

## ГРАФОВЫЙ ПОДХОД ПРИ ПОСТРОЕНИИ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЙ МОДЕЛИ УПРУГИХ ТЕЛ В ПОЛЯРНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

А.А. Тырымов

tyrymov2010@yandex.ru

Волгоградский государственный технический университет, Волгоград,  
Российская Федерация

---

### Аннотация

Предложен численный метод анализа напряженно-деформированного состояния упругой среды на основе дискретной модели в виде ориентированного графа. В процессе анализа на основе графового метода тело рассечено на элементы и для каждого из них построена элементарная ячейка (подграф), являющаяся его моделью. Уравнение элементарной ячейки получено с помощью инварианта, сохраняющегося при преобразовании элемента в ячейку. В качестве инварианта использована энергия деформации. Описана процедура определения параметров элементарной ячейки. Граф всего тела построен по тому же принципу, что и элементарная ячейка. Вывод определяющей системы уравнений основан на использовании фундаментальных законов Кирхгофа для графов и применении специальным образом сконструированных несингулярных взаимно обратных матриц. Графовый метод позволяет строить линейную аппроксимацию деформаций (соответствует квадратичной функции перемещений) на четырехузловом элементе с восемью степенями свободы. В традиционном подходе метода конечных элементов для такой аппроксимации требуется элемент, имеющий восемь узлов (16 степеней свободы). В результате определяющая система уравнений графового метода содержит примерно в 3 раза меньше уравнений по сравнению с системой, выведенной с помощью традиционного подхода метода конечных элементов. Приведены числовые примеры, показывающие работоспособность предложенного метода

### Ключевые слова

*Математическое моделирование, теория упругости, полярные координаты, ориентированный граф, деформация, напряжения*

Поступила в редакцию 04.08.2016  
© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017

---

**Введение.** В настоящей работе описан нестандартный метод анализа полей деформаций и напряжений, в котором в качестве дискретных моделей, представляющих сплошное тело, использованы ориентированные графы. Предлагаемый метод основан на сочетании дискретных и энергетических представлений при моделировании процесса деформирования упругих сред. Дискретная модель построена как первичная модель исследования, а способ перехода от континуума к системе с конечным числом степеней свободы

основан, прежде всего, на физических соображениях. Основой для построения моделей в виде графов служит объективный характер операций измерения выбранных независимых переменных. Известно, что целью любого измерения является установление зависимости значений переменной от показаний прибора. В то же время измерение связано как с точками системы, между которыми оно осуществляется, так и с ориентацией измерителя. Эти свойства операции измерения можно представить направленным отрезком, т. е. дугой графа.

С позиции операции измерения все переменные вне зависимости от их физической природы могут быть подразделены на два типа: 1) параллельные; 2) последовательные [1]. Параллельные переменные характерны тем, что измеритель подключается к двум точкам системы параллельно потоку энергии. Для измерения последовательных переменных прибор должен быть установлен в разрыв энергетического потока. К параллельным переменным относятся линейные и угловые разности перемещений, относительные скорости и ускорения, деформации, разности давлений, температур, электрических потенциалов и т. д. К последовательным переменным относятся силы, моменты сил, электрический ток, тепловой поток, поток жидкости или газа и др. Выбор связанной пары переменных определяется тем, что произведение последовательной и параллельной переменных должно давать скаляр с размерностью мощности или работы [1].

Анализ системы на основе графового метода сводится к следующему: 1) среда делится на части, имеющие известное математическое описание (в рассматриваемом далее случае — закон Гука); 2) для каждой части строится подграф (элементарная ячейка), являющийся моделью этой части среды; 3) элементарные ячейки объединяются в граф — модель анализируемого тела, затем с помощью матриц, характеризующих структуру графа, и уравнений, описывающих элементарные ячейки, получают уравнения системы.

Графовый метод применительно к задачам теории упругости в декартовой системе координат и осесимметричной задаче изложен в работах [2–11]. Для расчета напряженно-деформированного состояния в элементах конструкций, содержащих детали с круговыми границами (круговые концентрические кольца, диски, зубчатые колеса, тормозные устройства, головки проушин, подшипники и т. д.) целесообразно использовать полярную систему координат.

Графовая модель упругой среды в полярной системе координат рассмотрена в работах [12, 13], где деформации в пределах элемента предположены постоянными. Точность расчетов можно повысить, если применять для аппроксимации многочлены более высоких степеней (при фиксированной сетке конечных элементов). В настоящей работе показано, что графовый метод позволяет построить линейную аппроксимацию деформаций на элементе с четырьмя узлами. Традиционный подход метода конечных элементов (МКЭ) для этого требует как минимум восемь узлов [14]. В результате при одинаковом уровне аппроксимации определяющая система уравнений графового метода содержит в 2,5–3 раза меньше уравнений, чем в МКЭ.

**Основные уравнения теории упругости в полярных координатах.** В полярной системе координат  $x^1 = r, x^2 = \varphi$  ковариантные  $g_{11}, g_{22}$ , контравариантные  $g^{11}, g^{22}$  компоненты метрического тензора, символы Кристоффеля второго рода  $\Gamma_{ij}^k$  (отличные от нуля), а также определитель метрического тензора  $g$  имеют следующий вид [15]:

$$g_{11} = 1, g_{22} = r^2, g^{11} = 1, g^{22} = r^{-2}, \Gamma_{22}^1 = -r, \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = r^{-1}, g = r^2.$$

Используя дифференциальные зависимости Коши [15], получаем ковариантные компоненты тензора деформаций

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + r u_r, \varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{\varphi r} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{2u_\varphi}{r} \right), \gamma_{r\varphi} = \varepsilon_{r\varphi} + \varepsilon_{\varphi r}. \quad (1)$$

Закон Гука для изотропного тела представим с использованием тензора плотности напряжений  $\{\sigma'\}$ , компоненты которого имеют вид  $\sigma'^{ij} = \sqrt{g} \sigma^{ij} = r \sigma^{ij}$ . В результате получим

$$\sigma'^{rr} = r(\lambda + 2\mu) \varepsilon_{rr} + \frac{\lambda}{r} \varepsilon_{\varphi\varphi}, \sigma'^{\varphi\varphi} = \frac{\lambda}{r} \varepsilon_{rr} + \frac{\lambda + 2\mu}{r^3} \varepsilon_{\varphi\varphi}, \sigma'^{r\varphi} = \frac{\mu}{r} \gamma_{r\varphi}, \quad (2)$$

где  $\lambda, \mu$  — упругие постоянные Ламе.

Уравнения равновесия, записанные с использованием тензорных плотностей, при отсутствии массовых сил принимают вид:

$$\frac{\partial \sigma'^{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma'^{r\varphi}}{\partial \varphi} - r \sigma'^{\varphi\varphi} = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial \sigma'^{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma'^{\varphi r}}{\partial r} + \frac{2}{r} \sigma'^{r\varphi} = 0. \quad (4)$$

**Конструирование элементарной ячейки.** Граф, служащий моделью системы, должен отображать переменные частей, образовавшихся в процессе декомпозиции, а также их связь друг с другом.

Цель декомпозиции — выделить такие составляющие системы, описание которых можно считать известными в рамках выбранных переменных. Декомпозиция упругого тела представляет собой процесс мысленного разбиения его на отдельные элементы, для описания напряженно-деформированного состояния которых используется закон Гука.

