УДК 519.213 DOI: 10.18698/1812-3368-2017-2-12-21

# ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ ФОРМУЛ ПРИБЛИЖЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

**Р.С. Исмагилов**[1] ismagil@bmstu.ru
**Л.Е. Филиппова**[2]

**[1] МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация**
**[2] Московский институт электроники и математики им. А.Н. Тихонова, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, Российская Федерация**

**Аннотация**

Рассмотрена задача приближенного интегрирования функций многих переменных. Указанные функции взяты из пространства с гауссовой мерой, по которой вычислено усредненное значение квадратического отклонения интеграла от интегральной суммы. Приведен порядок стремления к нулю среднеквадратического отклонения в зависимости от параметров, задающих интегральную сумму. Выведены вероятностные оценки погрешностей приближенного интегрирования

**Ключевые слова**

*Приближенное интегрирование, гауссова мера, функция многих переменных, вероятностные оценки*

Поступила в редакцию 17.10.2016


**Введение.** Классический пример применения вероятностных методов к вычислительным проблемам — метод Монте-Карло [1]. Созданный в 1950-е годы, этот метод использовался для решения большого количества задач и, в частности, для приближенного интегрирования функций. Несколько позднее в этой области возникло еще одно направление, которое связано с приближенным интегрированием функции, случайным образом выбранной из данного класса; предполагается, что в этом классе задана вероятностная мера. Первое исследование в этом направлении выполнено в работе А.В. Сульдина [2], в которой изучена задача приближения интеграла $Jf = \int_a^b f(x)dx$ ($f$ — непрерывная функция) интегральной суммой[1] $S^n f = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1})$. В указанной работе оценена погрешность $Jf - S^n f$ для случайно взятой функции $f$; имеется в виду случайность относительно меры Винера в пространстве непрерывных функций. Вычислено среднеквадратичное отклонение $\mathrm{M}(Jf - S^n f)^2$ (М — математическое

[1] Это хорошо известный метод прямоугольников для приближенного интегрирования.

ожидание). В частности, доказано, что при фиксированном $n$ это отклонение минимально при равноотстоящем наборе узлов.

Впоследствии вероятностные оценки погрешности были рассмотрены и для других приближенных методов. Обзору таких работ и дальнейшему развитию тематики посвящена работа С. Смейла [3], в которой изучено пространство Соболева $H^1$ на отрезке $[0,1]$; это есть гильбертово пространство функций со скалярным произведением $(f,g)=f(0)g(0)+\int\limits_{[0,1]} f'(x)g'(x)dx.$ В этом пространстве введена гауссова мера. В качестве приближенного значения интеграла взята интегральная сумма $S^n f = n^{-1}\sum\limits_{k=1}^{n} f(k/n).$ Вычислена усредненная погрешность $\mathrm{M}(|Jf - S^n f|).$ Аналогичный результат получен и для других приближенных методов интегрирования; это позволяет сравнить методы интегрирования по их эффективности.

Различные применения вероятностных методов к вычислительным проблемам приведены в работе Ф.М. Ларкина[2] [4]. В предлагаемой работе изучена задача приближенного интегрирования (и вероятностной оценки погрешности) для функций многих переменных. Таким образом, здесь рассмотрим пространства гладких функций, заданных на множестве $\mathbf{R}^n$. В эти пространства введена гауссова мера (способы введения такой меры изложены далее), и рассмотрены интегральные суммы $S_h^A$, составляемые по некоторому конечному множеству из множества $\mathbf{R}^n$, определяемому натуральным числом $A$ и числом $h>0$. Вычислено среднеквадратичное отклонение (по указанной мере) интегральной суммы от интеграла. Указан порядок (при $A\to+\infty$, $h\to 0$) этой величины (как функции параметров $A, h$ данного множества).

Интегральная сумма определяется набором узлов (в сумму входят значения функции в них) и весовых коэффициентов при этих значениях. В настоящей работе авторы не касаются вопроса о выборе оптимального (или близкого к оптимальному) набора узлов и коэффициентов; этот вопрос представляется весьма сложным.

**Гауссова мера в гильбертовом пространстве.** Пусть $H$ — вещественное счетномерное гильбертово пространство. Способы введения гауссовой меры в пространстве $H$ описаны во многих источниках. Выберем одно из достаточно простых изложений (см. [5, глава II, 6, глава IV]).

