

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ОБРАЩЕННЫХ СТАБИЛИЗИРУЕМЫХ МАЯТНИКОВ

В.А. Грибков<sup>1</sup>

zenit-ab@mail.ru

А.О. Хохлов<sup>1,2</sup><sup>1</sup> МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация<sup>2</sup> ФГУП «Государственный космический научно-производственный центр им. М.В. Хруничева», Москва, Российская Федерация

---

### Аннотация

Определены области устойчивости одинарного, двойного и тройного физических маятников, стабилизируемых в обращенном вертикальном положении моногармоническими колебаниями оси подвеса по вертикали (линейная задача). Звенья маятников (абсолютно твердые тела) расположены последовательно и связаны идеальными (без трения) цилиндрическими шарнирами с параллельными осями. Расчетные результаты для граничных линий области устойчивости найдены с использованием приема решения задачи устойчивости, предложенного авторами. Экспериментальные результаты получены на специально для этого созданных оригинальных средствах испытаний, обладающих необходимыми для решения двух поставленных экспериментальных задач характеристиками (задач частотных испытаний и определения границ области устойчивости). Экспериментальные границы области устойчивости определены для широкого диапазона изменения параметров возбуждения (амплитудного и частотного). Экспериментально подтвержден предсказываемый теорией факт динамической неустойчивости обращенных маятниковых систем при переходе верхней границы области устойчивости, получены экспериментальные результаты в районе соединения верхней и нижней граничных линий области устойчивости. Результатам, полученным в настоящей работе, предшествует тщательный анализ материалов эксперимента, проведенного Д. Ачесоном и Т. Муллином по одинарному, двойному и тройному маятникам

### Ключевые слова

*Инвертированный физический маятник, N-звенный маятник, параметрическое возбуждение, динамическая устойчивость, эксперимент*

Поступила в редакцию 09.06.2016  
© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017

---

**Объект исследования, идея работы.** Маятниковые модели оказали существенное влияние на развитие теории колебаний, динамики движения, теории устойчивости. И в настоящее время маятниковые модели продолжают широко использовать при решении задач теории динамических систем, исследовании устойчивости движения летательных аппаратов на жидком топливе, анализе устойчивости космических тросовых систем и в других областях. Интерес к исследованиям маятни-

ковых систем, судя по числу публикаций, растет. Появляются новые теоретические результаты и новые области приложения результатов анализа маятниковых систем [1–14].

Одно из современных направлений исследований связано с проблемами стабилизации статически неустойчивых обращенных маятниковых объектов, состоящих из нескольких звеньев. Теоретических работ по этой теме много, в то время как экспериментальных работ по обращенным маятникам существенно меньше. Экспериментальные исследования обращенных маятников, содержащих несколько звеньев и имеющих  $N$  степеней свободы ( $N$ -маятников), выполнены Г. Калмусом (H. Kalmus, 1970), Т.Г. Стрижак (1982, 1984); В.Н. Челомеем (1983), Д. Ачесоном и Т. Муллином (D. Acheson, T. Mullin, 1993), В.А. Грибковым и А.О. Хохловым (2015).

В отмеченных публикациях экспериментальные результаты имеют, в основном, демонстрационный (качественный, но не количественный) характер. Большинство выполненных экспериментов показывают принципиальную возможность стабилизации статически (апериодически) неустойчивой маятниковой системы за счет вибрационного воздействия на нее.

Одной из немногих работ с количественными результатами по обращенным  $N$ -маятникам (и одной из наиболее известных экспериментальных работ) является статья [15], которую отличает не только количественный характер результатов, но и экспериментальное определение граничной линии области устойчивости в довольно большом диапазоне изменения параметров возбуждения (частоты и амплитуды). Рассмотрены не одна система, а три маятника разной размерности с одинаковыми звеньями и числом степеней свободы от одной до трех. Такую работу до Д. Ачесона и Т. Муллина не выполнял никто. Судя по известным авторам настоящей работы публикациям, статья [15] является одной из наиболее заметных экспериментальных работ по обращенным маятниковым системам. Поэтому в настоящей работе значительное внимание уделено анализу экспериментальных результатов, полученных Д. Ачесоном и Т. Муллином [15]. По результатам анализа сделан вывод о необходимости продолжения исследований обращенных маятниковых систем. В частности, получение экспериментальных результатов, подтверждающих возможность использования линейных моделей для определения границ области устойчивости. Именно исследование Д. Ачесона и Т. Муллина позволило авторам уточнить и конкретизировать цель и задачи исследования.

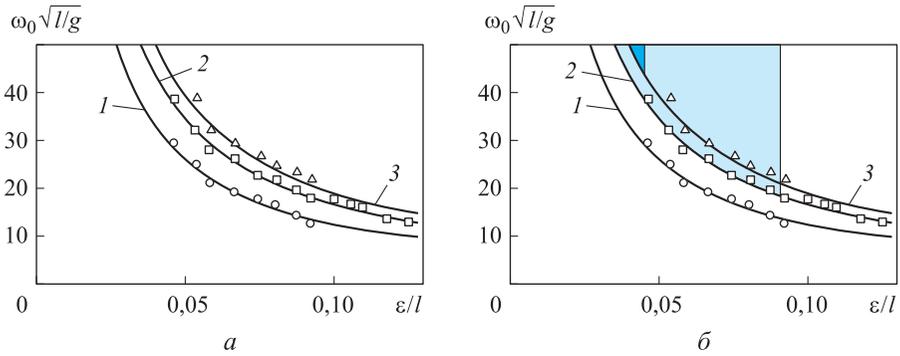
В настоящей работе рассмотрены три маятника с различным числом звеньев (одно, два, три), получены экспериментальные и расчетные результаты для областей устойчивости маятников. Рассмотрена более широкая (чем в статье [15]) область экспериментальных параметров возбуждения вплоть до значений параметров, приводящих к режиму динамической неустойчивости. Получены экспериментальные результаты для критических значений параметров (параметров возбуждения на границах области устойчивости), обеспечивающих стабилизацию маятников.

Назовем прямым маятником маятник с осью подвеса, находящейся выше центра тяжести маятника, обращенным (инвертированным, перевернутым) — маятник с осью подвеса ниже центра тяжести маятника. Будем различать материальную модель (объект испытаний, экспериментальную модель) и расчетную схему (математическую модель) объекта испытаний.