Способ конструирования графа тесно связан со способом измерения полного и независимого комплекта переменных, которые однозначно характеризуют состояние элементов, полученных в результате декомпозиции. При построении графа в качестве исходных переменных используем параллельные переменные. Эти переменные измеряются установкой соответствующего прибора непосредственно на тело и должны однозначно описать деформированное состояние элементов, полученных в результате декомпозиции. Элементарной ячейкой

будем называть подграф, соответствующий одному элементу, который получен при разбиении исходной области на отдельные части.

При построении конфигурации элементарной ячейки в полярной системе координат тело покрываем сетью координатных линий  $r = \text{const}$ ,  $\varphi = \text{const}$ , между узлами которых устанавливаем гипотетические измерители. Здесь подразумеваются идеализированные приборы, т. е. приборы, обладающие необходимой базой, возможностью устанавливать ножки разных приборов в одну и ту же точку среды. Полученную сеть измерителей преобразовываем в граф, представляя каждый прибор дугой, а узлы, между которыми осуществлялось измерение, — вершинами графа. При этом учитываем, что одна и та же геометрическая точка среды, связанная с различными группами измерений, должна быть представлена разными вершинами.

Если вершины элемента обозначить через  $A, B, C$  и  $D$ , то измерители необходимо установить так, чтобы измерять перемещения точек  $A, B, C$  и  $D$  относительно друг друга (деформации  $\delta_{rr}, \delta_{r\varphi}, \delta_{\varphi\varphi}, \delta_{\varphi r}$ ) и относительно системы координат (перемещения  $u_r^A, u_r^B, u_r^C, u_r^D, u_\varphi^A, u_\varphi^B, u_\varphi^C, u_\varphi^D$ ). Например, деформация  $\delta_{rr}$  измеряется между точками  $A$  и  $B$ , либо  $C$  и  $D$  оси  $r$ , деформация  $\delta_{r\varphi}$  — между точками  $A$  и  $C$ , либо  $B$  и  $D$  оси  $\varphi$ ; деформация  $\delta_{\varphi\varphi}$  — между точками  $A$  и  $C$ , либо  $B$  и  $D$  оси  $\varphi$ , а деформация  $\delta_{\varphi r}$  — между точками  $A$  и  $B$ , либо  $C$  и  $D$  оси  $r$ . Символ перемещения, для измерения которого был использован прибор, связываем с каждой дугой. Расположение дуг, отображающих измерения нормальных деформаций ( $\delta_{rr}, \delta_{\varphi\varphi}$ ), совпадают по направлению с этими деформациями. Дуги, представляющие собой замеры относительных смещений ( $\delta_{r\varphi}, \delta_{\varphi r}$ ), вызванных поворотом сторон элемента, расположены перпендикулярно соответствующим перемещениям. Ориентация дуг, как и ориентация процесса измерения, совпадает с направлением осей координат.

В соответствии с описанной процедурой получаем элементарную ячейку четырехугольного элемента в полярной системе координат, состоящую из двух компонент (рис. 1). Дуговые стрелки в центре показывают направление обхода контура.

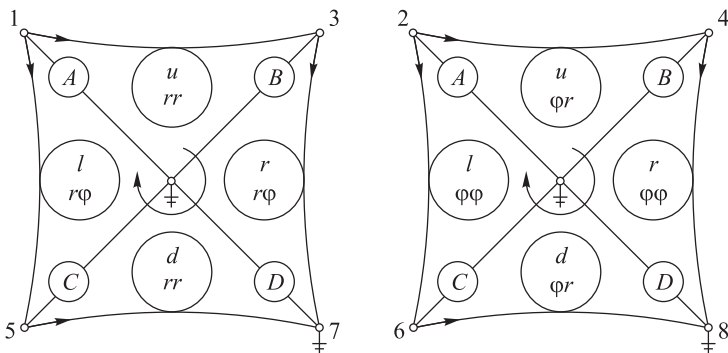


Рис. 1. Элементарная ячейка четырехугольного элемента в полярной системе координат, состоящая из двух компонент

Дуги элементарной ячейки отображают два вектора:

$$\{\delta\}_c^t = \{\delta_{rr}^u, \delta_{\varphi\varphi}^l, u_r^A, u_r^B, \delta_{rr}^d, \delta_{\varphi\varphi}^r, u_r^C, u_r^D, \delta_{\varphi r}^u, \delta_{r\varphi}^l, u_\varphi^A, u_\varphi^B, \delta_{\varphi r}^d, \delta_{r\varphi}^r, u_\varphi^C, u_\varphi^D\}; \quad (5)$$

$$\{f\}_c^t = \{f_u^{rr}, f_l^{\varphi\varphi}, f_A^r, f_B^r, f_d^{rr}, f_r^{\varphi\varphi}, f_C^r, f_D^r, f_u^{\varphi r}, f_l^{r\varphi}, f_A^\varphi, f_B^\varphi, f_d^{\varphi r}, f_r^{r\varphi}, f_C^\varphi, f_D^\varphi\}, \quad (6)$$

где  $\delta_{rr}^u, \delta_{\varphi\varphi}^l, \delta_{rr}^d, \delta_{\varphi\varphi}^r$  — нормальные деформации;  $\delta_{\varphi r}^u, \delta_{r\varphi}^l, \delta_{\varphi r}^d, \delta_{r\varphi}^r$  — относительные перемещения, обусловленные поворотом сторон элемента;  $u_r^A, u_r^B, u_r^C, u_r^D, u_\varphi^A, u_\varphi^B, u_\varphi^C, u_\varphi^D$  — перемещения точек, соответствующих вершинам в глобальной системе координат;  $f_u^{rr}, f_l^{\varphi\varphi}, f_d^{rr}, f_r^{\varphi\varphi}$  — нормальные внутренние силы или обобщенные напряжения;  $f_u^{\varphi r}, f_l^{r\varphi}, f_d^{\varphi r}, f_r^{r\varphi}$  — тангенциальные внутренние силы;  $f_A^r, f_B^r, f_C^r, f_D^r, f_A^\varphi, f_B^\varphi, f_C^\varphi, f_D^\varphi$  — внутренние силы в глобальной системе координат; индексы  $u, d, r, l$  обозначают верхние, нижние, левые и правые дуги,  $A, B, C, D$  — соответствующие вершины графа, символ  $t$  — операцию транспонирования.

Граф целого тела строится так же, как и элементарная ячейка. Пример графа для тела, состоящего из четырех элементов, показан на рис. 2.

Дуги графа тела, составленного из  $n$  отдельных элементов, представляют векторы

$$\{f\}^t = \{f_{1c}^t, f_{2c}^t, \dots, f_{nc}^t\}, \quad \{\delta\}^t = \{\delta_{1c}^t, \delta_{2c}^t, \dots, \delta_{nc}^t\}, \quad (7)$$

где  $\{f\}_{ic}^t, \{\delta\}_{ic}^t$  — векторы, определяемые по (5), (6).

