УДК 517.52 DOI: 10.18698/1812-3368-2017-3-4-16

НУЛИ ПОЛИНОМОВ ПО СИСТЕМЕ ТИПА ХААРА

Е.А. Власова elena.a.vlasova@yandex.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Получена точная оценка меры Лебега множества нулей полиномов произвольно большого порядка с ненулевыми коэффициентами по обобщенной системе Хаара для случая ограниченной последовательности параметров, определяющих данную систему. Аналогичные вопросы исследованы для случая неограниченной последовательности параметров обобщенной системы Хаара. В последнем случае показано, что всегда найдется полином, мера Лебега множества нулей которого сколь угодно мало отличается от единицы

Ключевые слова

Обобщенная система Хаара, полином, мера Лебега, множество нулей

Поступила в редакцию 22.09.2016

Введение. Мультипликативные системы и системы, тесно с ними связанные, продолжают привлекать внимание и математиков, и инженеров. К таким системам относятся ортонормированные системы типа Хаара, частным случаем которых является классическая система Хаара [1, 2].

В последние годы при фильтрации, предварительной обработке и синтезе различных сигналов, решении задач сжатия, обработки и склейки изображений находят широкое применение вейвлеты [3–5]. В качестве материнского вейвлета нередко используют вейвлет Хаара [6, 7]. Функции Хаара являются старейшими представителями вейвлет-функций, известными с 1910 г.

Системы функций Хаара и им подобные применяют в самых различных областях науки и техники при решении широкого классса теоретических и прикладных задач [8]. В настоящей работе рассмотрены некоторые свойства полиномов по системам $\chi\{p_n\}$, впервые введенных Н.Я. Виленкиным [9, 10] для последовательностей простых и ограниченных в совокупности чисел p_n. Основные свойства этих систем для произвольных натуральных чисел $p_n \neq 1$ также изучены в работах [11–17]. Вопросы исследования обобщенных систем Хаара актуальны и в настоящее время [18–22].

Определения и постановка задачи. Пусть $\{p_n\}$ — последовательность натуральных чисел, таких, что $p_n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$. Примем $m_n = p_1 \dots p_n$, $n \geq 1$, $m_0 = 1$. Тогда для любой точки $t \in [0, 1] \setminus Q$, где $Q = \{l / m_n\}$, $0 \leq l \leq m_n$, $l \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, существует единственное разложение

$$t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{j_k(t)}{m_k} \tag{1}$$

с условием $0 \leq j_k(t) \leq p_k - 1$, $j_k(t) \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$.

Любое целое число $m \geq 2$ единственным образом можно представить в виде

$$m = m_n + r\,(p_{n+1} - 1) + s, \tag{2}$$

$$n \in \{0\} \cup \mathbb{N},\ r = 0, 1, \ldots, m_n - 1,\ s = 1, \ldots, p_{n+1} - 1.$$

Определим комплекснозначную систему функций $\chi\{p_n\} = \{\chi_m(t)\}_{m=1}^{\infty}$ следующим образом. Пусть $\chi_1(t) = 1$ при $t \in [0, 1]$. Используя разложение $m = m_n + r\,(p_{n+1} - 1) + s$, для $m \geq 2$ примем

$$\chi_m(t) = \chi_{nr}^{(s)}(t) =$$

$$= \begin{cases} \sqrt{m_n}\,\exp(2\pi i s j_{n+1}(t) / p_{n+1}) & \text{при} \quad t \in (r / m_n,\ (r+1) / m_n) \setminus Q; \\ 0 & \text{при} \quad t \notin [r / m_n,\ (r+1) / m_n]. \end{cases} \tag{3}$$

В остальных точках интервала $(0, 1)$ функция $\chi_m(t)$ равна полусумме своих предельных значений справа и слева по множеству $t \in [0, 1] \setminus Q$, а на концах отрезка $[0, 1]$ — предельным значениям внутри отрезка.

При $p_n = 2$, $n \in \mathbb{N}$, система функций $\chi\{p_n\}$ совпадает с классической системой Хаара [1, 2].

Функцию $f(t) = \sum_{m=1}^{N} a_m \chi_m(t)$, где $a_N \neq 0$, будем называть полиномом порядка N по системе $\chi\{p_n\}$. Если заранее неизвестно значение коэффициента a_N, то функцию $f(t)$ назовем полиномом порядка не выше N.

Всякий интервал $\Delta_{nr} = (r / m_n, (r+1) / m_n)$, где $0 \leq r \leq m_n - 1$, $r \in \mathbb{Z}$, $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, будем называть интервалом n-го ранга, а функции $\chi_{nr}^{(s)}$ для всех индексов с условиями $0 \leq r \leq m_n - 1$, $r \in \mathbb{Z}$, $s = 1, \ldots, p_{n+1} - 1$, $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ — функциями системы $\chi\{p_n\}$ n-го ранга ($\chi_1(t)$ будем считать функцией ранга –1). Отметим, что функции $\chi_m(t)$ n-го ранга имеют интервалы постоянства ($n + 1$)-го ранга.

Для системы Хаара в работе П.Л. Ульянова [23] был установлен следующий результат.

Теорема 1 (теорема Ульянова). *Пусть* N *— натуральное четное число,* $a_m \neq 0$ *при* $1 \leq m \leq N$ *и полином* $P_N(t) = \sum_{m=1}^{N} a_m \chi_m(t)$. *Тогда мера Лебега* $mes\{t : t \in [0, 1],\quad P_N(t) = 0\} \leq 1/2$.