Пусть $S$ — конечномерное подпространство в пространствах $H$ и $P: H\to S$ — ортогональный проектор. Каждому борелевскому множеству $B\subset S$ поставим в соответствие множество $B' = P^{-1}(B)$; такие множества (их называют цилиндрическими) образуют алгебру $M$. Зададим меру $\sigma$ на алгебре $M$ формулой

[2] В работах [3] и [4] не упоминается работа А.В. Сульдина.

$$\sigma(B') = \int_B (2\pi)^{-n/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right) dx, \quad n = \dim S.$$

Назовем $\sigma$ свободной гауссовой мерой, она не является счетно-аддитивной (но, разумеется, конечно-аддитивна). Справедливо равенство

$$\int_H (h_1, u)(h_2, u)\,\sigma(du) = (h_1, h_2), \quad h_1, h_2 \in H. \tag{1}$$

Возьмем произвольное вещественное счетномерное гильбертово пространство $H_1$ и оператор Гильберта — Шмидта $T : H \to H_1$. Напомним, что оператор характеризуется условием $\sum_j |Te_j|^2$ для любого ортонормированного базиса $\{e_j\}$ в пространстве $H$; пространство операторов Гильберта — Шмидта $T : H \to H_1$ обозначим через $L(H, H_1)$. Мера $\sigma$ и отображение $T$ порождают индуцированную меру $\tau$ на $H_1$ по формуле $\tau(E) = \sigma(T^{-1}(E))$. Известно (см. [6, глава IV), что она продолжается (однозначно) до счетно-аддитивной меры на пространстве $H_1$. Это и есть общий способ введения гауссовой (счетно-аддитивной) меры в гильбертовом пространстве.

Далее понадобится следующая простая конструкция, связанная с гауссовскими мерами. Возьмем то же пространство $H$ и самосопряженный оператор $L : D \to H$ с плотной линейной областью определения $D$, удовлетворяющий условию $(Lx, x) \ge c(x, x)$ для некоторого $c > 0$. Имеем в области $D$ скалярное произведение $< x, y >= (Lx, y)$. Пополнив область $D$ по отношению к норме $< x, x >^{1/2}$, получаем гильбертово пространство $H^L = D(L^{1/2})$. Возьмем оператор Гильберта — Шмидта $T : H \to H^L$. Поскольку $H^L \subset H$, то отображение $T$ отождествляется с оператором $T : H \to H$, удовлетворяющим условию $L^{1/2}T \in L(H, H)$; полагаем этот оператор самосопряженным.

Введем гауссовы меры. Во-первых, в пространстве $H$ введем свободную меру $\sigma$, а во-вторых, в пространстве $H^L$ — две гауссовы меры (свободную меру $\tau_0$ и меру $\tau_1$, полученную из меры $\sigma$ индуцированием посредством отображения $T$ ).

Приведем один простой пример усреднения функционала по этим мерам.

Возьмем вектор $h \in D(L)$ и усредним функционал $y \to <y, f>^2$ по отношению к мерам $\tau_0, \tau_1$. Из определения свободной меры следует, что $\int <y, f>^2 \tau_0(dy) = \\ =<f, f> = (Lf, f) = |L^{1/2} f|^2$. Далее

$$\int_{H^L} <y, f>^2 \tau_1(dy) = \int_H <Tx, f>^2 \sigma(dx) = \int (LTx, f)^2 \sigma(dx) = \int_H (x, TLf)^2 \sigma(dx) = |TLf|^2 .$$

Здесь использован тот факт, что $\sigma$ — свободная мера. Примем $\|TL^{1/2}\| = c$. Тогда $|TLf| \le c\,|L^{1/2} f|$. Откуда получаем неравенство

$$\int_H <y, f>^2 \tau_1(dy) \le c^2 \int_H <y, f>^2 \tau_0(dy). \tag{2}$$

Неравенство (2) важно для дальнейшего изучения.

**Функциональный класс $H^L$, интеграл и интегральные суммы. Формулировка основного результата.** Используем обозначение $H = L_2(\mathbf{R}^n)$. Возьмем функцию $x \to P(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, и многочлен $x \to Q(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$. Подчиним их следующим ограничениям: $P(x) > c(1+|x|^s) > 0, s > 3n$, $|Q(\xi)| > c > 0$, функция $|\xi|/Q(\xi)|$ суммируема. Введем оператор $f \mapsto Lf = \bar{Q}(i\partial/\partial x)P(x)Q(i\partial/\partial x)f$, $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$; его замыкание также обозначим через $L$. Повторим приведенные выше построения: рассмотрим в пространстве $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ скалярное произведения $<f_1, f_2>=(Lf_1, f_2)$, соответствующее гильбертово пространство $H^L$, возьмем такой оператор $T: H \to H$, что $L^{1/2}T \in L(H, H)$ и, наконец, рассмотрим в пространстве $H$ свободную гауссову меру $\sigma$, а в пространстве $H^L$ — свободную гауссову меру $\tau_0$ и меру $\tau_1$, полученную из меры $\sigma$ индуцированием посредством отображения $T$. Отметим, что