Область устойчивости инвертированного маятника представим на плоскости размерных или безразмерных (типа диаграммы Айнса — Стретта) параметров, ограниченную верхней и нижней границами (в осях частотный параметр–амплитудный параметр). При анализе материалов работы [15] используем принятые в ней оси амплитудный параметр–частотный параметр с областью, ограниченной правой и левой граничными линиями. Назовем особой точкой, или точкой бифуркации, точку расщепления граничных линий диаграммы; критическими параметрами — параметры возбуждения, лежащие на одной из граничных линий области устойчивости. Минимальные критические параметры и максимальные критические параметры соответствуют двум границам области устойчивости, при переходе которых из области устойчивости наблюдается статическая или динамическая потеря устойчивости. Здесь и далее используем термины минимальные критические параметры и максимальные критические параметры для верхней и нижней границ области устойчивости или правой и левой границ при анализе результатов работы [15].

**Экспериментальные и расчетные результаты Д. Ачесона и Т. Мулина по одинарному, двойному и тройному маятникам.** Цель исследования, заявленная в работе [15], заключается в получении экспериментальных количественных результатов по критическим параметрам (амплитудному и частотному), определяющим границы области устойчивости трех обращенных маятников с разным числом звеньев (одно, два, три). Определение указанных параметров необходимо для экспериментального подтверждения справедливости маятниковой теоремы, сформулированной Д. Ачесоном [16].

Маятниковая теорема определяет границы области устойчивости вертикального положения линейного обращенного маятника с  $N$  звеньями (степенями свободы), находящегося в поле сил тяжести с ускорением свободного падения  $g$  под действием гармонического параметрического возбуждения оси подвеса маятника  $\varepsilon \cos \omega_0 t$  с амплитудой виброперемещения  $\varepsilon$  и частотой  $\omega_0$ . Используем обозначения, принятые в статье [15]. Расчетные и экспериментальные результаты, взятые из указанной работы, приведены на рис. 1, а. Область устойчивости обращенного маятника ограничена левой (криволинейной) и правой (прямолинейной) границами. Криволинейная правая граница области устойчивости аппроксимирована по маятниковой теореме [16] прямой линией. Вопрос о погрешности указанной аппроксимации в работах [15, 16] остался открытым. Отмечено лишь, что теорема дает лучшие результаты для  $N$ -маятников с заметно различающимися низшими и высшими собственными частотами.



**Рис. 1.** Диаграмма с расчетными (—) и экспериментальными (o, □, Δ) результатами, взятыми из работы [15] (а) для одинарного (1), двойного (2) и тройного (3) маятников, диаграмма, дополненная правыми границами области устойчивости для двойного и тройного маятников (вертикальные прямые линии) (б)

Все расчетные результаты получены в работе [15] по маятниковой теореме [16] через собственные частоты (высшую и низшую) прямого маятника с покоящейся осью. Для левой границы области устойчивости  $N$ -маятника ( $N = 1, 2, 3$ ), результаты определены по низшей (минимальной) собственной частоте прямого маятника. Низшие собственные частоты установлены экспериментально через частоту главного параметрического резонанса прямого маятника (по частоте возбуждения, равной удвоенной собственной частоте колебаний). Как определены высшие частоты не указано. Очевидно и высшие частоты определены экспериментально. Они не представлены, но их можно пересчитать через приведенные значения амплитудного параметра для правой границы области устойчивости. Расчетные собственные частоты в работе [15] отсутствуют.

Диаграмма (см. рис. 1, а) дополнена на рис. 1, б прямыми вертикальными линиями, задающими правую границу областей устойчивости для двойного и тройного маятников, полученными в соответствии с маятниковой теоремой [16]. Данные для построения правых граничных линий взяты из работы [15]. Для двойного маятника приведено значение амплитудного параметра 0,044, для тройного маятника — 0,091. По неуказанным авторами причинам правые граничные линии не показаны на диаграмме, приведенной в статье [15].

Области устойчивости выделены голубым цветом (см. рис. 1, б). Малая область (более темная) соответствует тройному маятнику, большая область (более светлая) — двойному маятнику. Данные для граничной линии одинарного маятника отсутствуют, они не входят в область применения маятниковой теоремы (маятниковая теорема применима только к маятникам из нескольких звеньев).

Наиболее важным итогом исследования Д. Ачесона и Т. Муллина, на взгляд авторов настоящей работы, является убедительное подтверждение результатами проведенных физических экспериментов [15] возможности стабилизации инвертированных вертикальных положений одинарного, двойного и тройного маятников параметрическим высокочастотным возбуждением в достаточно

широком диапазоне изменения параметров возбуждения системы. Получены экспериментальные результаты для одной из двух граничных линий области устойчивости одинарного, двойного и тройного маятников.

В то же время экспериментальные и расчетные левые границы области устойчивости радикально отличаются (как для двойного, так и для тройного маятника). Проверить расчетные результаты Д. Ачесона и Т. Муллина нельзя, так как в статье [15] приведены не все необходимые для решения задачи устойчивости параметры. Низшие и высшие собственные частоты, необходимые по маятниковой теореме [16] для нахождения левой и правой границ области устойчивости, определены только экспериментально. Не удалось получить в эксперименте верхнюю границу области устойчивости и доказать справедливость главного предположения маятниковой теоремы о возможности аппроксимации правой границы области устойчивости прямой линией, а также наблюдать потерю устойчивости при выходе за правую границу области в область неустойчивости. Из результатов Д. Ачесона и Т. Муллина следует, что маятниковая теорема не работает (область устойчивости, полученная по теореме, не совпадает с экспериментальными результатами). Таким образом, заявленная в статье [15] цель исследования (проверка работоспособности теоремы) привела к негативному результату.

Итак, несмотря на очевидный прогресс в исследовании маятниковых систем экспериментальными методами остается много вопросов и по экспериментальным количественным результатам и по поведению системы в районе верхней границы области устойчивости и по маятниковой теореме.

Остался открытым вопрос об адекватности линейных моделей при решении задачи устойчивости обращенных маятниковых систем.

**Цель и задачи исследования.** Цель работы — экспериментальная проверка адекватности используемых в настоящее время линейных математических моделей задачи устойчивости обращенных стабилизируемых маятниковых систем.