Изучим аналогичные вопросы для системы $\chi\{p_n\}$.

Основные результаты. Теорема 2. *Пусть* $\{p_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $m_n = p_1 \ldots p_n$, $n \geq 1$, $m_0 = 1$, *натуральное число* $N = p_1$ *или* $N = m_n + k\,(p_{n+1} - 1)\,p_n$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, 2, \ldots, m_{n-1}\}$, $a_m \neq 0$ *при* $1 \leq m \leq N$ *и полином* $P_N(t) = \sum_{m=1}^{N} a_m \chi_m(t)$, *где* $\chi_m(t)$ *— функции системы* $\chi\{p_n\}$. *Тогда, если* $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} p_n = p < \infty$, *то мера Лебега*

$$mes\{t : t\in[0,1],\ P_N(t)=0\}\le 1-\frac{1}{p}. \qquad (4)$$

◀ Пусть сначала $N=p_1$. Согласно (3), имеем $\chi_m(t)=\chi_{nr}^{(s)}(t)$, $m=m_n+$ $+r(p_{n+1}-1)+s$, и

$$P_{p_1}(t)=\sum_{m=1}^{p_1}a_m\chi_m(t)=a_1+a_2\chi_{00}^{(1)}(t)+a_3\chi_{00}^{(2)}(t)+\ldots+a_{p_1}\chi_{00}^{(p_1-1)}(t).$$

Отметим, что функция $P_{p_1}(t)$ постоянна на каждом следующем интервале $\left(j/p_1,\ (j+1)/p_1\right)$, $j=0,1,\ldots,p_1-1$. Для $t\in(0,1/p_1)$ имеем $P_{p_1}(t)=a_1+a_2+$ $+a_3+\ldots+a_{p_1}$. Если $t\in(j/p_1,\ (j+1)/p_1)$, где $j=1,\ldots,p_1-1$, то $P_{p_1}(t)=$ $=a_1+a_2\exp(2\pi ji/p_1)+a_3\exp(4\pi ji/p_1)+\ldots+a_{p_1}\exp(2(p_1-1)\pi ji/p_1)$.

Предположим, что справедливо неравенство, противоположное (4), кроме того,

$$mes\{t : t\in[0,1],\ P_{p_1}(t)=0\}>1-\frac{1}{p_1}\ge 1-\frac{1}{p}.$$

Тогда коэффициенты a_m, $m=1,\ldots,p_1$, должны быть решениями однородной системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
&a_1+a_2+\ldots+a_{p_1}=0;\\
&a_1+a_2\exp\frac{2\pi i}{p_1}+a_3\exp\frac{4\pi i}{p_1}+\ldots+a_{p_1}\exp\frac{2(p_1-1)\pi i}{p_1}=0;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_1+a_2\exp\frac{2(p_1-1)\pi i}{p_1}+a_3\exp\frac{4(p_1-1)\pi i}{p_1}+\ldots+a_{p_1}\exp\frac{2(p_1-1)^2\pi i}{p_1}=0.
\end{aligned} \qquad (5)$$

Определителем системы (5) является определитель Вандермонда

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{p_1-1}\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{p_1-1}\\ 1 & x_3 & x_3^2 & \ldots & x_3^{p_1-1}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 1 & x_{p_1} & x_{p_1}^2 & \ldots & x_{p_1}^{p_1-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le j<k\le n}(x_k-x_j),$$

где $x_k=\exp\dfrac{2(k-1)\pi i}{p_1}$, $k=1,2,\ldots,p_1$. Поскольку $x_k-x_j\ne 0$ при $k\ne j$, то $\Delta\ne 0$, и система (5) имеет только нулевое решение $a_k=0$ при $k=1,2,\ldots,p_1$. Однако по условию коэффициенты полинома $P_N(t)$ отличны от нуля. Следовательно, для $N=p_1$ справедливо неравенство

$$mes\{t : t\in[0,1],\ P_{p_1}(t)=0\}\le 1-\frac{1}{p_1}. \tag{6}$$

Таким образом, справедливо и неравенство (4).

Отметим, что полученная оценка (6) является точной. Предположим, что $P_{p_1}(t)=0$ для $t\in\bigcup_{j=1}^{p_1-1}\left(j/p_1,\ (j+1)/p_1\right)$. Тогда при $y=\exp(2\pi i/p_1)$ верны равенства

$$\begin{aligned} &a_1+a_2y+\ldots+a_{p_1}y^{p_1-1}=0;\\ &a_1+a_2y^2+\ldots+a_{p_1}y^{2(p_1-1)}=0;\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &a_1+a_2y^{p_1-1}+\ldots+a_{p_1}y^{2(p_1-1)^2}=0.\end{aligned} \tag{7}$$

Для $a_1=a_2=\ldots=a_{p_1-1}=1$ все равенства системы (7) выполняются, поскольку

$$1+y^k+\ldots+y^{k(p_1-1)}=\frac{y^{kp_1}-1}{y^k-1}=\frac{\exp(2kp_1\pi i/p_1)-1}{\exp(2k\pi i/p_1)-1}=\frac{\exp(2k\pi i)-1}{\exp(2k\pi i/p_1)-1}=0$$

для любых значений $k=1,2,\ldots,p_1-1$.