$$<f, f>= \int_{\mathbf{R}^n} P(x)|Q(\partial/\partial x)f|^2\, dx.$$

***Цель работы*** — приближенное интегрирование функций, взятых из пространства $H^L$ и вероятностная оценка погрешности. Таким образом, речь идет о приближенном интегрировании функций, удовлетворяющих неравенству $(Lf, f) < \infty$.

Обратимся к интегралам и интегральным суммам. Введем функционал

$$Jf = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)dx, \quad f \in H^L. \tag{3}$$

Возьмем целое число $A > 0$, число $h > 0$ и обозначим через $D_h^A$ множество всех векторов $x = (x_1, \dots, x_n)$, $|x| \le hA$. Здесь и далее определяем длину вектора $x$ равенством $|x| = \max|x_i|$. Множество целочисленных векторов $a = (a_1, \dots, a_n)$, $|a| \le A$, обозначим через $I^A$. Определим интегральную сумму для функции $f$ по формуле

$$S_h^A f = h^n \sum_{a \in I_A} f(ha), \quad f \in H^L. \tag{4}$$

Это и есть формула для приближенного интегрирования функции $f$.

Переходим к вероятностной оценке погрешности, получаемой при замене интеграла $Jf$ интегральной суммой $S_h^A f$. Должны оценить (сверху) среднеквадратическую погрешность

$$\Delta_0^2 = \int_{H^L} |Jf - S_h^A f|^2\, \sigma_0(df),$$

рассчитанную по мере $\tau_0$. Откуда, используя неравенство (2), получаем и аналогичную погрешность $\Delta_1^2$, вычисленную по мере $\tau_1$.

Понадобятся преобразование Фурье

$$q(x)=(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{\mathbf{R}^n}\exp(i(x,y))(Q(y))^{-1}dy \tag{5}$$

и величина $q_1=\int\limits_{\mathbf{R}^n}|q(z)|dz.$

Основной результат заключается в следующем.

**Теорема.** *Функционалы $J$ и $S_h^A$, заданные равенствами (3) и (4), ограничены (по норме $f\mapsto\sqrt{<f,f>}$ ) и, следовательно, продолжаются (по непрерывности) на пространство $H^L$. Среднеквадратическая погрешность замены интеграла $Jf$ интегральной суммой $S_h^A f$ удовлетворяет неравенству $\Delta_0^2\le\gamma(h+A^{n-s})$. Число $\gamma$ не зависит от чисел $A,h$.*

В приведенных ниже оценках через $\gamma$, $\gamma_i$, … обозначены постоянные величины.

◀ Рассмотрим обратный оператор

$$f\mapsto L^{-1}f=(Q(i\partial/\partial x))^{-1}(P(x))^{-1}(\overline{Q}(i\partial/\partial x))^{-1},\ f\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n),$$

где $(Q(i\partial/\partial x))^{-1}$ — оператор, задаваемый сверткой $f\to f*q$. Следовательно, оператор $L^{-1}$ есть интегральный оператор, задаваемый ядром

$$K(x,y)=\int\limits_{\mathbf{R}^n}\overline{q}(z-x)q(z-y)/P(z)dz. \tag{6}$$

Отметим, что функция $K(x,y)$ называется фундаментальным решением оператора $L$. Понадобятся функции $x\mapsto R(x)$ и $x\mapsto M_a(x)$, где $x$, $a\in\mathbf{R}^n$, выражаемые формулами $R(x)=\int\limits_{\mathbf{R}^n}K(x,y))dy$, $M_a(x)=K(x,a)$. Таким образом,

$$R(x)=q_1\int\limits_{\mathbf{R}^n}\overline{q}(z-x)/P(z)dz,\quad M_a(x)=\int\limits_{\mathbf{R}^n}\overline{q}(z-x)q(z-a)/P(z)dz.$$

Их свойства заключены в следующей лемме.