**Построение матрицы жесткости элементарной ячейки.** Связь векторов  $\{f\}_c$  и  $\{\delta\}_c$ , а также зависимость их от напряжений  $\{\sigma\}$  и деформаций  $\{\varepsilon\}$  моделируемого тела устанавливаем, принимая в качестве инварианта при переходе к дискретной модели энергию деформации произвольного элемента среды энергии элементарной ячейки, соответствующей этому элементу:

$$\{f\}_c^t \{\delta\}_c = \int_V \{\sigma'\}^t \{\varepsilon\} dV, \quad (8)$$

где  $\{\delta\}_c, \{f\}_c$  — вектор деформаций и вектор внутренних сил, определяемые по (5) и (6). С одной стороны, энергию элементарной ячейки можно представить в виде

$$\begin{aligned} \{f\}_c^t \{\delta\}_c = & f_u^{rr} \delta_{rr}^u + f_l^{\varphi\varphi} \delta_{\varphi\varphi}^l + f_A^r u_r^A + f_B^r u_r^B + f_d^{rr} \delta_{rr}^d + f_r^{\varphi\varphi} \delta_{\varphi\varphi}^r + \\ & + f_C^r u_r^C + f_D^r u_r^D + f_u^{\varphi r} \delta_{\varphi r}^u + f_l^{r\varphi} \delta_{r\varphi}^l + f_A^\varphi u_\varphi^A + \\ & + f_B^\varphi u_\varphi^B + f_d^{\varphi r} \delta_{\varphi r}^d + f_r^{r\varphi} \delta_{r\varphi}^r + f_C^\varphi u_\varphi^C + f_D^\varphi u_\varphi^D; \end{aligned} \quad (9)$$

с другой — энергия деформации сплошной среды — это

$$\int_V \{\sigma'\}^t \{\varepsilon\} dV = \int_V (\sigma'^{rr} \varepsilon_{rr} + \sigma'^{\varphi\varphi} \varepsilon_{\varphi\varphi} + \sigma'^{r\varphi} \gamma_{r\varphi}) dV. \quad (10)$$

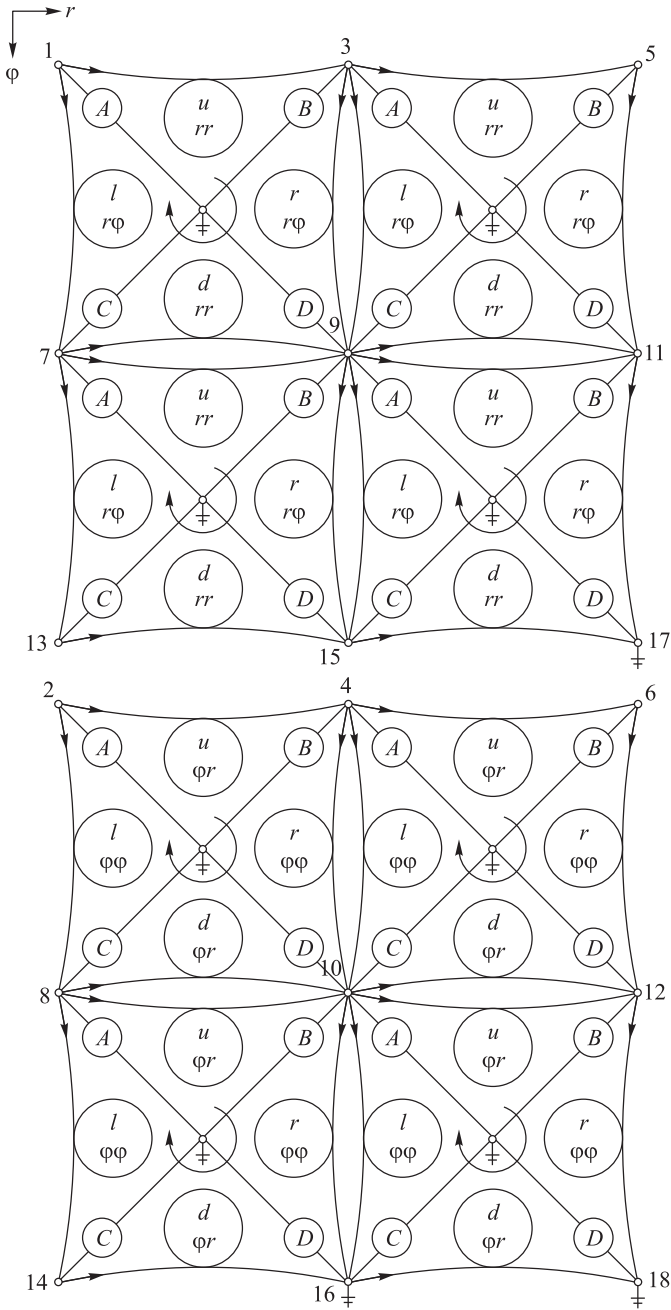


Рис. 2. Пример графа для тела, состоящего из четырех элементов

Для определения энергии деформации элемента (10) необходимо проинтегрировать выражение  $\sigma^{rr}\epsilon_{rr} + \sigma^{\varphi\varphi}\epsilon_{\varphi\varphi} + \sigma^{r\varphi}\gamma_{r\varphi}$ , содержащее неизвестные деформации и напряжения. В связи с этим аппроксимируем неизвестные деформации в пределах элемента многочленами, линейными относительно переменных  $r$  и  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial r} &= a_0 + a_1 r + a_2 \varphi, & \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} &= b_0 + b_1 r; \\ \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} &= c_0 + c_1 r + c_2 \varphi, & \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} &= d_0 + d_1 r + d_2 \varphi. \end{aligned} \quad (11)$$

Поскольку аппроксимируем деформации, а не перемещения, исключаются проблемы, возникающие при смещениях элементов как твердого тела. Кроме того, значительно сокращается размер матриц, использующихся в расчетах.

Следовательно, в силу (1)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= a_0 + a_1 r + a_2 \varphi, & \varepsilon_{\varphi\varphi} &= b_0 + b_1 r + r u_r; \\ \gamma_{r\varphi} &= c_0 + d_0 + (c_1 + d_1) r + (c_2 + d_2) \varphi - \frac{2u_\varphi}{r}. \end{aligned} \quad (12)$$

Выбирая систему координат так, чтобы ось  $r$  проходила через центр элемента, в пределах элемента имеем  $R_i \leq r \leq R_e$ ,  $-0,5\Delta\varphi \leq \varphi \leq 0,5\Delta\varphi$ .

Неизвестные коэффициенты в (11) выразим через деформации сторон элемента. С помощью интегрирования вдоль соответствующей грани элемента получим

$$\begin{aligned} \delta_{rr} &= \int_{R_i}^{R_e} \frac{\partial u_r}{\partial r} dr = (a_0 + a_1 R_c + a_2 \varphi) \Delta r; \\ \delta_{\varphi\varphi} &= \int_{-\Delta\varphi/2}^{\Delta\varphi/2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi = (b_0 + b_1 r) \Delta\varphi; \\ \delta_{r\varphi} &= \int_{-\Delta\varphi/2}^{\Delta\varphi/2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} d\varphi = (c_0 + c_1 r) \Delta\varphi; \\ \delta_{\varphi r} &= \int_{R_i}^{R_e} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} dr = (d_0 + d_1 R_c + d_2 \varphi) \Delta r, \end{aligned}$$

где  $\Delta r = R_e - R_i$ ;  $R_c = 0,5(R_i + R_e)$ .