Пусть $N=p_1+(p_2-1)p_1=p_1p_2$. Тогда

$$P_N(t)=a_1\chi_1(t)+\sum_{s=1}^{p_1-1}a_{00}^{(s)}\chi_{00}^{(s)}(t)+\sum_{r=0}^{p_1-1}\sum_{s=1}^{p_2-1}a_{1r}^{(s)}\chi_{1r}^{(s)}(t).$$

Для $t\in(0,1/p_1)$ имеем

$$P_N(t)=a_1+a_2+\ldots+a_{p_1}+a_{p_1+1}\chi_{10}^{(1)}(t)+\ldots+a_{p_1+p_2-1}\chi_{10}^{(p_2-1)}(t).$$

При этом для $t\in\left(0,1/(p_1p_2)\right)$ справедливо равенство

$$P_N(t)=a_1+a_2+\ldots+a_{p_1}+a_{p_1+1}\sqrt{p_1}+\ldots+a_{p_1+p_2-1}\sqrt{p_1}.$$

Для всех точек $t\in\left(k/(p_1p_2),(k+1)/(p_1p_2)\right)$, $k=1,2,\ldots,p_2-1$, получаем равенство

$$P_N(t)=a_1+a_2+\ldots+a_{p_1}+a_{p_1+1}\sqrt{p_1}\exp\frac{2k\pi i}{p_2}+\ldots+a_{p_1+p_2-1}\sqrt{p_1}\exp\frac{2k(p_2-1)\pi i}{p_2}.$$

Если обозначить $b_1=\sum_{m=1}^{p_1}a_m$, $b_2=\sqrt{p_1}a_{p_1+1},\ldots,$ $b_{p_2}=\sqrt{p_1}a_{p_1+p_2-1}$, то с учетом изложенного выше получаем

$$mes\{t : t\in(0,1/p_1),\ P_N(t)=0\}\le\frac{p_2-1}{p_1p_2}.$$

Отметим, что полученная оценка является точной.

Для точек $t \in (1/p_1, 2/p_1)$ имеем

$$P_N(t) = a_1 + a_2 \exp\frac{2\pi i}{p_1} + a_3 \exp\frac{4\pi i}{p_1} + \ldots + a_{p_1} \exp\frac{2(p_1-1)\pi i}{p_1} +$$
$$+ a_{p_1+p_2}\chi_{11}^{(1)}(t) + \ldots + a_{p_1+2(p_2-1)}\chi_{11}^{(p_2-1)}(t).$$

При этом для точек $t \in \left(1/p_1,\ 1/p_1 + 1/(p_1p_2)\right)$ справедливо равенство

$$P_N(t) = \sum_{k=1}^{p_1} a_k \exp\frac{2(k-1)\pi i}{p_1} + a_{p_1+p_2}\sqrt{p_1} + \ldots + a_{p_1+2(p_2-1)}\sqrt{p_1}.$$

Для точек $t \in \left(1/p_1 + k/(p_1p_2),\ 1/p_1 + (k+1)/(p_1p_2)\right)$, $k = 1, 2, \ldots, p_2 - 1$, получаем равенство

$$P_N(t) = \sum_{k=1}^{p_1} a_k \exp\frac{2(k-1)\pi i}{p_1} + a_{p_1+p_2}\sqrt{p_1}\exp\frac{2k\pi i}{p_2} + \ldots + a_{p_1+2(p_2-1)}\sqrt{p_1}\exp\frac{2k(p_2-1)\pi i}{p_2}.$$

Таким образом, в этом случае приходим к неравенству

$$mes\{t : t \in (1/p_1, 2/p_1),\ P_N(t) = 0\} \le \frac{p_2 - 1}{p_1p_2}. \qquad (8)$$

Если $a_{p_1+p_2} = \ldots = a_{p_1+2(p_2-1)} = 1$, то для $k = 1, \ldots, p_2 - 1$, имеем

$$a_{p_1+p_2}\sqrt{p_1}\exp\frac{2k\pi i}{p_2} + \ldots + a_{p_1+2(p_2-1)}\sqrt{p_1}\exp\frac{2k(p_2-1)\pi i}{p_2} =$$

$$= \sqrt{p_1}\,\frac{\exp\frac{2k\pi i}{p_2}\left(\exp\frac{2k(p_2-1)\pi i}{p_2} - 1\right)}{\exp\frac{2k\pi i}{p_2} - 1} = \sqrt{p_1}\,\frac{1 - \exp\frac{2k\pi i}{p_2}}{\exp\frac{2k\pi i}{p_2} - 1} = -\sqrt{p_1}.$$

Если $a_1 = \sqrt{p_1}/2$, $a_2 = a_3 = \ldots = a_{p_1} = -\sqrt{p_1}/2$, то

$$\sum_{k=1}^{p_1} a_k \exp\frac{2(k-1)\pi i}{p_1} = \frac{\sqrt{p_1}}{2} - \frac{\sqrt{p_1}\exp\frac{2\pi i}{p_1}\left(\exp\frac{2(p_1-1)\pi i}{p_1} - 1\right)}{2\left(\exp\frac{2\pi i}{p_1} - 1\right)} = \sqrt{p_1}.$$

При выбранных значениях коэффициентов $a_1, \ldots, a_{p_1}$ и $a_{p_1+p_2}, \ldots, a_{p_1+2(p_2-1)}$ имеем $P_N(t) = 0$ для

$$t \in \bigcup_{k=1}^{p_2-1}\left(\frac{1}{p_1} + \frac{k}{p_1p_2},\ \frac{1}{p_1} + \frac{k+1}{p_1p_2}\right).$$

Следовательно, оценка (8) является точной.