**Лемма 1.** *Функции $R$, $M_a$ принадлежат пространству $H^L$. Справедливы равенства $Jf=<f,R>$, $f(a)=<f,M_a>$, $f\in H^L$.*

Отметим, что из леммы 1 вытекает первое утверждение теоремы (об ограниченности функционалов $J$ и $S_h^A$ ).

◀ Введем оператор $E:f\mapsto\sqrt{P(x)}Q(i\partial/\partial x)f$. Его замыкание также обозначим через $E$. Легко заметить, что $L=E*E$. Согласно положениям теории неограниченных операторов (например, см. [7, глава 4]), справедливо равенство $D((E*E)^{1/2})=D(E)$. Поэтому для доказательства первого утверждения леммы 1 достаточно доказать, что функции $R,M_a$ принадлежат множеству $D(E)$. Непосредственное вычисление действия оператора $E$ на эти функции приводит к функциям $q_1 \big/ \sqrt{P(x)}$, $q(x-a) \big/ \sqrt{P(x)}$; (здесь использовано то, что $(Q\,(i\partial / \partial x))\,q(x) = \delta(x)$). Указанные функции принадлежат пространству $H$, так как функция $1 / P(x)$ суммируема, а функция $q(x)$ ограничена. Этим доказано первое утверждение леммы 1. Второе утверждение доказывается непосредственным вычислением скалярных произведений. ►

Продолжим доказательство теоремы — оценим среднеквадратическую погрешность (появляющуюся от замены интеграла интегральной суммой). С учетом доказанной леммы 1 и равенства (1), имеем

$$\Delta_0^2 = \int (Jf - S_h^A f)^2 \tau_0(df) = \langle R - h^n \sum_{I^A} M_a,\ R - h^n \sum_{I^A} M_b \rangle =$$

$$= \int\limits_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n} K(x,y)dxdy - 2h^n \sum_{I^A} \int\limits_{\mathbf{R}^n} K(x,ha)dx + h^{2n} \sum_{I^A \times I^A} K(ha,hb). \qquad (7)$$

Осталось оценить правую часть равенства (7). В приведенных ниже формулах точка над функцией обозначает производную вдоль некоторого постоянного векторного поля с длиной вектора, равной единице.

**Лемма 2.** *Справедливо соотношение* $|\dot{K}(x,y)| \le \gamma_1 \,|1+|(x,y)|^{n-s}$ *с некоторой постоянной* $\gamma_1$. *Здесь* $|(x,y)| = \max\{|x|,|y|\}$. *(Напомним, что* $P(x) > c(1+|x|^s) > 0$, $s > 3n$*).*

◄ Примем (для определенности), что $|x| \ge |y|$. Применив упомянутую операцию (производную вдоль векторного поля) к функции $q(x)$, заданной формулой (5), получим, что функция $\dot{q}(x)$ быстро стремится к нулю при $|x| \to \infty$ (быстрее, чем $|x|^{-l}$ с любым $l > 0$ ). Применим эту операцию (для определенности по переменной $x$ ) к функции $K(x,y)$, заданной формулой (6). Полученный интеграл разобьем на слагаемые — по областям $|z| < |x|/2$ и $|z| > |x|/2$. В первом интеграле имеем $|z-x| > |x|/2$; тем самым, функция $\dot{q}(z-x)$ и интеграл быстро стремятся к нулю при $|x| \to \infty$. Во втором интеграле подинтегральная функция не превосходит (по модулю) величины $r / P(z), r = \max|q(z)|^2$, следовательно, и интеграл не превосходит по модулю величины $r \int\limits_{|z|>|x|/2} (1+|z|)^{-s} dz \le r_1 (1+|x|)^{n-s}$.

Откуда следует утверждение леммы 2. ►

**Лемма 3.** *Справедливы соотношения*

$$\left| h^n \sum_{I^A \times I^A} K(a,b) - \int\limits_{D_h^A \times D_h^A} K(x,y)dx\,dy \right| \le \gamma_2 h;$$

$$\left| h^n \sum_{a \in I^A} \int\limits_{\mathbf{R}^n} K(x,ha)\,dx - \int\limits_{\mathbf{R}^n \times D_h^A} K(x,y)dx\,dy \right| \le \gamma_2 h.$$

*Число* $\gamma_2$ *не зависит от чисел* $A, h$.