В результате имеем

$$\begin{aligned} \delta_{rr}^u &= (a_0 + a_1 R_c - 0,5a_2 \Delta\varphi) \Delta r, & \delta_{rr}^d &= (a_0 + a_1 R_c + 0,5a_2 \Delta\varphi) \Delta r; \\ \delta_{\varphi\varphi}^l &= (b_0 + b_1 R_i) \Delta\varphi, & \delta_{\varphi\varphi}^r &= (b_0 + b_1 R_e) \Delta\varphi; \\ \delta_{r\varphi}^l &= (c_0 + c_1 R_i) \Delta\varphi, & \delta_{r\varphi}^r &= (c_0 + c_1 R_e) \Delta\varphi; \\ \delta_{\varphi r}^u &= (d_0 + d_1 R_c - 0,5d_2 \Delta\varphi) \Delta r, & \delta_{\varphi r}^d &= (d_0 + d_1 R_c + 0,5d_2 \Delta\varphi) \Delta r, \end{aligned}$$

откуда получим

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 R_c &= \frac{\delta_{rr}^d + \delta_{rr}^u}{2\Delta r}, & b_0 + b_1 R_c &= \frac{\delta_{\varphi\varphi}^l + \delta_{\varphi\varphi}^r}{2\Delta\varphi}; \\ a_2 &= \frac{\delta_{rr}^d - \delta_{rr}^u}{\Delta r \Delta\varphi}, & b_1 &= \frac{\delta_{\varphi\varphi}^r - \delta_{\varphi\varphi}^l}{\Delta r \Delta\varphi}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_0 + c_1 R_c &= \frac{\delta_{r\varphi}^l + \delta_{r\varphi}^r}{2\Delta\varphi}, & d_0 + d_1 R_c &= \frac{\delta_{\varphi r}^d + \delta_{\varphi r}^u}{2\Delta r}; \\ c_1 &= \frac{\delta_{r\varphi}^r - \delta_{r\varphi}^l}{\Delta r \Delta\varphi}, & d_2 &= \frac{\delta_{\varphi r}^d - \delta_{\varphi r}^u}{\Delta r \Delta\varphi}. \end{aligned} \quad (13)$$

Отметим, что

$$a_2 = c_1, \quad b_1 = d_2. \quad (14)$$

Это следует из контурных законов [16], примененных к компонентам  $U_r$  и  $U_\varphi$  элементарной ячейки

$$\delta_{r\varphi}^l + \delta_{rr}^d - \delta_{r\varphi}^r - \delta_{rr}^u = 0, \quad \delta_{\varphi\varphi}^l + \delta_{\varphi r}^u - \delta_{\varphi\varphi}^r - \delta_{\varphi r}^d = 0$$

и соответствующим выражениям из (13). Такой же результат следует из равенств

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \varphi} = \frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi \partial r}, \quad \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi \partial r} = \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r \partial \varphi}.$$

В (13) найдена только часть неизвестных коэффициентов из (11). Чтобы найти оставшиеся коэффициенты, используем формулы (12) и (2) и обеспечим выполнение уравнений равновесия (3), (4). В результате получим

$$(\lambda + 2\mu) \left( a_0 + 2a_1 r + a_2 \varphi - \frac{2b_0}{r^2} - \frac{b_1}{r} - \frac{u_r}{r} \right) + \mu \frac{c_2 + d_2 - 2b_1}{r} = 0; \quad (15)$$

$$\lambda \frac{a_2}{r} + (\lambda + 2\mu) \left( \frac{c_1}{r} + \frac{c_0 + c_2 \varphi}{r^2} + \frac{b_2}{r^3} \right) + \mu \left[ \frac{c_0 - d_0}{r^2} + \frac{2c_1}{r} + \frac{(c_2 - d_2)\varphi}{r^2} \right] = 0. \quad (16)$$

Из уравнения (15) следует

$$u_r = a_0 r + 2a_1 r^2 + a_2 r \varphi - \frac{2b_0}{r} - \frac{\lambda + 4\mu}{\lambda + 2\mu} b_1 + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} (c_2 + d_2). \quad (17)$$

Кроме того, из первого равенства в (11) получим

$$u_r = a_0 r + \frac{1}{2} a_1 r^2 + a_2 r \varphi + f(\varphi), \quad (18)$$

где  $f(\varphi)$  — произвольная функция аргумента  $\varphi$ .

Приравнявая выражения (17) и (18) для переменной  $u_r$ , имеем

$$\frac{3}{2} a_1 r^2 - \frac{2b_0}{r} - \frac{\lambda + 4\mu}{\lambda + 2\mu} b_1 + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} (c_2 + d_2) = f(\varphi),$$

что возможно, если в пределах элемента полагать выполненным условие

$$a_1 = \frac{4}{3r^3} b_0. \quad (19)$$



Функция  $f(\varphi)$  принимает постоянное значение  $A$ , равное

$$A = -\frac{\lambda + 4\mu}{\lambda + 2\mu} b_1 + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} (c_2 + d_2).$$

Тогда

$$u_r = a_0 r + 0,5 a_1 r^2 + a_2 r \varphi - \frac{\lambda + 4\mu}{\lambda + 2\mu} b_1 + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} (c_2 + d_2). \quad (20)$$

В целях упрощения дальнейших выкладок введем в (13) следующие обозначения:

$$a = a_0 + a_1 R_c; \quad b = b_0 + b_1 R_c; \quad c = c_0 + c_1 R_c; \quad d = d_0 + d_1 R_c. \quad (21)$$

Тогда, в частности,  $b_0 = b - b_1 R_c$  и подставляя это выражение в (19), получаем, что в пределах элемента

$$a_1 = \frac{4}{3r^3} (b - b_1 R_c). \quad (22)$$

Из уравнения (16) следует

$$(\lambda + 2\mu) c_2 + \mu (c_2 - d_2) = 0, \quad (23)$$

откуда

$$c_2 = \frac{\mu}{\lambda + 3\mu} d_2, \quad (24)$$

а также

$$\lambda a_2 + (\lambda + 3\mu) \frac{c_0}{r} - \mu \frac{d_0}{r} + (\lambda + 4\mu) c_1 = 0. \quad (25)$$

Поскольку  $a_2 = c_1$ , то из (25) получим

$$d_0 = \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\mu} r c_1 + \frac{\lambda + 3\mu}{\mu} c_0. \quad (26)$$

Тогда

$$d_1 = \frac{d - d_0}{R_c}, \quad (27)$$

а вместо параметра  $c_0$  в (26) следует подставить  $c - c_1 R_c$ .

Используя (20) и вычисляя радиальные перемещения в вершинах элемента  $ABCD$ , определяем

$$\begin{aligned} u_r^A &= (a_0 + 0,5 a_1 R_i - 0,5 a_2 \Delta \varphi) R_i + A; \\ u_r^B &= (a_0 + 0,5 a_1 R_e - 0,5 a_2 \Delta \varphi) R_e + A; \\ u_r^C &= (a_0 + 0,5 a_1 R_i + 0,5 a_2 \Delta \varphi) R_i + A; \\ u_r^D &= (a_0 + 0,5 a_1 R_e + 0,5 a_2 \Delta \varphi) R_e + A, \end{aligned}$$

откуда

$$A = \frac{1}{4} (u_r^A + u_r^B + u_r^C + u_r^D) - a_0 R_c - a_1 \left( \frac{R_c^2}{2} + \frac{\Delta r^2}{8} \right), \quad (28)$$

тогда с учетом значения  $a_0$  из (27) получим

$$a_0 + \frac{1}{2} a_1 r + a_2 \varphi = \frac{u_r^A + u_r^B + u_r^C + u_r^D}{4 R_c} - \frac{A}{R_c} + \frac{1}{2} a_1 \left( r - R_c - \frac{\Delta r^2}{4 R_c} \right) + a_2 \varphi.$$

В результате для  $u_r$  запишем выражение

$$u_r = \frac{u_r^A + u_r^B + u_r^C + u_r^D}{4 R_c} r + \frac{1}{2} a_1 r \left( r - R_c - \frac{\Delta r^2}{4 R_c} \right) + a_2 r \varphi + \left( 1 - \frac{r}{R_c} \right) A. \quad (29)$$

Теперь обратимся к перемещениям в окружном направлении. Из (11) следует

$$u_\varphi = b_0 \varphi + b_1 r \varphi + h(r), \quad u_\varphi = d_0 r + 0, 5 d_1 r^2 + d_2 r \varphi + g(\varphi). \quad (30)$$

