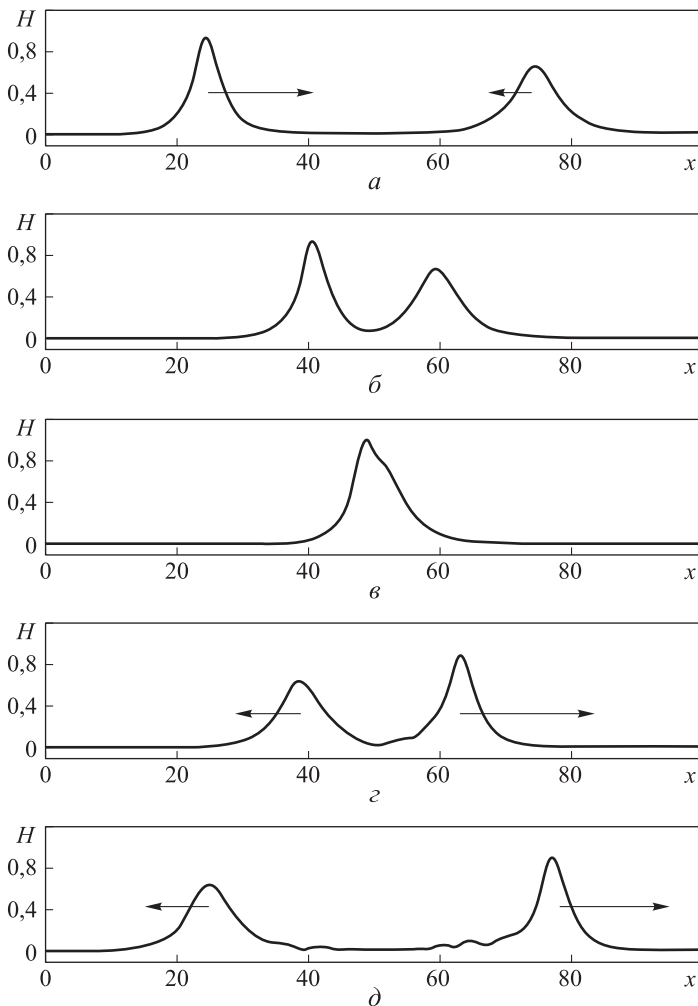


Рис. 3. Профили распределений $H(t, x)$ по x в различные моменты времени (представлены пять моментов времени (а–д), показывающих эволюцию двух уединенных волн разной амплитуды, двигающихся навстречу друг другу)

Задача о взаимодействии при набегании волны с большой амплитудой на волну с меньшей амплитудой, когда волны движутся в одном направлении.

Рассмотрим случай, когда волна с большей амплитудой $A_m = 1,3$ и большей фазовой скоростью $a = 1,2$ догоняет волну с меньшей амплитудой $A_m = 0,7$ и меньшей фазовой скоростью $a = 1,05$. При этом начальное условие имеет вид

$$H(0, x) = H_{1,2}(x - 60), \quad 0 \leq x \leq 80;$$

$$H(0, x) = H_{1,05}(x - 115), \quad 80 \leq x \leq 140.$$

Решение находят на отрезке $[0, 700]$ и $H(0, x) = 0$ для $140 \leq x \leq 700$. Расчетные профили $H(t, x)$ в различные моменты времени приведены на рис. 4.