◀ Докажем первое неравенство. Обозначим через $Q(a,h)$ куб $\{x : a_i \le x_i \le a_i + h\}$. Из леммы 2 следует выполнение неравенства

$$|\dot{K}(x,y)| \le \gamma_3(1+(|a,b|)^{n-s},\ x \in Q(a,h),\ y \in Q(b,h).$$

Откуда $|K(x,y)-K(ah,bh)| \le \gamma_3 h(1+|(a,b)|)^{n-s}$ при $x \in Q(a,h),\ y \in Q(b,h)$. Проинтегрируем функцию $K(x,y)$ по кубам $x \in Q(a,h),\ y \in Q(b,h),\ a \in I^A,\ b \in I^A$, сложим результаты и учтем неравенство $\sum(1+|(a,b)|)^{n-s} < \infty$. (Поясним, как получено это неравенство. Обычное рассуждение показывает, что оно выводится из аналогичного неравенства для интеграла $\int\limits_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n} (1+|(x,y)|)^{n-s} dx\,dy$. Примем $(x,y) = w$. Тогда задача сводится к оценке интеграла $\int\limits_{\mathbf{R}^{2n}} (1+|w|)^{n-s} dw$. Введем полярные координаты и сведем интеграл к одномерному интегралу функции $(1+r)^{3n-s-1}$. Последний сходится, так как $s > 3n$). Этим доказано первое утверждение леммы 3; второе — доказывается аналогично. ▶

Докажем теорему.

Суммы, входящие в правую часть равенства (7), оцениваются посредством интегралов функции $|K(x,y)|$. Чтобы записать окончательную оценку, также рассмотрим (наряду с областью $D_h^A$) область $E_h^A = \{x, |x| > A\}$. Заменяя в равенстве (7) суммы интегралами указанного вида, выполняя простые преобразования, получаем интеграл функции $|K(x,y)|$ по области $E_h^A \times E_h^A$, а также слагаемое вида $\delta h$ с некоторой постоянной $\delta$.

Итак, $\Delta_0^2(A,h) \le \int\limits_{E_h^A \times E_h^A} |K(x,y)|\,dx\,dy + \delta h.$ Осталось оценить интеграл

$$\int\limits_{E_h^A \times E_h^A} |K(x,y)|\,dxdy = \int\limits_{G_h^A} |q(z-x)q(z-y)|/P(z)\,dx\,dy\,dz,$$

где область $G_h^A$ задана условиями $|x| > A,\ |y| > A,\ z \in \mathbf{R}^n$. С этой целью разобьем последний интеграл на два слагаемых $H_1$ и $H_2$ — интегралы по подобластям $|z| < A/2$ и $|z| > A/2$. Оценим интеграл $H_1$. Отметим, что в области интегрирования выполняются неравенства $|x-z| > |x|-|z| > A/2$, $|y-z| \ge$ $\ge |y|-|z| \ge A/2$; поэтому интеграл не уменьшится, если перейти к области интегрирования, задаваемой неравенствами $\{|x-z| \ge A/2, |y-z| \ge |z| < A/2\}$. Последний интеграл приводится заменой $x-z=t,\ y-z=s$ к интегралу функции $|q(t)q(s)|/P(z)$ по области $E = \{(z,t,s) : |t| > A/2, |s| > A/2, |z| < A/2\}$. Полученный интеграл распадается на произведение трех интегралов, причем интеграл функции $|q(t)|$ по области $|t| > A/2$ быстро стремится к нулю при $A \to +\infty$.

Оценим интеграл $H_2$. Поскольку $q$ — ограниченная функция, $H_2 \le$ $\le \gamma_4 \int\limits_{|z|>A/2} \left(|1+z|\right)^{-s} dz \le \gamma_5 A^{n-s}$. Откуда получаем утверждение теоремы. ►

**Заключение.** Рассмотрено приближенное интегрирование функций многих переменных, которые выбраны из функционального класса, наделенного гауссовой мерой. По этой мере определено усредненное значение квадратического отклонения интеграла от интегральной суммы. Изучена задача о том, с какой погрешностью интеграл такой функции по всему пространству приближается интегральной суммой по $n$-мерному кубу заданного размера по равномерной сетке с заданным шагом. Получена формула для оценки среднеквадратичной погрешности рассмотренного приближения. Отметим, в развитие изложенного выше, следующую тему (соединяющую предмет этой работы с методом Монте-Карло): приближенное интегрирование методом Монте-Карло случайных функций, взятых из описанных классов, и вероятностная оценка погрешности.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Ермаков С.М.* Методы Монте-Карло и смежные вопросы. М.: Наука, 1971. 472 с.

2. *Сульдин А.В.* Мера Винера и ее приложения к приближенным формулам. I // Известия высших учебных заведений. Математика. 1959. № 6. С. 145–158.