Равенство выражений (30) с учетом (14) приводит к уравнению

$$b_0 \varphi - g(\varphi) = d_0 r + 0, 5 d_1 r^2 - h(r), \quad (31)$$

что возможно, если в (31) левая и правая части равны одной и той же постоянной  $B$ . Тогда  $h(r) = d_0 r + 0, 5 d_1 r^2 - B$ , поэтому

$$u_\varphi = b_0 \varphi + b_1 r \varphi + d_0 r + 0, 5 d_1 r^2 - B. \quad (32)$$

Используя (32), получаем

$$\begin{aligned} u_\varphi^A &= -0, 5 b_0 \Delta \varphi - 0, 5 b_1 R_i \Delta \varphi + d_0 R_i + 0, 5 d_1 R_i^2 - B; \\ u_\varphi^B &= -0, 5 b_0 \Delta \varphi - 0, 5 b_1 R_e \Delta \varphi + d_0 R_e + 0, 5 d_1 R_e^2 - B; \\ u_\varphi^C &= 0, 5 b_0 \Delta \varphi + 0, 5 b_1 R_i \Delta \varphi + d_0 R_i + 0, 5 d_1 R_i^2 - B; \\ u_\varphi^D &= 0, 5 b_0 \Delta \varphi + 0, 5 b_1 R_e \Delta \varphi + d_0 R_e + 0, 5 d_1 R_e^2 - B, \end{aligned} \quad (33)$$

отсюда

$$B = d_0 R_c + d_1 \left( \frac{R_c^2}{2} + \frac{\Delta r^2}{8} \right) - \frac{u_\varphi^A + u_\varphi^B + u_\varphi^C + u_\varphi^D}{4}.$$

В результате запишем

$$u_\varphi = b_0 \varphi + b_1 r \varphi + d_0 (r - R_c) + d_1 \left( \frac{r^2 - R_c^2}{2} - \frac{\Delta r^2}{8} \right) + \frac{1}{4} (u_\varphi^A + u_\varphi^B + u_\varphi^C + u_\varphi^D). \quad (34)$$

Из коэффициентов, входящих в выражение для  $\gamma_{r\varphi}$  из (12) с учетом (34), только коэффициент  $b_0$  зависит от нормальных деформаций, что не позволит

представить связь между нормальными составляющими  $\{f_n\}$ ,  $\{\delta_n\}$  отдельно от связи между тангенциальными составляющими  $\{\delta_t\}$ ,  $\{f_t\}$ . Поэтому используя (33), находим

$$u_\varphi^C - u_\varphi^A = (b_0 + b_1 R_i) \Delta\varphi, \quad u_\varphi^D - u_\varphi^B = (b_0 + b_1 R_e) \Delta\varphi,$$

откуда получаем

$$b_0 + b_1 R_c = \frac{u_\varphi^C - u_\varphi^A + u_\varphi^D - u_\varphi^B}{2\Delta\varphi}. \tag{35}$$

Применив (35) и (27), представим  $u_\varphi$  в виде

$$u_\varphi = \frac{u_\varphi^C - u_\varphi^A + u_\varphi^D - u_\varphi^B}{2\Delta\varphi} \varphi + b_1 (r - R_c) \varphi + d \left( \frac{4(r^2 - R_c^2) - \Delta r^2}{8R_c} \right) + d_0 \left( \frac{\Delta r^2 - 4(r - R_c)^2}{8R_c} \right) + \frac{1}{4} (u_\varphi^A + u_\varphi^B + u_\varphi^C + u_\varphi^D). \tag{36}$$

Учитывая (21)–(24), (26), (29), (36), для деформаций (12) получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= a + \frac{4}{3r^3} b (r - R_c) - \frac{4}{3r^3} b_1 R_c (r - R_c) + a_2 \varphi; \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} &= b + b_1 (r - R_c) + \frac{u_r^A + u_r^B + u_r^C + u_r^D}{4} r + ar (r - R_c); \\ &+ \frac{1}{2} a_1 r \left[ (r - R_c)^2 - \frac{\Delta r^2}{4} \right] + a_2 r^2 \varphi; \end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{r\varphi} &= -\frac{\varphi}{r\Delta\varphi} (u_\varphi^C - u_\varphi^A + u_\varphi^D - u_\varphi^B) - \frac{1}{2r} (u_\varphi^A + u_\varphi^B + u_\varphi^C + u_\varphi^D) - \frac{2\varphi}{r} b_1 (r - R_c) + \\ &+ c \left( \frac{\lambda + 3\mu}{\mu} \frac{4R_c^2 - \Delta r^2}{4R_c r} - \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \right) + \frac{4R_c^2 + \Delta r^2}{4R_c r} d + \frac{\lambda + 4\mu}{\lambda + 3\mu} d_2 \varphi + \\ &+ \frac{c_1}{\mu} \left[ 3(\lambda + 2\mu) R_c - (2\lambda + 3\mu) r - (\lambda + 3\mu) \frac{R_c^2}{r} + \left( \frac{(\lambda + 3\mu) R_c}{r} - 2(\lambda + 2\mu) \right) \frac{\Delta r^2}{4R_c} \right]. \end{aligned}$$

Подставляя (37) в правую часть формулы (10) и используя значения коэффициентов  $a$ ,  $a_2$ ,  $b$ ,  $b_1$ ,  $c$ ,  $c_1$ ,  $d$ ,  $d_2$  из (13), а также равенство (8), путем приравнивания выражений при соответствующих компонентах вектора  $\{\delta\}_c$ , определяем

$$\begin{aligned} f_d^{rr} &= \int_V \left( \frac{\sigma'^{rr}}{2\Delta r} + \frac{\sigma'^{rr} + r^2 \sigma'^{\varphi\varphi}}{\Delta r \Delta\varphi} \varphi + \frac{r(r - R_c)}{2\Delta r} \sigma'^{\varphi\varphi} \right) dv; \\ f_u^{rr} &= \int_V \left( \frac{\sigma'^{rr}}{2\Delta r} - \frac{\sigma'^{rr} + r^2 \sigma'^{\varphi\varphi}}{\Delta r \Delta\varphi} \varphi + \frac{r(r - R_c)}{2\Delta r} \sigma'^{\varphi\varphi} \right) dv; \end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned}
 f_A^r &= f_B^r = f_C^r = f_D^r = \frac{1}{4} \int_V r \sigma'^{\varphi\varphi} dv; \\
 f_l^{\varphi\varphi} &= I_1 - I_2, \quad f_r^{\varphi\varphi} = I_1 + I_2; \\
 f_A^\varphi &= f_B^\varphi = \int_V \left( \frac{\varphi}{\Delta\varphi} - \frac{1}{2} \right) \frac{\sigma'^{r\varphi}}{r} dv; \\
 f_C^\varphi &= f_D^\varphi = - \int_V \left( \frac{\varphi}{\Delta\varphi} + \frac{1}{2} \right) \frac{\sigma'^{r\varphi}}{r} dv;
 \end{aligned} \tag{38}$$

$$f_d^{\varphi r} = \int_V \left[ \frac{4R_c^2 + \Delta r^2}{8R_c r \Delta r} + \frac{\lambda + 4\mu}{\lambda + 3\mu} \frac{\varphi}{\Delta r \Delta\varphi} - \frac{2\varphi(r - R_c)}{r \Delta r \Delta\varphi} \right] \sigma'^{r\varphi} dv;$$