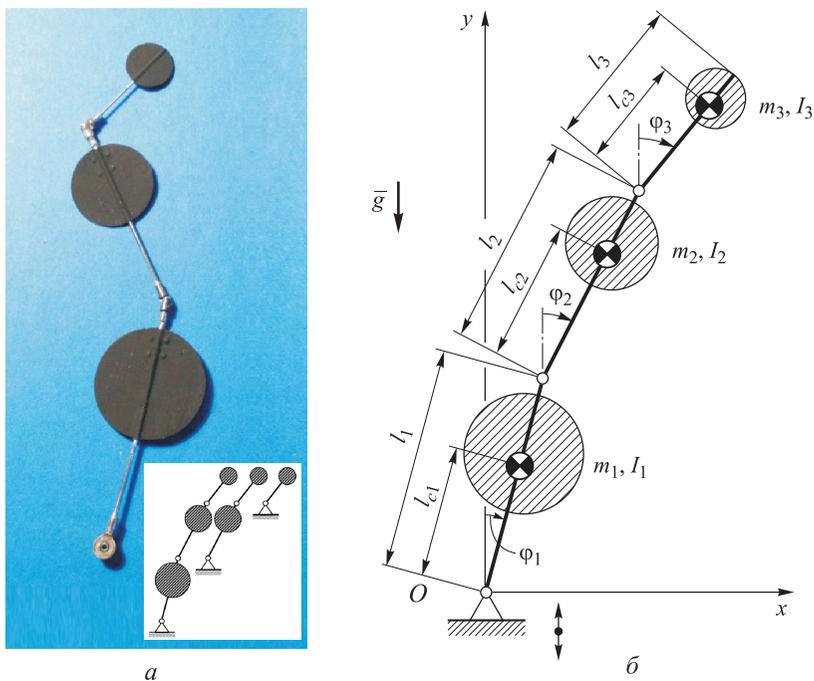
Поставленная цель достигается решением следующих задач:

- получение расчетных и экспериментальных результатов для границ областей устойчивости трех обращенных физических маятников с гетерогенными звеньями (одинарного, двойного, тройного);
- определение областей устойчивости маятниковых систем в широком диапазоне параметров возбуждения от точки расщепления граничных линий области устойчивости до значений безразмерных параметров возбуждения, существенно превосходящих диапазон параметров, перекрытый в [15];
- достижение в эксперименте верхней границы области устойчивости и получение в эксперименте режима динамической потери устойчивости при переходе из области устойчивости в область неустойчивости.

Необходимо также проверить работоспособность маятниковой теоремы сравнением экспериментальных результатов для  $N$ -маятников с расчетными результатами, полученными по маятниковой теореме, так как в статье [15] получить совпадения расчетной и экспериментальной областей устойчивости не удалось.

**Допущения, математические модели маятников, метод решения задачи устойчивости.** Основная (базовая) материальная модель, использованная в настоящей работе, — модель тройного физического маятника, состоящего из трех последовательно расположенных и связанных идеальными цилиндрическими шарнирами звеньев (рис. 2, а). Конструкция и параметры тройного маятника описаны в работе [17].

Две другие модели (двойной и одинарный маятники) образованы из базовой материальной модели выделением двух или одного звена из тройного маятника. Двойной маятник образован средним и концевым звеньями, одинарный — концевым звеном (см. рис. 2, а). Корневой шарнирный узел базовой материальной модели (соединяемый со штоком возбудителя колебаний) содержит миниатюрный шариковый подшипник, промежуточные шарнирные узлы имеют подшипники скольжения. Возбуждение системы задано перемещением оси подвеса маятника в направлении вертикали (параметрическим возбуждением)  $A \cos(pt)$  с амплитудой  $A$  и частотой  $p$ .



**Рис. 2.** Тройной маятник (а), его расчетная схема, обозначения и координаты (б)

Расчетная схема тройного маятника, главные обозначения и прямоугольная система координат  $oxy$  приведены на рис. 2, б. Приняты следующие обозначения параметров:  $m_i$  — масса отдельного  $i$ -го звена;  $l_i$  — длины звеньев маятника (расстояния между осями шарниров для корневого и среднего звеньев, для концевого — длина от оси до конца звена);  $l_{ci}$  — расстояния от оси корневого шарнира  $i$ -го звена до центра масс звена;  $I_i$  — центральные моменты инерции

каждого звена. Такие же обозначения использованы для двойного и одинарного маятников с нумерацией звеньев ( $i = \overline{1, N}$ ) от оси подвеса маятника (корневого шарнирного узла).

Уравнения движения маятников получены с учетом допущений, аналогичных допущениям, которые введены в работе [17] через уравнения Лагранжа второго рода. В качестве основных обобщенных координат использованы угловые отклонения  $\varphi_i$  звеньев маятников от вертикали (ось  $oy$  направлена вертикально вверх навстречу ускорению свободного падения  $g$ ).

Общая форма записи векторно-матричного уравнения движения маятников с числом  $N$  степеней свободы ( $N = 1, 2, 3$ ):

$$\mathbf{M} \frac{d^2 \boldsymbol{\varphi}}{dt^2} + \mathbf{C}(t) \boldsymbol{\varphi} = 0, \tag{1}$$

где  $\mathbf{M}$  — положительно определенная симметрическая инерционная матрица;  $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbb{R}^N$ ,  $\boldsymbol{\varphi} = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_i, \dots, \varphi_N\}$  — вектор обобщенных координат (угловых отклонений звеньев маятника от вертикали);  $\mathbf{C}(t)$  — диагональная  $T$ -периодическая ( $T = 2\pi/p$ ) матрица квазижесткости.

Ненулевые элементы матрицы  $\mathbf{M}$ : при  $i = j$   $m_{ij} = I_i + l_{ci}^2 m_i + l_i^2 \sum_{m=i+1}^N m_m$ ; при  $i < j$   $m_{ij} = l_i \left( l_{cj} m_j + l_j \sum_{m=j+1}^N m_m \right)$ ; при  $i > j$   $m_{ij} = m_{ji}$ ; ненулевые элементы матрицы  $\mathbf{C}(t)$  при  $i = j$   $c_{ij}(t) = (Ap^2 \cos(pt) - g) \left( l_{ci} m_i + l_i^2 \sum_{m=i+1}^N m_m \right)$ .