Для точек $t \in (l / p_1,\ (l+1) / p_1),\ l = 1, \ldots, p_1 - 1,$ имеем

$$P_N(t) = a_1 + a_2 \exp\frac{2l\pi i}{p_1} + a_3 \exp\frac{4l\pi i}{p_1} + \ldots + a_{p_1} \exp\frac{2(p_1-1)l\pi i}{p_1} +$$

$$+ a_{p_1 + l(p_2-1)+1} \chi_{1l}^{(1)}(t) + \ldots + a_{p_1 + (l+1)(p_2-1)} \chi_{1l}^{(p_2-1)}(t).$$

Кроме того, при $t \in (l / p_1 + r / p_1 p_2,\ l / p_1 + (r+1) / p_1 p_2),\ \ r = 0, 1, \ldots, p_2 - 1,$ получаем

$$P_N(t) = \sum_{k=1}^{p_1} a_k \exp\frac{2(k-1)l\pi i}{p_1} + \sqrt{p_1} \sum_{s=1}^{p_2-1} a_{p_1 + l(p_2-1)+s} \exp\frac{2sr\pi i}{p_2}.$$

Учитывая изложенное выше, для $l = 0, 1, \ldots, p_1 - 1$ имеем

$$mes\{t : t \in (l / p_1, (l+1) / p_1),\ P_N(t) = 0\} \le \frac{p_2 - 1}{p_1 p_2},$$

причем оценка точная. Следовательно, для $N = p_1 p_2$ справедливо неравенство

$$mes\{t : t \in (0, 1),\ P_N(t) = 0\} \le \frac{p_2 - 1}{p_2}.$$

Используя приведенные выше результаты, нетрудно установить окончательность полученной оценки.

Предположим, что $N = m_{n_0} + (p_{n_0+1} - 1) p_{n_0} k_0,$ где $k_0 \in \{1, 2, \ldots, m_{n_0-1}\},\ \ n_0 \ge 2,$ $n_0 \in \mathbb{N}.$ Тогда

$$P_N(t) = \sum_{m=1}^{m_{n_0}} a_m \chi_m(t) + \sum_{m = m_{n_0}+1}^{m_{n_0} + (p_{n_0+1}-1) p_{n_0} k_0} a_m \chi_m(t) = P_N^{(1)}(t) + P_N^{(2)}(t).$$

Поскольку $P_N^{(2)}(t) = 0$ при $t \in (k_0 / m_{n_0-1}, 1) = \delta,$ верно равенство

$$mes\{t : t \in \delta,\ P_N(t) = 0\} = mes\{t : t \in \delta,\ P_N^{(1)}(t) = 0\}.$$

Интервал δ распадается на целое число интервалов $(n_0 - 1)$-го ранга

$$\Delta_{n_0-1 r} = \left(\frac{r}{m_{n_0-1}},\ \frac{r+1}{m_{n_0-1}}\right), \quad k_0 \le r \le m_{n_0-1} - 1.$$

Таким образом, приходим к неравенству

$$mes\{t : t \in \delta,\ P_N^{(1)}(t) = 0\} \le \frac{p_{n_0} - 1}{p_{n_0}} \sum_{r=k_0}^{m_{n_0-1}-1} \left|\Delta_{n_0-1 r}\right| = \frac{p_{n_0} - 1}{p_{n_0}} |\delta|.$$

Пусть $\delta_1 = (0,\ k_0 / m_{n_0-1}).$ Этот интервал распадается на интервалы n_0-го ранга:

$$\Delta_{n_0 r} = \left(\frac{r}{m_{n_0}}, \frac{r+1}{m_{n_0}} \right), \quad 0 \le r \le p_{n_0} k_0 - 1.$$

На каждом таком интервале функция $P_N^{(1)}(t)$ постоянна, поскольку $P_N^{(1)}(t)$ есть сумма функций системы $\chi\{p_n\}$, ранг которых не превышает $n_0 - 1$.

Функция $P_N(t)$ на каждом интервале

$$(r / m_{n_0} + q / m_{n_0+1},\ r / m_{n_0} + (q+1) / m_{n_0+1} \subset \Delta_{n_0 r}, \quad q = 0, 1, \ldots, p_{n_0+1} - 1,$$

принимает следующие значения:

$$b_0 + \sum_{s=1}^{p_{n_0+1}-1} b_s \exp\left\{ \frac{2qs\pi i}{p_{n_0+1}} \right\}.$$

Отметим, что $b_s \ne 0$, $s = 1, 2, \ldots, p_{n_0+1} - 1$, так как $b_s = \sqrt{m_{n_0}}\, a_{m+s-1}$ для некоторого номера m, для которого $m_{n_0} < m \le m_{n_0} + (p_{n_0+1} - 1) p_{n_0} k_0$.

Следовательно, при условии $0 \le r \le p_{n_0} k_0 - 1$ имеем неравенство

$$mes\{t : t \in \Delta_{n_0 r},\ P_N(t) = 0\} \le \frac{p_{n_0+1} - 1}{p_{n_0+1}} \left| \Delta_{n_0 r} \right|.$$

Тогда получаем

$$mes\{t : t \in \delta_1,\ P_N(t) = 0\} \le \frac{p_{n_0+1} - 1}{p_{n_0+1}} \sum_{r=0}^{p_{n_0} k_0 - 1} \left| \Delta_{n_0 r} \right| = \frac{p_{n_0+1} - 1}{p_{n_0+1}} \left| \delta_1 \right|.$$