$$f_u^{\varphi r} = \int_V \left[ \frac{4R_c^2 + \Delta r^2}{8R_c r \Delta r} - \frac{\lambda + 4\mu}{\lambda + 3\mu} \frac{\varphi}{\Delta r \Delta\varphi} + \frac{2\varphi(r - R_c)}{r \Delta r \Delta\varphi} \right] \sigma'^{r\varphi} dv;$$

$$f_l^{r\varphi} = I_3 - I_4, \quad f_r^{r\varphi} = I_3 + I_4,$$

где

$$I_1 = \frac{1}{12\Delta\varphi} \int_V \left[ \frac{8(r - R_c)}{r^3} \sigma'^{rr} + 3\sigma'^{\varphi\varphi} + \frac{1}{r^2} (4(r - R_c)^2 - \Delta r^2) \sigma'^{\varphi\varphi} \right] dv;$$

$$I_2 = \frac{1}{6\Delta\varphi\Delta r} \int_V \left[ \frac{8R_c(r - R_c)}{r^3} \sigma'^{rr} - 6(r - R_c) \sigma'^{\varphi\varphi} + \frac{1}{r^2} [4(r - R_c)^2 - \Delta r^2] R_c \sigma'^{\varphi\varphi} \right] dv;$$

$$I_3 = \frac{1}{2} \int_V \left( \frac{\lambda + 3\mu}{\mu} \frac{4R_c^2 - \Delta r^2}{4R_c r} - \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \right) \sigma'^{r\varphi} \frac{dv}{\Delta\varphi}; \tag{39}$$

$$\begin{aligned}
 I_4 = \int_V \left[ \frac{3(\lambda + 2\mu)}{\mu} R_c - \frac{2\lambda + 3\mu}{\mu} r - \frac{\lambda + 3\mu}{\mu} \frac{R_c^2}{r} + \right. \\
 \left. + \left( \frac{\lambda + 3\mu}{\mu} \frac{R_c}{r} - \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\mu} \right) \frac{\Delta r^2}{4R_c} \right] \frac{\sigma'^{r\varphi}}{\Delta r \Delta\varphi} dv.
 \end{aligned}$$

Подставляя (37) в формулы (2), а полученные выражения в (38), (39) после интегрирования и громоздких преобразований имеем

$$\{f\}_c = [K]_c \{\delta\}_c, \tag{40}$$

или

$$\begin{Bmatrix} f_n \\ f_t \end{Bmatrix}_c = \begin{bmatrix} K_n & 0 \\ 0 & K_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_n \\ \delta_t \end{Bmatrix}_c,$$

где связь между нормальными составляющими  $\{f_n\}$ ,  $\{\delta_n\}$ ,  $[K_n]$  имеет вид

$$\begin{Bmatrix} f_d^{rr} \\ f_l^{\varphi\varphi} \\ f_C^r \\ f_D^r \\ f_u^{rr} \\ f_r^{\varphi\varphi} \\ f_A^r \\ f_B^r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} & a_{18} \\ & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} & a_{28} \\ & & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} & a_{38} \\ & & & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} & a_{48} \\ & & & & a_{55} & a_{56} & a_{57} & a_{58} \\ & & & & & a_{66} & a_{67} & a_{68} \\ & & & & & & a_{77} & a_{78} \\ & & & & & & & a_{88} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{rr}^d \\ \delta_{\varphi\varphi}^l \\ u_r^C \\ u_r^D \\ \delta_{rr}^u \\ \delta_{\varphi\varphi}^r \\ u_r^A \\ u_r^B \end{Bmatrix},$$

а связь между тангенциальными составляющими  $\{f_t\}$ ,  $\{\delta_t\}$ ,  $[K_t]$  определяется как

$$\begin{Bmatrix} f_l^{r\varphi} \\ f_d^{\varphi r} \\ f_C^\varphi \\ f_D^\varphi \\ f_r^{r\varphi} \\ f_u^{\varphi r} \\ f_A^\varphi \\ f_B^\varphi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} & b_{17} & b_{18} \\ & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} & b_{26} & b_{27} & b_{28} \\ & & b_{33} & b_{34} & b_{35} & b_{36} & b_{37} & b_{38} \\ & & & b_{44} & b_{45} & b_{46} & b_{47} & b_{48} \\ & & & & b_{55} & b_{56} & b_{57} & b_{58} \\ & & & & & b_{66} & b_{67} & b_{68} \\ & & & & & & b_{77} & b_{78} \\ & & & & & & & b_{88} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{r\varphi}^l \\ \delta_{\varphi r}^d \\ u_\varphi^C \\ u_\varphi^D \\ \delta_{r\varphi}^r \\ \delta_{\varphi r}^u \\ u_\varphi^A \\ u_\varphi^B \end{Bmatrix}.$$

Элементы симметрических матриц  $[K_n]$  и  $[K_t]$  получены аналитически в явном виде, но здесь не приведены вследствие громоздкости и ограничения объема статьи.

**Уравнения графовой модели тела.** Тело, расчлененное на отдельные элементы, и соответствующая ему совокупность элементарных ячеек описываются уравнением

$$\{f\} = [K]\{\delta\}. \tag{41}$$

Здесь  $\{f\}$ ,  $\{\delta\}$  — векторы внутренних сил и деформаций, представленные дугами графа по формулам (5)–(7);  $[K]$  — глобальная несвязная матрица жесткости тела, расчлененного на отдельные элементы

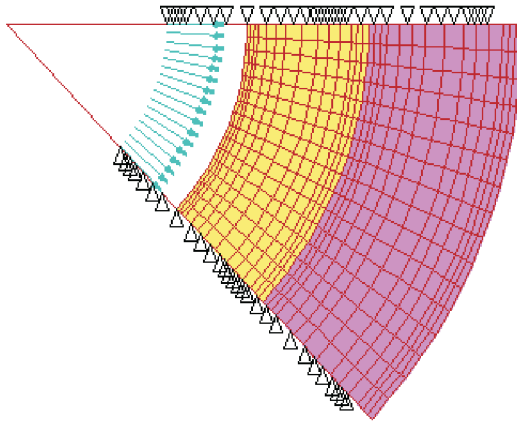
$$[K] = \text{diag}[K_{1c}, K_{2c}, \dots, K_{nc}],$$

где  $n$  — число ячеек, образующих граф;  $[K]_{ic}$  — составляющая, определяемая по формуле (40). Уравнение (41) связывает внутренние силы с деформациями элементов. В общем случае с помощью этого уравнения деформированное состояние определить нельзя, поскольку заданными бывают внешние силы и перемещения. Уравнение связного тела находим путем преобразования обобщен-

ных координат, описывающих разрезанное на элементы и связанное тело. При выводе определяющей системы уравнений важную роль играют вершинный и контурный законы Кирхгофа для графов [16]. Этот подход подробно описан в работах [4–6, 12]. Используемые при этом матрицы преобразований строятся аналогично тому, как это сделано в работах [4, 9] для элементарной ячейки в декартовой и цилиндрической системах координат.