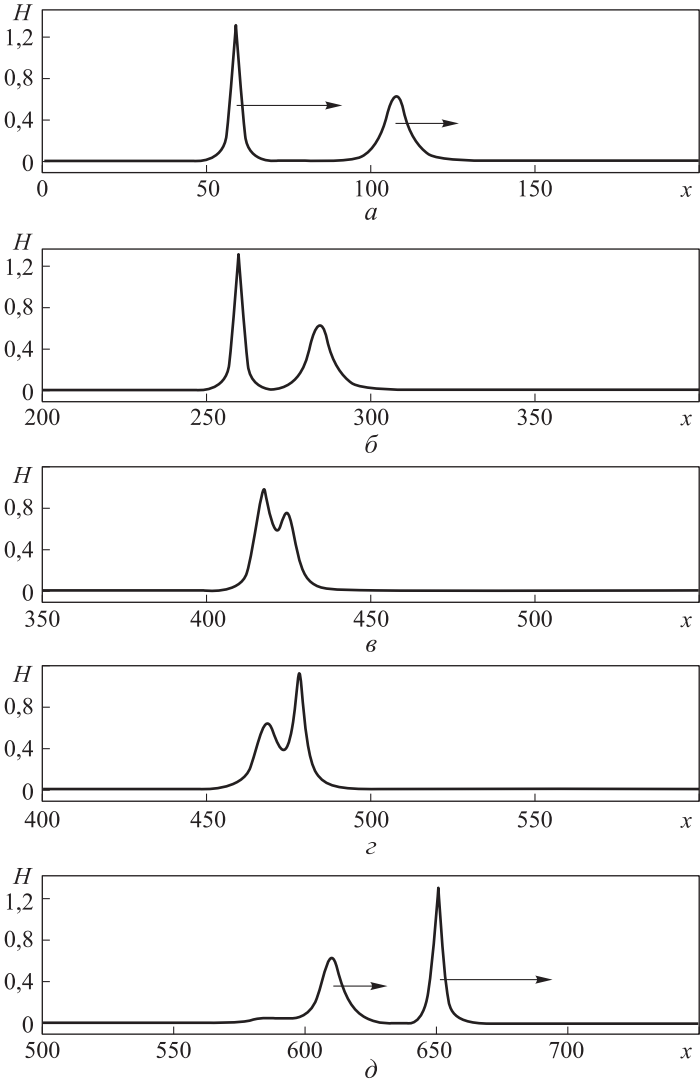


Рис. 4. Профили распределений $H(t, x)$ по x в различные моменты времени (представлены пять моментов времени (a–д), показывающих эволюцию системы из двух уединенных волн различной амплитуды, двигающихся в одном направлении)

Волна с большей амплитудой догоняет волну с меньшей амплитудой и, взаимодействуя с ней, порождает некоторое возмущение, которое затем распадается на две волны с такими же параметрами, что и до взаимодействия. Однако теперь волна с большей амплитудой располагается правее волны с меньшей амплитудой и убегает от нее.

Выше были показаны профили только для магнитного поля. Аналогичные распределения по x имеют место и для остальных параметров плазмы.

Заключение. Общий качественный вывод проведенного исследования заключается в том, что рассмотренные уединенные волны в плазме в рамках двухжидкостной МГД ведут себя подобно настоящим солитонам, т. е. взаимодействуют друг с другом, сохраняя после взаимодействия свои характеристики.

Подобные эффекты характерны, прежде всего, для решений модельных уравнений (уравнения Кортевега — Де-Фриза, нелинейного уравнения Шредингера и т. д.) и обычно объясняются интегрируемостью и наличием бесконечного числа первых интегралов уравнений [2] и последующим применением разнообразной математической техники (метод обратной задачи рассеяния, преобразования Бэклунда, уравнения Лакса, цепочки Тода и пр. [2, 3]).

Некоторые из этих особенностей (неупругие эффекты, образование одиночного пика для встречных волн) обнаружены численно на основе полной системы уравнений гидродинамики двухжидкостной холодной плазмы, т. е. законов сохранения массы, импульса и уравнений Максвелла. Отметим также, что некоторые математические свойства (свойство Пенлеве) уравнений бегущих волн (8) рассмотрены в работе [15].

Настоящая работа проведена как естественное продолжение работ по построению новых моделей плазмы для исследования процессов в плазменных ускорителях и новых типах магнитных ловушек.

ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов. Метод обратной задачи / под ред. С.П. Новикова. М.: Наука, 1980. 319 с.
2. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, Физматлит, 1986. 528 с.
3. Солитоны в действии. Сборник / под ред. К. Лонгрена, Э. Скотта. М.: Мир, 1981. 311 с.
4. Захаров В.Е. Коллапс ленгмюровских волн // ЖЭТФ. 1972. Т. 62. Вып. 5. С. 1745–1759.
5. Кадомцев Б.Б., Петвиашвили В.И. Об устойчивости уединенных волн в слабодиспергирующих средах // Доклады АН СССР. 1970. Т. 192. С. 753–756.
6. Mio K., Ogino T., Minami K., Takeda S. Modified nonlinear Schrödinger equation for Alfvén waves propagating along the magnetic field in cold plasma // J. Phys. Soc. Japan. 1976. Vol. 41. P. 265–271.
7. Гавриков М.Б. Аперiodические колебания холодной плазмы // Препринт № 33. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР, 1991. 28 с.
8. Брагинский С.И. Явления переноса в плазме. Вопросы теории плазмы. Вып. 1. М.: Атомиздат, 1963. С. 183–272.