Таким образом,

$$mes\{t : t \in [0,1],\ P_N(t) = 0\} = mes\{t : t \in \delta_1,\ P_N(t) = 0\} + mes\{t : t \in \delta,\ P_N(t) = 0\} \le$$

$$\le \frac{p_{n_0+1} - 1}{p_{n_0+1}} \left| \delta_1 \right| + mes\{t : t \in \delta,\ P_N^{(1)}(t) = 0\} \le$$

$$\le \frac{p_{n_0+1} - 1}{p_{n_0+1}} \left| \delta_1 \right| + \frac{p_{n_0} - 1}{p_{n_0}} \left| \delta \right| \le \frac{p-1}{p} \left(\left| \delta_1 \right| + \left| \delta \right| \right) = \frac{p-1}{p}.$$

Полученная оценка является точной. Действительно, предположим существует такое неотрицательное число A, что для любых $N = m_n + (p_{n+1} - 1) p_n k$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, 2, \ldots, m_{n-1}\}$, $a_m \ne 0$ при $1 \le m \le N$, верно неравенство

$$mes\{t : t \in [0,1],\ P_N(t) = 0\} \le A < \frac{p-1}{p},$$

где $P_N(t) = \sum_{m=1}^{n} a_m \chi_m(t)$. Поскольку $p > 1/(1-A)$ и $p = \sup_{n \in \mathbb{N}} p_n$, то найдется такое натуральное число n_0, для которого справедливо неравенство $1/(1-A) < p_{n_0} \le p$. Пусть $N = m_{n_0}$, тогда

$$P_{m_{n_0}}(t)=a_1\chi_1(t)+\sum_{n=0}^{n_0-1}\sum_{r=0}^{m_n-1}\sum_{s=1}^{p_{n+1}-1}a_{nr}^{(s)}\chi_{nr}^{(s)}(t)=$$

$$=a_1\chi_1(t)+\sum_{n=0}^{n_0-2}\sum_{r=0}^{m_n-1}\sum_{s=1}^{p_{n+1}-1}a_{nr}^{(s)}\chi_{nr}^{(s)}(t)+\sum_{r=0}^{m_{n_0-1}-1}\sum_{s=1}^{p_{n_0}-1}a_{n_0-1r}^{(s)}\chi_{n_0-1r}^{(s)}(t).$$

Примем $a_{nr}^{(s)}=1$ при любых $n=0,1,\ldots,n_0-2$, $r=0,1,\ldots,m_n-1$, $s==1,2,\ldots,p_{n+1}-1$. При этом, учитывая (3), имеем

$$F_{nr}(t)=\sum_{s=1}^{p_{n+1}-1}\chi_{nr}^{(s)}(t)=$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\sum_{s=1}^{p_{n+1}-1}\sqrt{m_n}\exp(2\pi isj_{n+1}(t)/p_{n+1}) & \text{при} \quad t\in(r/m_n,(r+1)/m_n)\setminus Q;\\ 0 & \text{при} \quad t\notin[r/m_n,(r+1)/m_n].\end{cases}$$

Если $t\in(r/m_n,\ (r+1)/m_n)\setminus Q$ и $j_{n+1}(t)=0$, то $F_{nr}(t)=(p_{n+1}-1)\sqrt{m_n}$. Если $t\in(r/m_n,(r+1)/m_n)\setminus Q$ и $j_{n+1}(t)\neq 0$, то

$$F_{nr}(t)=\sqrt{m_n}\,\frac{\exp\dfrac{2\pi ij_{n+1}(t)}{p_{n+1}}\left(\exp\dfrac{2\pi i(p_{n+1}-1)j_{n+1}(t)}{p_{n+1}}-1\right)}{\exp\dfrac{2\pi ij_{n+1}(t)}{p_{n+1}}-1}=-\sqrt{m_n}.$$

Для действительного числа u и номера $l=0,1,\ldots,m_{n_0-1}-1$, выражение

$$u\chi_1(t)+\sum_{n=0}^{n_0-2}\sum_{r=0}^{m_n-1}F_{nr}(t)=G_l(u)$$

принимает одно и то же значение для любого $t\in\left(l/m_{n_0-1},\ (l+1)/m_{n_0-1}\right)$. Если

$$G_{\min}=\min_{l=0,1,\ldots,m_{n_0-1}-1}G_l(1),$$

то $G_l(1)+|G_{\min}|+1>0$ для любого $l=0,1,\ldots,m_{n_0-1}-1$. Если принять $u_0=|G_{\min}|+2$, то получим $G_l(u_0)>0$ для любого $l=0,1,\ldots,m_{n_0-1}-1$.

Пусть теперь $a_1=u_0$, $a_{n_0-1l}^{(s)}=G_l(u_0)\big/\sqrt{m_{n_0-1}}$ при $l=0,1,\ldots,m_{n_0-1}-1$. Тогда для $t\in\bigcup_{k=1}^{p_{n_0}-1}\left(\dfrac{l}{m_{n_0-1}}+\dfrac{k}{m_{n_0}},\ \dfrac{l}{m_{n_0-1}}+\dfrac{k+1}{m_{n_0}}\right)$ имеем

$$P_{m_{n_0}}(t)=G_l(u_0)+\sum_{s=1}^{p_{n_0}-1}a_{n_0-1l}^{(s)}\chi_{n_0-1l}^{(s)}(t)=G_l(u_0)+\sum_{s=1}^{p_{n_0}-1}\frac{G_l(u_0)}{\sqrt{m_{n_0-1}}}\chi_{n_0-1l}^{(s)}(t)=$$

$$=G_l(u_0)\left(1+\sum_{s=1}^{p_{n_0}-1}\exp\frac{2\pi isj_{n_0}(t)}{p_{n_0}}\right)=0.$$

Таким образом, $mes\{t : t \in [0,1],\, P_{m_{n_0}}(t) = 0\} = \dfrac{p_{n_0} - 1}{p_{n_0}} > A,$ что противоречит предположению. ►

В ходе доказательства теоремы 2 были установлены следующие два утверждения.