В матрице квазижесткости учтено действие кинематического возбуждения оси подвеса корневого звена  $A \cos(pt)$ . Для одинарного обращенного маятника ( $N = 1$ ) получим

$$\mathbf{M} = I_1 + l_{c1}^2 m_1; \quad \mathbf{C} = (Ap^2 \cos(pt) - g)(l_{c1} m_1).$$

Для двойного маятника ( $N = 2$ ) матрицы  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{C}$  принимают вид

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} I_1 + l_{c1}^2 m_1 + l_1^2 m_2 & l_1 l_{c2} m_2 \\ l_1 l_{c2} m_2 & I_2 + l_{c2}^2 m_2 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} (Ap^2 \cos(pt) - g)(l_{c1} m_1 + l_1 m_2) & 0 \\ 0 & (Ap^2 \cos(pt) - g) l_{c2} m_2 \end{pmatrix}.$$

Для тройного маятника ( $N = 3$ )

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} I_1 + l_{c1}^2 m_1 + l_1^2 (m_2 + m_3) & l_1 (l_{c2} m_2 + l_2 m_3) & l_1 l_{c3} m_3 \\ l_1 (l_{c2} m_2 + l_2 m_3) & I_2 + l_{c2}^2 m_2 + l_2^2 m_3 & l_2 l_{c3} m_3 \\ l_1 l_{c3} m_3 & l_2 l_{c3} m_3 & I_3 + l_{c3}^2 m_3 \end{pmatrix};$$

$$C(t) = (Ap^2 \cos(pt) - g) \begin{pmatrix} l_{c1}m_1 + l_1(m_2 + m_3) & 0 & 0 \\ 0 & l_{c2}m_2 + l_2m_3 & 0 \\ 0 & 0 & l_{c3}m_3 \end{pmatrix}.$$

Используя инерционную матрицу и матрицу квазижесткости легко получить уравнения движения физических и математических маятников, прямых или обращенных, произвольной размерности как с гомогенными, так и с гетерогенными звеньями.

При переходе к нормальным координатам через преобразование подобия получим несвязанные уравнения движения в нормальных координатах. Необходимые для решения задачи устойчивости обращенного положения маятников уравнения в возмущениях (вариациях) легко получаются из (1). Решение задачи устойчивости невозмущенного вертикального положения получено с применением приема, описанного в [18].

В векторно-матричном уравнении (1) использованы размерные переменные обобщенные координаты — отклонения звеньев маятников от вертикали. Переход к безразмерным переменным (формату канонических переменных по Н.В. Мак-Лахлану) выполнен по выражениям, приведенным в [17, 18].

**Параметры и собственные частотные характеристики одинарного, двойного и тройного маятников (проверка адекватности используемой динамической расчетной модели).** Динамические характеристики (собственные частоты и собственные формы колебаний) имеют большое значение при решении задач устойчивости маятниковых систем. Через собственные частоты прямых маятников в работах [15, 16, 18] определены границы области устойчивости, они использованы в безразмерной (относительной) форме уравнений движения и при построении диаграммы Айнса — Стретта или модифицированной диаграммы Айнса — Стретта [18].

Проверка расчетных собственных частот сопоставлением с экспериментом позволяет оценить достоверность используемых далее (при решении задачи устойчивости) геометрических и инерционных параметров маятников.

Спектральная задача расчета динамических характеристик (собственных частот и форм) решена с применением вычислительной программы *Wolfram Mathematica*, а также (для проверки) программного комплекса *MSCAdams*. Необходимые для расчетов динамических характеристик инерционные параметры тройного маятника определены в работе [16] с использованием программы *Solid Works*. Геометрические и инерционные параметры приведены в табл. 1.

Расчетные собственные частоты тройного маятника и экспериментальные результаты представлены в табл. 2. Собственные частоты получены по параметрам, приведенным в табл. 1, с использованием вычислительной программы *Wolfram Mathematica* (числитель) и программного комплекса *MSCAdams* (знаменатель).

Таблица 1

**Параметры звеньев тройного маятника**

Номер звена	$m_i$ , г	$l_i$ , мм	$l_{ci}$ , мм	$I_i$ , г·мм <sup>2</sup>
1	1,547	54,0	29,542	443,934
2	1,032	45,0	26,854	167,839
3	0,424	26,2	12,838	32,871

Таблица 2

**Расчетные и экспериментальные собственные частоты  
тройного маятника**

Номер тона	Собственная частота, Гц	Экспериментальное значение, Гц	Погрешность, %
1	1,738/1,729	1,74	0,115
2	3,924/3,789	3,87	1,395
3	5,987/5,996	6,00	0,217

Результаты расчетов, определенные в *Wolfram Mathematica* и *MSCAdams*, очень близки. Некоторое расхождение в результатах можно объяснить различающимися исходными данными — инерционными параметрами системы, полученными в *Solid Works* и *MSCAdams* [17]. Незначительно отличаются от расчетных результатов экспериментальные собственные частоты (погрешность определена для расчетных результатов в *Wolfram Mathematica* по отношению к экспериментальным частотам).

Экспериментальные собственные частоты в настоящей работе определены резонансным методом по пикам амплитудно-частотной характеристики, которые установлены визуально по максимальному горизонтальному отклонению концевого звена прямого маятника.

Параллельно использованы три установки: 1) установка, собранная из аналоговых средств испытаний с вибровозбудителем *ESE-201* (рис. 3, а); 2) установка с низкочастотным оригинальным вибратором, изготовленным специально для решения экспериментальных задач данной работы с управлением через компьютер; 3) автоматизированная система вибрационных испытаний *Data Physics SignalStar Vector II* с вибратором *V-55* (рис. 3, б). Применение трех установок испытаний позволило повысить достоверность и качество получаемых экспериментальных результатов.

Примем в качестве расчетных результатов для тройного маятника собственные частоты, рассчитанные в *Wolfram Mathematica*, по параметрам, найденным в *Solid Works* (см. табл. 2).

Собственные частоты двойного и одинарного маятников получены на экспериментальных моделях, образованных из тройного маятника путем закрепления корневого звена (для двойного маятника) или корневого и среднего звеньев (для одинарного маятника).