9. Гавриков М.Б., Сорокин Р.В. Однородные деформации двухжидкостной плазмы с учетом инерции электронов // Известия РАН. МЖГ. 2008. Т. 6. С. 156–169.
10. Куликовский А.Г., Любимов Г.А. Магнитная гидродинамика. М.: Логос, 2005. 324 с.
11. Морозов А.И., Соловьев Л.С. Стационарные течения плазмы в магнитном поле. Вопросы теории плазмы. Вып. 8. М.: Атомиздат, 1974. С. 3–86.
12. Saffman P.G. Propagating of a solitary wave along a magnetic field in a cold collision-free plasma // J. Fluid Mech. 1961. Vol. 11. P. 16–20.
13. Гавриков М.Б., Савельев В.В., Таюрский А.А. Солитоны в двухжидкостной магнитной гидродинамике с учетом инерции электронов // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2010. Т. 18. № 4. С. 132–147.
14. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 618 с.
15. Gavrikov M.B., Kudryashov N.A., Petrov B.A., Savelyev V.V., Sinelshchikov D.I. Solitary and periodic waves in two-fluid magnetohydrodynamics // Communications of Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2016. Vol. 38. P. 1–7.

Гавриков Михаил Борисович — канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник ИПМ им. М.В. Келдыша (Российская Федерация, 125047, Москва, Миусская пл., д. 4), доцент кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, 2-я Бауманская ул., д. 5).

Савельев Вячеслав Владимирович — канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник ИПМ им. М.В. Келдыша (Российская Федерация, 125047, Москва, Миусская пл., д. 4), доцент кафедры «Прикладная математика» Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ» (Российская Федерация, 115409, Москва, Каширское ш., д. 31).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Гавриков М.Б., Савельев В.В. Взаимодействие уединенных волн в двухжидкостной магнитной гидродинамике в продольном магнитном поле // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2017. № 1. С. 59–77. DOI: 10.18698/1812-3368-2017-1-59-77

THE INTERACTION OF SOLITARY WAVES IN TWO-FLUID MAGNETO-HYDRODYNAMICS IN A LONGITUDINAL MAGNETIC FIELD

M.B. Gavrikov^{1,2}

V.V. Savelyev^{1,3}

nadya_p@cognitive.ru

ssvvvv@rambler.ru

¹ Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

² Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

³ National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, Russian Federation

Abstract

The article examines analytically and numerically the interactions of solitary waves in two-fluid magnetohydrodynamics (MHD). We consider the most general case of waves in a cold plasma in a longitudinal magnetic field. The main feature of this work is the use of "exact" equations, rather

Keywords

Two-fluid magnetohydrodynamics, solitary waves, plasma, solitons, a longitudinal magnetic field, wave dispersion, Lax — Wendroff difference scheme

than an approximate approach (the model equations). We have numerically studied the solutions of a system of 8 partial differential equations. Findings of the research show that the solitary waves interact with great precision as the solitons, i. e. solitary waves being the solutions to various model equations. The considered solitary waves transfer dense, strongly magnetized plasmoids with velocities of the Alfvén velocity order. As the main difference method for solving the system of equations we used the natural generalization of the classical two-step Lax — Wendroff difference scheme for hyperbolic equation