Теорема 3. *Пусть* $N = m_n + k(p_{n+1} - 1)p_n, \quad n \geq 2, \quad n \in \mathbb{N}, \quad k \in \{1, 2, \ldots, m_{n-1}\},$ $a_m \neq 0$ *при* $1 \leq m \leq N$ *и полином* $P_N(t) = \sum_{m=1}^{N} a_m \chi_m(t).$ *Тогда на каждом интервале* $\Delta_{n-1\,r}$ *(n – 1)-го ранга с условием* $k \leq r \leq m_{n-1} - 1$ *функция* $P_N(t)$ *может обратиться в нуль на множестве меры, не большей, чем* $(1 - 1/p_n)\left|\Delta_{n-1\,r}\right|.$ *В то же время на каждом интервале* Δ_{nr} *n-го ранга с условием* $0 \leq r \leq p_n k - 1$ *функция* $P_N(t)$ *может обратиться в нуль на множестве меры, не большей, чем* $(1 - 1/p_{n+1})\left|\Delta_{nr}\right|.$

Теорема 4. *Пусть* $N = m_n + k(p_{n+1} - 1)p_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad k \in \{1, 2, \ldots, m_{n-1}\}, \quad a_m \neq 0$ *при* $1 \leq m \leq N$ *и полином* $P_N(t) = \sum_{m=1}^{N} a_m \chi_m(t).$ *Тогда*

$$mes\{t : t \in [0,1],\, P_N(t) = 0\} \leq 1 - \frac{1}{\max\{p_n, p_{n+1}\}}.$$

Следствие 1. *Пусть* $N = m_n + k(p_{n+1} - 1)p_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad k \in \{1, 2, \ldots, m_{n-1}\}, \quad a_m \neq 0$ *при* $1 \leq m \leq N$ *и полином* $P_N(t) = \sum_{m=1}^{N} a_m \chi_m(t).$ *Тогда, если* $\{p_n\}$ *— неубывающая последовательность целых чисел с условием* $p_n \geq 2,$ *то*

$$mes\{t : t \in [0,1],\, P_N(t) = 0\} \leq 1 - \frac{1}{p_{n+1}}.$$

Теорема 5. *Если для системы* $\chi\{p_n\}$ *выполнено условие* $\sup_{n \in \mathbb{N}} p_n = \infty,$ *то для любого числа* $\varepsilon > 0$ *найдется такой полином* $P_N(t) = \sum_{m=1}^{N} a_m \chi_m(t)$ *с коэффициентами* $a_m \neq 0$ *при* $1 \leq m \leq N,$ *что*

$$mes\{t : t \in [0,1],\, P_N(t) = 0\} > 1 - \varepsilon.$$

◄ Поскольку $\sup_{n \in \mathbb{N}} p_n = \infty,$ то для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер $n \in \mathbb{N},$ что $1/p_n < \varepsilon.$ Тогда $1 - 1/p_n > 1 - \varepsilon.$ В ходе доказательства теоремы 2 было показано как построить полином $P_N(t) = \sum_{m=1}^{N} a_m \chi_m(t)$ с номером $N = m_n$ и коэффициентами $a_m \neq 0$ при $1 \leq m \leq N,$ для которого

$$mes\{t : t \in [0,1],\, P_N(t) = 0\} = 1 - \frac{1}{p_n}. \ ►$$

Заключение. Получена точная оценка меры Лебега множества нулей полинома $P_N(t)=\sum_{m=1}^{N} a_m\chi_m(t)$, где $\chi_m(t)$ — функции обобщенной системы Хаара $\chi\{p_n\}$, причем $N=m_n+k(p_{n+1}-1)p_n$, $n\in\mathbb{N}$, $k\in\{1,2,\ldots,m_{n-1}\}$, а для коэффициентов справедливо условие $a_m\neq 0$ при $1\leq m\leq N$. Оценка найдена для случая $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} p_n=p<\infty$, она обобщает результат, полученный П.Л. Ульяновым для системы Хаара (см. теорему 2). Исследован также случай $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} p_n=\infty$ (см. теорему 5).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алексич Г.* Проблемы сходимости ортогональных рядов / пер. с англ.; под ред. П.Л. Ульянова. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1963. 360 с.

2. *Кашин Б.С., Саакян А.А.* Ортогональные ряды. М.: АФЦ, 1999. 560 с.

3. *Сахарова Е.И., Макашов А.А., Кропотов А.Н.* Использование вейвлетов Хаара для обработки и склейки изображений // Инженерный журнал: наука и инновации. 2012. Вып. 11. С. 44–50. DOI: 10.18698/2308-6033-2012-11-465
URL: http://engjournal.ru/catalog/pribor/robot/465.html

4. *Можаров Г.П.* Сравнительный анализ адаптивных алгоритмов вейвлет-пакетов // Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана. Сер. Приборостроение. 2016. № 1. С. 75–88.
DOI: 10.18698/0236-3933-2016-1-75-88

5. *Горшков Ю.Г.* Исследовательский комплекс частотно-временного анализа речевого сигнала с использованием вейвлет-технологии // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2011. № 3. С. 78–87.