а

б

**Рис. 3.** Установка для определения собственных частот колебаний маятниковых систем на основе вибровозбудителя ESE-201 (а) и система вибрационных испытаний Data Physics SignalStar Vector II с вибратором V-55 (б)

Параметры двойного маятника, принятые при расчете собственных частот, для сравнения с результатами частотных испытаний совпадают с представленными в табл. 1 параметрами тройного маятника. Закреплялось первое звено, два звена (среднее и концевое) оставались подвижными (см. рис. 2, а). При испытаниях одинарного маятника закреплялись два звена (корневое и среднее), подвижным оставалось концевое звено.

Расчетные и экспериментальные собственные частоты двойного и одинарного маятников представлены в табл. 3.

Таблица 3

**Собственные частоты двойного и одинарного маятников**

Номер тона	Расчетное значение, Гц	Экспериментальное значение, Гц	Погрешность, %
<i>Двойной маятник</i>			
1	2,314	2,27	1,94
2	4,908	4,96	1,05
<i>Одинарный маятник</i>			
1	3,628	3,38	7,34

Частотные испытания позволили проверить правильность определения с помощью Solid Works геометрических и инерционных параметров одинарного, двойного и тройного маятников (адекватность параметров моделей) и перейти к решению задачи устойчивости.

**Области устойчивости трех маятников, полученные с использованием модифицированной диаграммы Айнса — Стретта и маятниковой теоремы.** Задача устойчивости для тройного маятника решена с параметрами, приведенными в табл. 1. Для одинарного и двойного маятников использованы параметры, несколько отличающиеся от параметров, представленных в табл. 1. При оценке возможности использования Solid Works для определения инерционных

параметров собственных частот двойного маятника или одинарного, из тройного маятника выделено два или одно звено закреплением корневого звена (для двойного) или корневого и среднего звеньев (для одинарного маятника).

При экспериментальном определении области устойчивости двойной маятник (состоящий из среднего и концевых звеньев) отсоединяли (отпаивали) от тройного и припаивали к корневому шарниру, который закрепляли на штоке вибратора. Одинарный маятник (из концевых звеньев) также отделяли (отпаивали от промежуточного шарнирного узла и припаивали к корневому шарнирному узлу). Таким образом, собственные частоты двойного и одинарного маятников для проверки справедливости принятых параметров были определены в эксперименте для одной модели с промежуточным шарниром в корне, а область устойчивости получена для другой модели с концевым шарниром в корне. Расхождение значений собственных частот за счет изменения параметров мало (будет показано далее), но и оно было учтено в расчетах.

Параметры двойного маятника с корневым шарнирным узлом и шариковым подшипником качения (см. рис. 1), полученные в *Solid Works*, приведены в табл. 4. Параметры одинарного концевых маятника, образованного концевым (третьим) звеном тройного маятника (см. рис. 1), с корневым шарнирным узлом, содержащим подшипник качения, также приведены в табл. 4.

Таблица 4

#### Параметры звеньев двойного и одинарного маятников и их собственные частоты

Номер звена	$m_i$ , г	$l_i$ , мм	$l_{ei}$ , мм	$I_i$ , г·мм <sup>2</sup>
<i>Двойной маятник</i>				
2	1,198	45,0	23,309	263,265
3	0,424	26,2	12,838	32,871
<i>Одинарный маятник</i>				
3	0,595	26,2	8,796	58,604
<i>Примечание.</i> Собственные частоты двойного маятника 2,317 Гц и 4,908 Гц. Собственная частота одинарного маятника 3,525 Гц.				

По этим параметрам определены значения собственных частот, использованные при решении задачи устойчивости.

В настоящей работе задача устойчивости для трех маятников решена с помощью приема, предложенного в [18], который основан на использовании диаграммы типа Айнса — Стретта, расширении области использования диаграммы Айнса — Стретта на обращенные маятниковые системы произвольной размерности.

Для построения нижней границы области устойчивости одинарного обращенного маятника (собственных значений функций Матё  $a_0(q)$ ) в работе [18] предложено три способа: 1) использование таблиц собственных значений из

справочной литературы; 2) применение разложения собственных значений функций Матъё целого порядка в степенные ряды; 3) вычисление собственных значений с помощью систем компьютерной математики (например, *Wolfram Mathematica*).

Используем разложение собственных значений функций Матъё в степенные ряды для построения правой границы области простого резонанса нулевого порядка  $a_0(ce_0)$  (нижняя граница области устойчивости обращенного маятника):

$$a_0(q) = a_0(ce_0) = -\frac{1}{2}q^2 + \frac{7}{128}q^4 - \frac{29}{2304}q^6 + \frac{68687}{18874368}q^8 + O(q^{10}).$$

Для левой границы простого резонанса первого порядка  $b_1(se_1)$  (верхняя граница области устойчивости обращенного маятника) имеем