REFERENCES

- [1] Novikov S.P., Manakov S.V., Pitaevsky L.P., Zakharov V.E. Theory of solitons: The inverse scattering method. N.Y., Plenum, 1984.
- [2] Faddeev L.D., Takhtajan L.A. Hamiltonian methods in the theory of solitons. Berlin, Springer-Verlag, 1987.
- [3] Lonngren K., Scott A., eds. Solitons in action. N.Y., Academic Press, 1978.
- [4] Zakharov V.E. Collapse of Langmuir waves. *JETP*, 1972, vol. 35, no. 5, pp. 908–916.
- [5] Kadomtsev B.B., Petviashvili V.I. On the stability of solitary waves in weakly dispersing media. *Soviet Physics Doklady*, 1970, vol. 15, p. 539.
- [6] Mio K., Ogino T., Minami K., Takeda S. Modified nonlinear Schrödinger equation for Alfvén waves propagating along the magnetic field in cold plasma. *J. Phys. Soc. Japan*, 1976, vol. 41, pp. 265–271.
- [7] Gavrikov M.B. Cold plasma aperiodic oscillations. *Preprint no. 33. Moscow, Keldysh Inst. Prikl. Mat. of the Academy of Sciences of the USSR*, 1991. 28 p.
- [8] Braginskii S.I. Yavleniya perenosov v plazme. Voprosy teorii plazmy. Vyp. 1 [Transport phenomena in plasma. The problems of the plasma theory. Vol. 1]. Moscow, Atomizdat Publ., 1963, pp. 183–272.
- [9] Gavrikov M.B., Sorokin R.V. Homogeneous deformation of a two-fluid plasma with allowance for electron inertia. *Fluid Dynamics*, 2008, vol. 43, iss. 6, pp. 977–989. DOI: 10.1134/S0015462808060197
- [10] Kulikovskiy A.G., Lyubimov G.A. Magnetohydrodynamics. Addison-Wesley, Reading, Mass, 1965.
- [11] Morozov A.I., Solov'ev L.S. Stationary flows in a magnetic field. Voprosy teorii plazmy. Iss. 8 [Steady plasma flows in a magnetic field. Problems in the plasma theory]. Moscow, Atomizdat Publ., 1974, pp. 3–86.
- [12] Saffman P.G. Propagation of a solitary wave along a magnetic field in a cold collision-free plasma. *J. Fluid Mech.*, 1961, vol. 11, pp. 16–20.
- [13] Gavrikov M.B., Savel'ev V.V., Tayurskiy A.A. Solitons in two-fluid magnetohydrodynamics with non-zero electron inertia. *Izvestiya vuzov. Prikladnaya nelineynaya dinamika* [Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics], 2010, vol. 18, no. 4, pp. 132–147 (in Russ.).
- [14] Roach P. Computational fluid dynamics. Hermosa Publishers Albuquerque, 1976.

[15] Gavrikov M.B., Kudryashov N.A., Petrov B.A., Savelyev V.V., Sinelshchikov D.I. Solitary and periodic waves in two-fluid magnetohydrodynamics. *Communications of Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2016, vol. 38, pp. 1–7.

Gavrikov M.B. — Cand. Sci. (Phys.-Math.), senior researcher of Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (Miusskaya ploshchad' 4, Moscow, 125047 Russian Federation), Assoc. Professor of Applied Mathematics Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation).

Savelyev V.V. — Cand. Sci. (Phys.-Math.), senior researcher of Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (Miusskaya ploshchad' 4, Moscow, 125047 Russian Federation), Assoc. Professor of Applied Mathematics Department, National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute) (Kashirskoe shosse 31, Moscow, 115409 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Gavrikov M.B., Savelyev V.V. The Interaction of Solitary Waves in Two-Fluid Magnetohydrodynamics in a Longitudinal Magnetic Field. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2017, no. 1, pp. 59–77. DOI: 10.18698/1812-3368-2017-1-59-77



В Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана
вышло в свет учебное пособие авторов

Е.А. Власовой, В.С. Зарубина, Г.Н. Кувыркина

**«Математические модели процессов
теплопроводности»**

Изложены сведения, составляющие содержание раздела «Математические модели тепловых систем» курса «Математические модели технических систем». Приведены примеры решения задач, а также контрольные вопросы и задачи для самостоятельной работы студентов. Часть задач может служить основой для проведения студентами самостоятельной научно-исследовательской работы.

По вопросам приобретения обращайтесь:

105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1
+7 (499) 263-60-45
press@bmstu.ru
www.baumanpress.ru