3. *Smale S.* On the efficiency of algoritms of analysis // Bulletin of the AMS. 1985. Vol. 13. No. 2. P. 87–121. URL: http://projecteuclid.org/euclid.bams/1183552689

4. *Larkin F.M.* Gaussian measures in Hilbert space and applications in numerical analysis // Rocky Mountain Journal Math. 1972. Vol. 2. No. 3. P. 372–421.
DOI: 10.1216/RMJ-1972-2-3-379 URL: https://projecteuclid.org/euclid.rmjm/1250131560

5. *Шилов Г.Е., Фан Дык Тинь.* Интеграл, мера, производная на линейных пространствах. М.: Наука, 1967. 220 с.

6. *Гельфанд И.М., Виленкин Н.Я.* Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. М.: Физматгиз, 1961. 472 с.

7. *Бирман М.Ш., Соломяк М.З.* Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. СПб.: Лань, 2010. 464 с.

**Исмагилов Раис Сальманович** — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5).

**Филиппова Лариса Евгеньевна** — доцент департамента прикладной математики Московского института электроники и математики им. А.Н. Тихонова, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (Российская Федерация, 101000, Москва, Мясницкая ул., д. 20).

**Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Исмагилов Р.С., Филиппова Л.Е. Вероятностные оценки погрешности формул приближенного интегрирования для функций многих переменных // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2017. № 2. С. 12–21. DOI: 10.18698/1812-3368-2017-2-12-21

# PROBABILISTIC ERROR ESTIMATION IN APPROXIMATE INTEGRATION FORMULAS FOR MULTIVARIABLE FUNCTIONS

**R.S. Ismagilov**[1] ismagil@bmstu.ru
**L.E. Filippova**[2]

[1] **Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation**
[2] **Higher School of Economics Tikhonov Moscow Institute of Electronics and Mathematics, Moscow, Russian Federation**

**Abstract**
The study examines the problem of approximate integration of multivariable functions. These functions are taken from the space with Gaussian measure. According to it, we calculated the average value of the integral standard deviation from the integral sum. The paper gives the vanishing order for the standard deviation depending on the parameters that define the integral sum. We obtained probabilistic estimates of approximate integration errors

**Keywords**
*Approximate integration, Gaussian measure, multivariable function, probabilistic estimates*

## REFERENCES

[1] Ermakov S.M. Metody Monte-Karlo i smezhnye voprosy [Monte-Carlo methods and neighbouring problems]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 472 p.

[2] Sul'din A.V. Wiener measure and its applications to approximation methods. I. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika*, 1959, no. 6, pp. 145–158 (in Russ.).

[3] Smale S. On the efficiency of algoritms of analysis. *Bulletin of the AMS*, 1985, vol. 13, no. 2, pp. 87–121. Available at: http://projecteuclid.org/euclid.bams/1183552689

[4] Larkin F.M. Gaussian measures in Hilbert space and applications in numerical analysis. *Rocky Mountain Journal Math*, 1972, vol. 2, no. 3, pp. 372–421. DOI: 10.1216/RMJ-1972-2-3-379 Available at: https://projecteuclid.org/euclid.rmjm/1250131560

[5] Shilov G.E., Fan Dyk Tin'. Integral, mera, proizvodnaya na lineynykh prostranstvakh [Integral, measure, derivative in linear space]. Moscow, Nauka Publ., 1967. 220 p.

[6] Gel'fand I.M., Vilenkin N.Ya. Nekotorye primeneniya garmonicheskogo analiza. Osnashchennye gil'bertovy prostanstva [Some applications of Fourier analysis. Rigged Hilbert spaces]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1961. 472 p.

[7] Birman M.Sh., Solomyak M.Z. Spektral'naya teoriya samosopryazhennykh operatorov v gil'bertovom prostranstve [Spectral theory of self-adjoint operators in Hilbert space]. Sankt-Petersburg, Lan' Publ., 2010. 464 p.

**Ismagilov R.S.** — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor of Higher Mathematics Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Filippova L.E.** — Assoc. Professor, School of Applied Mathematics, Higher School of Economics Tikhonov Moscow Institute of Electronics and Mathematics (Myasnitskaya ul. 20, Moscow, 101000 Russian Federation).

**Please cite this article in English as:**

Ismagilov R.S., Filippova L.E. Probabilistic Error Estimation in Approximate Integration Formulas for Multivariable Functions. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2017, no. 2, pp. 12–21.
DOI: 10.18698/1812-3368-2017-2-12-21