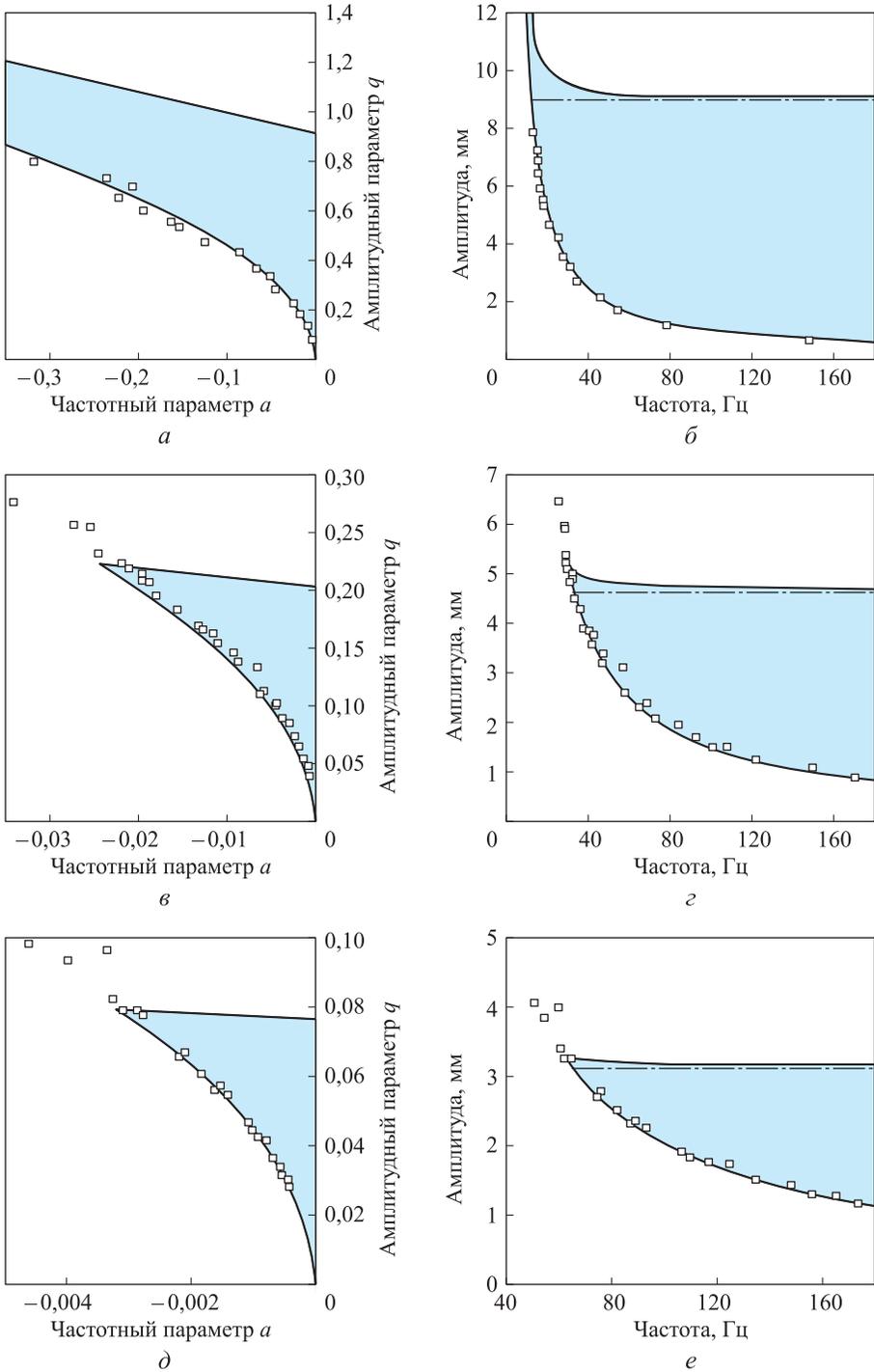
$$b_1(q) = b_1(se_1) = 1 - q - \frac{1}{8}q^2 + \frac{1}{64}q^3 - \frac{1}{1536}q^4 - \frac{11}{36864}q^5 + \\ + \frac{49}{589824}q^6 - \frac{55}{9437184}q^7 - \frac{265}{113246208}q^8 + O(q^9).$$

Экспериментальные границы областей устойчивости трех маятников определены на оригинальной вибрационной установке с высокочастотным возбудителем колебаний. Краткое описание средств испытаний и методики проведения экспериментов по определению области устойчивости тройного маятника приведено в работе [17]. Здесь использованы те же средства и аналогичная методика испытаний при экспериментах с тремя маятниками.

Результаты расчетного и экспериментального определения областей устойчивости одинарного, двойного и тройного маятников представлены на рис. 4. Расчетные результаты для граничных линий по методике, описанной в работе [18], показаны сплошными линиями, по маятниковой теореме Д. Ачесона [16] — штрихпунктирными линиями. Области устойчивости, найденные по методике, приведенной в работе [18], выделены голубым цветом.

Результаты расчетов нижней границы областей устойчивости трех рассмотренных маятников по методике [18] практически совпали (линии наложились друг на друга) с результатами, полученными по маятниковой теореме [16]. Для верхней границы результаты, полученные по маятниковой теореме, заметно отличаются.

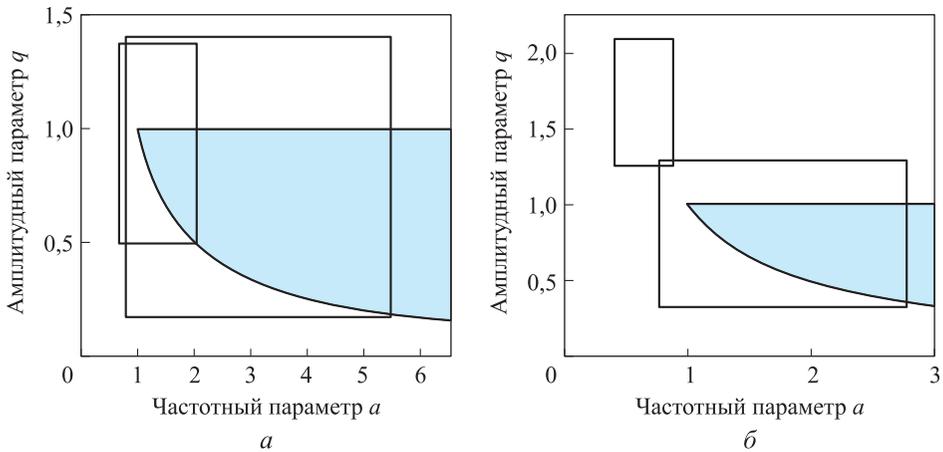
Диапазон параметров возбуждения представленный в настоящей работе по сравнению с результатами для тройного маятника, приведенными в [17], расширен с выходом за общую точку верхней и нижней границ. Получить экспериментальные результаты для верхней границы не удалось вследствие почти мгновенного нарастания амплитуды колебаний, вплоть до разрушения модели. Эффект динамической неустойчивости при прохождении верхней границы области устойчивости наблюдался в эксперименте, вероятно, впервые. Поскольку для двойного и особенно для тройного маятника расчетная верхняя граница



**Рис. 4.** Области устойчивости одинарного (*a*, *б*), двойного (*в*, *г*) и тройного (*д*, *е*) маятников на плоскости безразмерных (*a*, *в*, *д*) и размерных (*б*, *г*, *е*) параметров

(рис. 4, з, е) близка к прямой линии, можно утверждать, что о положении экспериментальной верхней границы области устойчивости можно судить по максимальному экспериментальному значению амплитуды возбуждения. Напомним, что по маятниковой теореме верхняя граница — прямая. Расхождение расчетных и экспериментальных результатов наиболее заметно в окрестности особой точки. Вероятно, сказывается влияние трения в системе (трение приводит к расширению области устойчивости в области верхней границы).