6. *Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.А.* Теория всплесков. М.: Физматлит, 2006. 616 с.

7. *Сюзев В.В.* Спектральный анализ в базисах функций Хаара // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2011. № 2. С. 48–67.

8. *Залманзон Л.А.* Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях. М.: Наука, 1989. 496 с.

9. *Виленкин Н.Я.* Об одном классе полных ортонормальных систем // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1947. Т. 11. Вып. 4. С. 363–400.
URL: http://www.mathnet.ru/links/8673207aed10c0089d87679e5b80818f/im3004.pdf

10. *Качмаж С., Штейнгауз Г.* Теория ортогональных рядов. М.: Физматгиз, 1958. 508 с.

11. *Голубов Б.И., Рубинштейн А.И.* Об одном классе систем сходимости // Матем. сб. 1966. Т. 71. № 1. С. 96–115.
URL: http://www.mathnet.ru/links/6c02b9104edb1b318fd76f5954de50dd/sm4253.pdf

12. *Голубов Б.И.* Об одном классе полных ортонормированных систем // Сиб. матем. журн. 1968. Т. 9. № 2. С. 297–314.

13. *Власова Е.А.* Об одном классе ортогональных систем сходимости // Мат. заметки. 1988. Т. 43. Вып. 6. С. 734–345.
URL: http://www.mathnet.ru/links/4cd6168fced83c4a21f7407537c0b808/mzm4311.pdf

14. *Vlasova E.A.* Convergence of series with respect to generalized Haar systems // Anal. math. 1987. Vol. 13. No. 4. P. 339–360.

15. *Власова Е.А.* О рядах по системам типа Хаара // Известия высших учебных заведений. Математика. 1990. Вып. 9. С. 1–13.
URL: http://www.mathnet.ru/links/52d3db43a3143ea7443b4c3958fcda20/ivm5441.pdf

16. *Акишев Г.А.* О порядках приближения классов полиномами по обобщенной системе Хаара // Сиб. электрон. матем. изв. 2006. № 3. С. 92–105.
URL: http://www.mathnet.ru/links/fb3bfbeefe9e5741bb2621ea1c55adeb/semr187.pdf

17. *Акишев Г.А.* Абсолютная сходимость рядов Фурье от суперпозиции функций // Известия высших учебных заведений. Математика. 2009. Вып. 11. С. 3–11.
URL: http://www.mathnet.ru/links/f1392dd67a1ba0ffd6765dea77d718ea/ivm4250.pdf

18. *Волосивец С.С., Фадеев Р.Н.* Весовая интегрируемость сумм рядов по мультипликативным системам // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14. № 2. С. 129–136.

19. *Щербаков В.И.* Признак Дини — Липшица по обобщенным системам Хаара // Матер. 17-й международ. Саратовской зимней шк., посв. 150-летию со дня рождения В.А. Стеклова. Саратов: Изд-во СГУ, 2014. С. 307–308.

20. *Щербаков В.И.* О признаке Жордана или во что он переходит на обобщенных системах Хаара // Матер. 12-й международ. Казанской летней научной школы-конференции. Т. 51. Казань: Изд-во Казанского математического общества, изд-во Академии наук РТ, 2015. С. 493–496.

21. *Щербаков В.И.* Особенности поточечного признака сходимости Дини рядов Фурье по системам Виленкина и по обобщенной системе Хаара на нульмерных группах // Матер. 18-й международ. Саратовской зимней шк. Саратов: Научная книга, 2016. С. 341–345.

22. *Щербаков В.И.* Расходимость рядов Фурье по обобщенным системам Хаара в точках непрерывности функции // Известия высших ученых заведений. Математика. 2016. Вып. 1. С. 49–68.

23. *Ульянов П.Л.* Об единственности рядов по системе Хаара с монотонными коэффициентами // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1983. № 6. С. 63–73.

Власова Елена Александровна — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Власова Е.А. Нули полиномов по системе типа Хаара // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2017. № 3. С. 4–16. DOI: 10.18698/1812-3368-2017-3-4-16

POLINOMIAL ZEROS ACCORDING TO THE HAAR-TYPE SYSTEM

E.A. Vlasova elena.a.vlasova@yandex.ru

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

We obtained an accurate estimate for the Lebesgue measure of the polynomial zeros set of arbitrarily large order with non-zero coefficients according to the generalized Haar system for the case of a bounded sequence of parameters defining a given system. Similar problems were investigated for the case of an unbounded sequence of parameters of the generalized Haar system. In the latter case it is shown that there is always a polynomial, whose Lebesgue measure of the polynomial zeros set has an arbitrarily small difference from one

Keywords

Generalized Haar system, polynomial, Lebesgue measure, zeros set

REFERENCES

[1] Alexits G. Convergence problems of orthogonal series. New York, Pergamon Press, 1961.

[2] Kashin B.S., Sahakian A.A. Ortogonal'nye ryady [Orthogonal series]. Moscow, AFTS Publ., 1999. 560 p.

[3] Sakharov I.E., Makashov A.A., Kropotov A.N. Using Haar wavelets for image processing and splicing. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii* [Engineering journal: Science and Innovation], 2012, no. 11, pp. 44–50 (in Russ.). DOI: 18698/2308-6033-2012-11-465 Available at: http://engjournal.ru/eng/catalog/pribor/robot/465.html

[4] Mozharov G.P. Comparative analysis of adaptive wavelet-packages algorithms. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Priborostr.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Instrum. Eng.], 2016, no. 1, pp. 75–88 (in Russ.). DOI: 10.18698/0236-3933-2016-1-75-88

[5] Gorshkov Yu.G. Research complex for frequency-time analysis of voice signal using the wavelet technology. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Priborostr.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Instrum. Eng.], 2011, no. 3, pp. 78–87 (in Russ.).