**Пример 1.** Рассмотрим задачу о напряженно-деформированном состоянии тонкой двухслойной кольцевой пластины, находящейся под действием равномерного давления на внутренней и внешней поверхности. Граничные условия имеют вид:  $\sigma_{rr} = P_1$  при  $r = r_1$ ,  $\sigma_{rr} = -P_2$  при  $r = r_3$ ,  $r_1, r_3$  — внутренний и внешний радиусы. Упругие характеристики материала в пределах каждого слоя постоянны. Условия сопряжения на границе концентрических колец при  $r = r_2$  следующие:  $\sigma_{r1}(r_2) = \sigma_{r2}(r_2)$ ,  $u_{r1}(r_2) = u_{r2}(r_2)$ . Здесь  $\sigma_{ri}$  ( $i=1,2$ ) — радиальная компонента тензора напряжений в  $i$ -м слое;  $u_{ri}$  — перемещение  $i$ -го слоя в радиальном направлении. Для этой задачи нетрудно получить точное аналитическое решение. Вследствие ограничения объема статьи оно не приведено. Для анализа напряженного состояния в пластине выделена область  $r_1 \leq r \leq r_2$ ,  $0 \leq \varphi \leq 45^\circ$ , которая покрывалась не очень плотной ( $28 \times 16$ ) сеткой элементарных ячеек. В расчетах принято  $r_1 = 7$  мм,  $r_2 = 14$  мм,  $r_3 = 21$  мм,  $E_1 = 100$  МПа,  $E_2 = 200$  МПа,  $P_1 = 1$  МПа,  $P_2 = 0$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = 0,33$ .

Вид двухслойной кольцевой пластины после деформирования представлен на рис. 3. Стрелками показана равномерно распределенная нагрузка, причем линия приложения нагрузки соответствует исходному недеформированному состоянию пластины.



**Рис. 3.** Вид двухслойной кольцевой пластины после деформирования

Значения радиальной компоненты тензора напряжений в зависимости от радиуса  $r$ , полученные на основе графового метода, и соответствующее точное аналитическое решение приведены в табл. 1. Полученные результаты хорошо согласуются.

Таблица 1

**Значения радиальной компоненты тензора напряжений в зависимости от радиуса  $r$ , полученные на основе графового метода (числитель), и соответствующее точное аналитическое решение (знаменатель)**

$r$ , мм	$\sigma_r/P$	$r$ , мм	$\sigma_r/P$	$r$ , мм	$\sigma_r/P$
7	0,991/1,000	12	0,331/0,327	17	0,101/0,099
8	0,758/0,761	13	0,280/0,275	18	0,060/0,054
9	0,601/0,597	14	0,242/0,235	19	0,044/0,042
10	0,485/0,479	15	0,185/0,180	20	0,021/0,019
11	0,399/0,393	16	0,141/0,136	21	0,001/0,000

**Пример 2.** Рассмотрим круговой брус узкого прямоугольного сечения, ограниченный концентрическими окружностями радиусами  $r_1, r_2$  ( $r_1 < r_2$ ) и отрезками прямых  $\varphi = 0, \varphi = \pi/2$  на его торцах. Дуги границы бруса свободны от напряжений, один из торцов закреплен, а к другому — приложена сила  $P$ , действующая в плоскости кольцевого сектора в радиальном направлении. Внешний и внутренний радиусы бруса, а также упругие постоянные приняты такими же, как и в работе [17]:  $R_1 = 5,8661977$  м;  $R_2 = 6,8661977$  м;  $E = 10^6$  Н/м<sup>2</sup>;  $\nu = 0,3$ ;  $P = 10,0$  Н/м<sup>2</sup>.

Проанализируем радиальное перемещение незакрепленного торца стержня. В работе [17] расчеты были проведены методом конечных элементов. Используются четырехугольный восьмиузловой серендиповский элемент (QUAD8s), девятиузловой лагранжев элемент (QUAD91) и девятиузловой элемент, составленный из двух шестиузловых треугольных элементов. Показано, что геометрические формы элемента существенно влияют на точность результатов расчетов. При использовании формы элементов, соответствующих регулярному разбиению области в радиальном и окружном направлениях (именно такая сетка в графовом методе), точность значительно выше, чем при криволинейных асимметричных очертаниях элементов.

Сравнение результатов расчетов значений радиального перемещения свободного конца стержня, полученных на основе графового метода и в работе [17], приведено в табл. 2.

Таблица 2

**Результаты расчетов значений радиального перемещения свободного конца стержня, полученные на основе графового метода и в работе [17]**

Тип элемента	Число степеней свободы	Число элементов	Погрешность определения радиального смещения торца, %	Радиальное смещение торца, м
<i>Криволинейная форма элемента</i>				
QUAD8s	66	6	22,56	0,01890
QUAD91	78	6	15,39	0,02065
QUAD9t	78	6	3,14	0,02364

Тип элемента	Число степеней свободы	Число элементов	Погрешность определения радиального смещения торца, %	Радиальное смещение торца, м
<i>Регулярная форма элемента</i>				
QUAD8s	66	6	2,48	0,02380
QUAD9l	78	6	1,99	0,02392
QUAD9t	78	6	1,42	0,02406
Графовый	28/42	6/12	3,15/0,84	0,02364/0,02420
Теоретический	—	—	0	0,02441

**Закключение.** Следует отметить, что при практическом применении численных методов важное значение имеет эффективность расчетной модели, под которой можно понимать достигаемую точность решения при фиксированном числе степеней свободы. Поэтому число степеней свободы можно полагать некоторой обобщенной характеристикой возможностей метода, определяющей в конечном итоге вычислительные затраты.

Согласно данным, приведенным в табл. 2, графовый метод позволяет получить достаточно точные результаты на сетках с небольшим числом элементов и при фиксированном числе степеней свободы превосходит по своим возможностям стандартный МКЭ.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Trent H. Isomorphism between oriented linear graphs and lumped physical systems // J. of the Acoustical Soc. of America. 1955. Vol. 27. No. 3. P. 500–527. DOI: 10.1121/1.1907949 URL: <http://asa.scitation.org/doi/abs/10.1121/1.1907949>
2. Кузовков Е.Г. Конфигурация и параметры графовой модели упругого тела // Проблемы прочности. 1986. № 4. С. 98–103.
3. Кузовков Е.Г. Уравнения состояния графовой модели упругого тела // Проблемы прочности. 1986. №5. С. 112–117.
4. Кузовков Е.Г. Осесимметричная графовая модель упругого тела // Проблемы прочности. 1996. № 6. С. 83–103.
5. Кузовков Е.Г. Графовая модель упругой среды в декартовой системе координат // Проблемы прочности. 1993. № 12. С. 60–70.
6. Тырымов А.А. Сингулярный элемент графовой модели упругой среды в декартовой системе координат // Вычислительная механика сплошных сред. 2011. Т. 4. № 4. С. 125–136. DOI: [org/10.7242/1999-6691/2011.4.4.47](http://org/10.7242/1999-6691/2011.4.4.47) URL: <http://www2.icmm.ru/journal/download/CCMv4n4a14.pdf>
7. Тырымов А.А. Численное моделирование и расчет податливости образца с центральной трещиной на основе графовой модели упругого тела // Труды МАИ. 2014. № 77. URL: <http://www.mai.ru/upload/iblock/e70/e7020711c2e38b9154c74d87fb727ed5.pdf>
8. Тырымов А.А. Численное решение осесимметричной задачи теории упругости на основе графовой модели сплошной среды // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Серия: Физико-математические науки. 2012. № 2. С. 103–114. DOI: 10.14498/vsgtu914 URL: <http://www.mathnet.ru/links/a093db6b43ff5ed8ebf1b212652ab489/vsgtu914.pdf>



9. Тырымов А.А. Численное моделирование и анализ напряженно-деформированного состояния анизотропного массива горных пород на основе графового метода // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 2012. № 5. С. 52–66.
10. Тырымов А.А. Графовый подход при построении конечно-элементной модели упругих тел при осесимметричном деформировании // Известия Саратовского ун-та. Новая серия. Серия «Математика. Механика. Информатика». 2012. Т. 12. № 4. С. 96–106. URL: [http://mmi.sgu.ru/sites/mmi.sgu.ru/files/16\\_1.pdf](http://mmi.sgu.ru/sites/mmi.sgu.ru/files/16_1.pdf)
11. Тырымов А.А. Применение графовых моделей при анализе напряженно-деформированного состояния в массивах горных пород // Известия высших учебных заведений. Горный журнал. 2013. № 1. С. 52–59.
12. Тырымов А.А. Графовая модель упругой среды в полярной системе координат // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 1999. № 1. С. 3–15.
13. Тырымов А.А. Треугольный элемент графовой модели в полярной системе координат // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2000. № 1-2. С. 19–29.
14. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. М.: Мир, 1984. 428 с.
15. Демидов С.П. Теория упругости. М.: Высшая школа, 1979. 432 с.
16. Свами М., Тхуласираман К. Графы, сети и алгоритмы. М.: Мир, 1984. 454 с.
17. Cook W.A. The effect of geometric shape on two-dimensional finite elements // Nuclear Engineering and Design. 1982. No. 70. P. 13–26.