Рассмотренные диапазоны изменения параметров возбуждения имеют гораздо более широкие области, чем области, приведенные в работе [15]. Перекрытые в экспериментах области параметров возбуждения (частотного и амплитудного) для двойного и тройного маятников показаны на рис. 5. Диаграммы построены на плоскости безразмерных амплитудного и частотного параметров возбуждения. Нормировка безразмерных частотного и амплитудного параметров выполнена по их значениям в особой точке (точке расщепления граничных линий).



**Рис. 5.** Сравнение диапазонов изменения параметров возбуждения, полученных в работе [15] (1) и в настоящей работе (2) для двойного (а) и тройного (б) маятников

**Выводы.** В серии экспериментов доказана адекватность линейных математических моделей, используемых при решении задач устойчивости обращенных стабилизируемых маятниковых систем. Подтверждена работоспособность маятниковой теоремы.

Теоретически и экспериментально определены границы области устойчивости одинарного, двойного, тройного физических стабилизируемых обращенных маятников. Получено хорошее согласование расчетных и экспериментальных результатов в широком диапазоне изменения параметров возбуждения. Граничные значения параметров возбуждения определены в эксперименте и в окрестности особой точки (точки расщепления, точки бифуркации).

Получено экспериментальное подтверждение режима динамической неустойчивости обращенного  $N$ -маятника при переходе через верхнюю границу

области устойчивости, определенную с помощью линейной теории. Некоторое расхождение теоретических и экспериментальных результатов можно объяснить погрешностью определения высших собственных частот, влиянием трения и проявлением упругости звеньев маятника.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Устойчивость равновесия маятника переменной длины // Прикладная математика и механика. 2009. Т. 73. № 6. С. 893–901.
2. Arkhipova I.M., Luongo A., Seyranian A.P. Vibrational stabilization of the upright statically unstable position of a double pendulum // Journal of Sound and Vibration. 2012. Vol. 331. No. 2. P. 457–469. DOI: 10.1016/j.jsv.2011.09.007 URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X11007425>
3. Асланов В.С., Безгласный С.П. Устойчивость и неустойчивость управляемых движений двухмассового маятника переменной длины // Известия РАН. Механика твердого тела. 2012. № 3. С. 32–46.
4. Буров А.А., Косенко И.И. Маятниковые движения протяженного лунного лифта // Известия РАН. Механика твердого тела. 2014. № 5. С. 35–48.
5. Буланчук П.О., Петров А.Г. Вибрационная энергия и управление маятниковыми системами // Прикладная математика и механика. 2012. Т. 76. № 4. С. 550–562.
6. Буланчук П.О., Петров А.Г. Параметры вибрации точки подвеса для заданного положения равновесия двойного математического маятника // Известия РАН. Механика твердого тела. 2013. № 4. С. 380–387.
7. Зевин А.А., Филоненко Л.А. Качественное исследование колебаний маятника с периодически меняющейся длиной и математическая модель качелей // Прикладная математика и механика. 2007. Т. 71. № 6. С. 989–1003.
8. Мартыненко Ю.Г., Формальский А.М. Управляемый маятник на подвижном основании // Известия РАН. Механика твердого тела. 2013. № 1. С. 9–23.
9. Майлыбаев А.А., Сейранян А.П. Многопараметрические задачи устойчивости. Теория и приложения в механике. М.: Физматлит, 2009. 400 с.
10. Петров А.Г. О вибрационной энергии консервативной механической системы // Доклады РАН. 2010. Т. 431. № 6. С. 762–765.
11. Сейранян А.А., Сейранян А.П. Об устойчивости перевернутого маятника с вибрирующей точкой подвеса // Прикладная математика и механика. 2006. Т. 70. № 5. С. 835–843.
12. Холостова О.В. Об устойчивости относительных равновесий двойного маятника // Известия РАН. Механика твердого тела. 2011. № 4. С. 18–30.
13. Грибков В.А., Хохлов А.О. Устойчивость обращенных стабилизируемых физических маятников, состоящих из нескольких звеньев: эксперимент и расчет // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник докладов / под ред. Д.А. Губайдуллина, А.М. Елизарова, Е.К. Липачева. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2015. С. 1054–1056.
14. Грибков В.А., Хохлов А.О. Определение динамических характеристик многозвенной маятниковой системы с сопоставлением расчетных и экспериментальных результатов //

Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2015. № 9. С. 352–375. DOI: 10.7463/0915.0789404 URL: <http://technomag.bmstu.ru/doc/789404.html>

15. *Acheson D.J., Mullin T.* Upside-down pendulums // *Nature*. 1993. Vol. 366. P. 215–216.

16. *Acheson D.J.* A pendulum theorem // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A*. 1993. Vol. 443. P. 239–245.

17. *Грибков В.А., Хохлов А.О.* Устойчивость тройного инвертированного физического маятника из статьи академика В.Н. Челомея 1983 г. // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*. 2015. № 6. С. 33–49. DOI: 10.18698/0236-3941-2015-6-33-49

18. *Грибков В.А., Хохлов А.О.* Прием, упрощающий решение задачи устойчивости параметрически стабилизируемых статически неустойчивых маятниковых систем // *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*. 2015. № 11. С. 29–38. DOI: 10.18698/0536-1044-2015-11-29-38

**Грибков Владимир Арсеньевич** — канд. техн. наук, доцент кафедры «Аэрокосмические системы» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5).

**Хохлов Алексей Олегович** — аспирант кафедры «Аэрокосмические системы» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5), сотрудник ФГУП «Государственный космический научно-производственный центр им. М.В. Хруничева» (Российская Федерация, 121087, Москва, Новозаводская ул., д. 18).