[6] Novikov I.Ya., Protasov V.Yu., Skopina M.A. Teoriya vspleskov [Theory of bursts]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006. 616 p.

[7] Syuzev V.V. Spectral analysis in Haar function basis. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Priborostr.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Instrum. Eng.], 2011, no. 2, pp. 48–67 (in Russ.).

[8] Zalmanzon L.A. Preobrazovaniya Fur'ye, Uolsha, Khaara i ikh primenenie v upravlenii, svyazi i drugikh oblastyakh [Fourier, Walsh, Haar transforms and their application in management, communications and other fields]. Moscow, Nauka Publ., 1989. 496 p.

[9] Vilenkin N.Ya. On a class of complete orthonormal systems. *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, 1947, vol. 11, no. 4, pp. 363–400.

[10] Kaczmarz S., Steinhaus H. Theorie der Orthogonalreinen. New York, Chelsea Publ., 1951.

[11] Golubov B.I., Rubinshteyn A.I. A class of convergence systems. *Matem. sb.* 1966, vol. 71, no. 1, pp. 96–115 (in Russ.).
Available at: http://www.mathnet.ru/links/6c02b9104edb1b318fd76f5954de50dd/sm4253.pdf

[12] Golubov B.I. On a class of complete orthonornal systems. *Sib. matem. jurn.* [Siberian Mathematical Journal], 1968, vol. 9, no. 2, pp. 297–314 (in Russ.).

[13] Vlasova E.A. A certain class of orthogonal convergence systems. *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 1988, vol. 43, iss. 6, pp. 421–428. DOI: 10.1007/BF01158511 Available at: http://link.springer.com/article/10.1007%2FBF01158511

[14] Vlasova E.A. Convergence of series with respect to generalized Haar systems. *Anal. math.*, 1987, vol. 13, no. 4, pp. 339–360.

[15] Vlasova E.A. Series in systems of Haar type. *Izvestiya VUZ. Matematika* [Soviet Mathematics], 1990, vol. 34, no. 9, pp. 1–13 (in Russ.).
Available at: http://www.mathnet.ru/links/52d3db43a3143ea7443b4c3958fcda20/ivm5441.pdf

[16] Akishev G.A. On degrees of approximation of some classes by polynomials with respect to generalized Haar system. *Sib. elektron. matem. izv.* [Siberian Electronic Mathematical Reports], 2006, no. 3, pp. 92–105 (in Russ.).
Available at: http://www.mathnet.ru/links/fb3bfbeefe9e5741bb2621ea1c55adeb/semr187.pdf

[17] Akishev G.A. Absolute convergence of Fourier series of superpositions of functions. *Russian Mathematics*, 2009, vol. 53, no. 1. DOI: 10.3103/S1066369X09110012 Available at: http://link.springer.com/article/10.3103%2FS1066369X09110012

[18] Volosivets S.S., Fadeev R.N. Vesovaya integriruemost' summ ryadov po mul'tiplikativnym sistemam. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika* [Izvestiya of Saratov University. New Series. Series Mathematics. Mechanics. Informatics], 2014, vol. 14, no. 2, pp. 129–136 (in Russ.).

[19] Shcherbakov V.I. Dini — Lipschitz criterion on generalized Haar. *Mater. 17-y mezhdunarod. Saratovskoy zimney shk., posv. 150-letiyu so dnya rozhdeniya V.A. Steklova* [Proc. 17th Int. winter workshop dedicated to the 150th anniversary of birth of V.A. Steklov]. Saratov, SGU Publ., 2014, pp. 307–308 (in Russ.).

[20] Shcherbakov V.I. On Jordan criterion or its transformation in generalized Haar systems. *Mater. 12-y mezhdunarod. Kazanskoy letney nauchnoy shkoly-konferentsii. T. 51* [Proc. 12th Int. Kazan' summer school-conf. Vol. 51]. Kazan', Kazan' Mathematical Society Publ., Tatarstan Academy of Sciences Publ., 2015, pp. 493–496 (in Russ.).

[21] Shcherbakov V.I. Features of the pointwise Dini convergence criterion of Fourier series on Vilenkin systems and generalized Haar system on zero-dimensional groups. *Mater. 18-y mezhdunarod. Saratovskoy zimney shk.* [Proc. 18th Int. Saratov winter workshop]. Saratov, Nauchnaya kniga Publ., 2016, pp. 341–345 (in Russ.).

[22] Shcherbakov V.I. Divergence of the Fourier series by generalized Haar systems at points of continuity of a function. *Russian Mathematics*, 2016, vol. 60, no. 1, pp. 42–59.
DOI: 10.3103/S1066369X16010059
Available at: http://link.springer.com/article/10.3103%2FS1066369X16010059

[23] Ul'yanov P.L. On the uniqueness of series in a Haar system with monotone coefficients. *Vestn. Mosk. un-ta. Ser. 1. Matematika. Mekhanika*, 1983, no. 6, pp. 63–73 (in Russ.).

Vlasova E.A. — Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Professor of Applied Mathematics Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Vlasova E.A. Polinomial Zeros According to the Haar-Type System. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2017, no. 3, pp. 4–16. DOI: 10.18698/1812-3368-2017-3-4-16