#### **Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Грибков В.А., Хохлов А.О. Экспериментальное исследование устойчивости обращенных стабилизируемых маятников // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*. 2017. № 2. С. 22–39. DOI: 10.18698/1812-3368-2017-2-22-39

## **EXPERIMENTAL STUDY OF INVERTED REGULABLE PENDULUM STABILITY**

V.A. Gribkov<sup>1</sup>

zenit-ab@mail.ru

A.O. Khokhlov<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> **Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation**

<sup>2</sup> **Khrunichev State Research and Production Space Center, Moscow, Russian Federation**

---

### **Abstract**

The study identifies stability zones of single, double and triple physical pendulums, regulable in the inverted vertical position by monoharmonic fluctuations of the vertical suspension axis (linear problem). The pendulum links (absolutely solid body) are arranged subsequently and connected by ideal (frictionless) cylindrical joints with parallel axes. The calculated results for the stability zone boundary lines were found by solving the stability problem, this approach being proposed by the authors. The experimental results were obtained by means of original testing facilities specially created for this purpose. The facilities

### **Keywords**

*Inverted physical pendulum, N-linked pendulum, parametric excitation, dynamic stability, experiment*

possess the characteristics necessary for solving the two experimental tasks (frequency testing tasks and the problems of defining the stability zone boundaries). We defined stability zone experimental boundaries for a wide range of change of amplitude and frequency excitation parameters. By experiments we confirmed the theoretical prediction of dynamical instability of inverted pendulum systems when crossing the upper boundary of the stability zone. We obtained the experimental results in the area connecting the upper and lower boundary lines of the stability zone. The results obtained in this work, were preceded by a thorough analysis of the experimental material performed by D.J. Acheson and T. Mullin for single, double and triple pendulums

## REFERENCES

- [1] Akulenko L.D., Nesterov S.V. The stability of the equilibrium of a pendulum of variable length. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2009, vol. 73, no. 6, pp. 642–647. DOI: 0.1016/j.jappmathmech.2010.01.004 Available at: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021892810000055>
- [2] Arkhipova I.M., Luongo A., Seyranian A.P. Vibrational stabilization of the upright statically unstable position of a double pendulum. *Journal of Sound and Vibration*, 2012, vol. 331, no. 2, pp. 457–469. DOI: 10.1016/j.jsv.2011.09.007 Available at: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X11007425>
- [3] Aslanov B.C., Bezglasnyy S.P. Stability and instability of controlled motions of a two-mass pendulum of variable length. *Mechanics of Solids*, 2012, vol. 47, no. 3, pp. 285–297. DOI: 10.3103/S002565441203003X Available at: <http://link.springer.com/article/10.3103%2FS002565441203003X>
- [4] Burov A.A., Kosenko I.I. Pendulum motions of extended lunar space elevator. *Mechanics of Solids*, 2014, vol. 49, no. 5, pp. 506–517. DOI: 10.3103/S0025654414050033 Available at: <http://link.springer.com/article/10.3103/S0025654414050033>
- [5] Bulanchuk P.O., Petrov A.G. The vibrational energy and control of pendulum systems. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2012, vol. 76, no. 4, pp. 396–404. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2012.09.006 Available at: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021892812000986>
- [6] Bulanchuk P.O., Petrov A.G. Suspension point vibration parameters for a given equilibrium of a double mathematical pendulum. *Mechanics of Solids*, 2013, vol. 48, no. 4, pp. 380–387. DOI: 10.3103/S0025654413040043 Available at: <http://link.springer.com/article/10.3103/S0025654413040043>
- [7] Zevin A.A., Filonenko L.A. Qualitative research on pendulum oscillations with cycling length and mathematic model of seesaw. *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*, 2007, vol. 71, no. 6, pp. 989–1003 (in Russ.).
- [8] Martynenko Yu.G., Formal'skiy A.M. Controlled pendulum on a movable base. *Mechanics of Solids*, 2013, vol. 48, no. 1, pp. 6–18. DOI: 10.3103/S0025654413010020 Available at: <http://link.springer.com/article/10.3103/S0025654413010020>

- [9] Maylybaev A.A., Seyranyan A.P. *Mnogoparametricheskie zadachi ustoychivosti. Teoriya i prilozheniya v mekhanike* [Multiparameter stability problems. Theory and applications in mechanics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009. 400 p.
- [10] Petrov A.G. On vibrational energy of conservative mechanical system. *Doklady RAN*, 2010, vol. 431, no. 6, pp. 762–765 (in Russ.).
- [11] Seyranyan A.A., Seyranyan A.P. On inverted pendulum stability with vibrating suspension centre. *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*, 2006, vol. 70, no. 5, pp. 835–843 (in Russ.).
- [12] Kholostova O.V. On stability of relative equilibria of a double pendulum with vibrating suspension point. *Mechanics of Solids*, 2011, vol. 46, no. 4, pp. 508–518.  
DOI: 10.3103/S0025654411040029 Available at: <http://link.springer.com/journal/11964>
- [13] Gribkov V.A., Khokhlov A.O. Stability of stabilizing inverted pendulum consisting of some components: Experiment and calculation. *XI Vserossiyskiy s'ezd po fundamental'nyim problemam teoreticheskoy i prikladnoy mekhaniki: sbornik dokladov* [Proc. XI Russian conf. on fundamental problems of theoretical and applied mechanics]. Kazan', Kazan University Publ., 2015, pp. 1054–1056 (in Russ.).
- [14] Gribkov V.A., Khokhlov A.O. Defining dynamic characteristics of multilink pendulum system with comparison of the calculated and experimental results. *Nauka i obrazovanie. MGTU im. N.E. Baumana* [Science and Education of Bauman MSTU], 2015, no. 9, pp. 352–375 (in Russ.). DOI: 10.7463/0915.0789404 Available at: <http://technomag.bmstu.ru/en/doc/789404.html>
- [15] Acheson D.J., Mullin T. Upside-down pendulums. *Nature*, 1993, vol. 366, pp. 215–216.
- [16] Acheson D.J. A pendulum theorem. *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.*, 1993, vol. 443, pp. 239–245.
- [17] Gribkov V.A., Khokhlov A.O. Stability of the triple inverted physical pendulum described in the article of academician V.N. Chelomey (1983). *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Bauman, Mashinost.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Mech. Eng.], 2015, no. 6, pp. 33–49. DOI: 10.18698/0236-3941-2015-6-33-49
- [18] Gribkov V.A., Khokhlov A.O. A method to simplify solution of stability problem for parametrically stabilized statically unstable pendulum systems. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroenie* [Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building], 2015, no. 11, pp. 29–38. DOI: 10.18698/0536-1044-2015-11-29-38

**Gribkov V.A.** — Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor of Aerospace Systems Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Khokhlov A.O.** — post-graduate student of Aerospace Systems Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation), employee Khrunichev State Research and Production Space Center (Novozavodskaya ul. 18, Moscow, 121087 Russian Federation).

**Please cite this article in English as:**

Gribkov V.A., Khokhlov A.O. Experimental Study of Inverted Regulable Pendulum Stability. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Bauman, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2017, no. 2, pp. 22–39. DOI: 10.18698/1812-3368-2017-2-22-39