**Тырымов Александр Александрович** — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры прикладной математики Волгоградского государственного технического университета (ВолгГТУ) (Российская Федерация, 400005, Волгоград, пр-т им. В.И. Ленина, д. 28).

**Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Тырымов А.А. Графовый подход при построении конечно-элементной модели упругих тел в полярной системе координат // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2017. № 3. С. 52–70. DOI: 10.18698/1812-3368-2017-3-52-70

**GRAPH APPROACH FOR FINITE-ELEMENT MODEL OF AN ELASTIC BODY IN POLAR COORDINATES**

A.A. Tyrymov

tyrymov2010@yandex.ru

**Volgograd State Technical University, Volgograd, Russian Federation**

**Abstract**

The purpose of the article was to suggest a numerical method for analysis of the stress-strain state of elastic media based on a discrete model in form of directed graph. To analyze a deformable body using the graph approach, we partition a solid body onto elements and replace each element by its model in the form of an elementary cell. Derivation of cell equations, which is based on conversion of an element to a cell, relies on an invariant. We use the deformation energy as the invariant. The study describes a procedure to determine parameters of the elementary cell.

**Keywords**

*Mathematical simulation, theory of elasticity, polar coordinates, directed graph, strain, stress*

The graph of the whole body is built following the same rule as in the elementary cell. The method is based on transforming generalized coordinates of a solid body separated into pieces to a system of generalized coordinates of the initial solid body. The specific nature of the graph model lies in the possibility to construct these matrices with no need for their numerical inversion. With the use of a unit cell having 8 degrees of freedom, the strain field is approximated by linear polynomials (with corresponds to approximated of the displacement fields by quadratic polynomials). The standard finite-element method requires 16 degrees of freedom (elements with 8 nodes) for the same purpose. The proposed graphical approach thus reduces the number of equations that describe the model. We provide numerical examples which prove the efficiency of the method

## REFERENCES

- [1] Trent H. Isomorphism between oriented linear graphs and lumped physical systems. *J. of the Acoustical Soc. of America*, 1955, vol. 27, no. 3, pp. 500–527. DOI: 10.1121/1.1907949 Available at: <http://asa.scitation.org/doi/abs/10.1121/1.1907949>
- [2] Kuzovkov E.G. Configuration and parameters of a graph model of an elastic body. *Strength of Materials*, 1986, vol. 18, iss. 4, pp. 528–534. DOI: 10.1007/BF01524081 Available at: <http://link.springer.com/article/10.1007%2FBF01524081>
- [3] Kuzovkov E.G. Equations of state of graph model of elastic solid. *Strength of Materials*, 1986, vol. 18, iss. 5, pp. 698–704. DOI: 10.1007/BF01522789 Available at: <http://link.springer.com/article/10.1007%2FBF01522789>
- [4] Kuzovkov E.G. Axisymmetric graph model of an elastic solid. *Strength of Materials*, 1996, vol. 28, iss. 6, pp. 470–485. DOI: 10.1007/BF02209319 Available at: <http://link.springer.com/article/10.1007%2FBF02209319>
- [5] Kuzovkov E.G. Graphical model of an elastic medium in a cartesian coordinate system. *Strength of Materials*, 1993, vol. 25, iss. 12, pp. 906–914. DOI: 10.1007/BF00774638 Available at: <http://link.springer.com/article/10.1007%2FBF00774638>
- [6] Tyrymov A.A. A singular element of the graph model of an elastic medium in a cartesian coordinate system. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred*, 2011, vol. 4, no. 4, pp. 125–136 (in Russ.). DOI: [org/10.7242/1999-6691/2011.4.4.47](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2011.4.4.47) Available at: <http://www2.icmm.ru/journal/download/CCMv4n4a14.pdf>
- [7] Tyrymov A.A. Numerical modeling and calculation of compliance for centrally cracked specimen based on graph model of elastic solid. *Trudy MAI*, 2014, no. 77 (in Russ.). Available at: <http://www.mai.ru/upload/iblock/e70/e7020711c2e38b9154c74d87fb727ed5.pdf>
- [8] Tyrymov A.A. Numerical solution of axisymmetric problem of the theory of elasticity on the basis of continuum graph model. *Vestnik Samarskogo gos. tekhn. un-ta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki* [Vestnik of Samara State Technical University (Technical Sciences Series)], 2012, no. 2, pp. 103–114 (in Russ.). DOI: 10.14498/vsgtu914 Available at: <http://www.mathnet.ru/links/a093db6b43ff5ed8ebf1b212652ab489/vsgtu914.pdf>

- [9] Tyrymov A.A. Numerical modeling and analysis of the stress-strain state in an anisotropic rock mass by the method of graphs. *Journal of Mining Science*, 2012, vol. 48, no. 5, pp. 812–824. DOI: 10.1134/S1062739148050061  
Available at: <http://link.springer.com/article/10.1134%2FS1062739148050061>
- [10] Tyrymov A.A. Graph approach for finite-element based model of an elastic body under conditions of axisymmetric deformation. *Izvestiya Saratovskogo un-ta. Novaya seriya. Seriya «Matematika. Mekhanika. Informatika»* [Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2012, vol. 12, no. 4, pp. 96–106 (in Russ.).  
Available at: [http://mmi.sgu.ru/sites/mmi.sgu.ru/files/16\\_1.pdf](http://mmi.sgu.ru/sites/mmi.sgu.ru/files/16_1.pdf)
- [11] Tyrymov A.A. Application of graph models in the analysis of the stress-strain state of the rock. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Gornyi zhurnal* [News of the Higher Institutions. Mining Journal], 2013, no. 1, pp. 52–59 (in Russ.).
- [12] Tyrymov A.A. Graph model of the elastic medium in polar coordinate system. *Izvestiya vuzov. Mashinostroenie* [Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building], 1999, no. 1, pp. 3–15 (in Russ.).
- [13] Tyrymov A.A. Triangular element of graph model in polar coordinate system. *Izvestiya vuzov. Mashinostroenie* [Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building], 2000, no. 1-2, pp. 19–29 (in Russ.).
- [14] Gallagher R.H. Finite element analysis: Fundamentals. Prentice-Hall, 1974. 420 p.
- [15] Demidov S.P. Teoriya uprugosti [Elasticity theory]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1979. 432 p.
- [16] Swamy M.N.S., Thulasiraman K. Graphs, networks, and algorithms. Wiley, 1981. 592 p.
- [17] Cook W.A. The effect of geometric shape on two-dimensional finite elements. *Nuclear Engineering and Design*, 1982, no. 70, pp. 13–26.

**Tyrymov A.A.** — Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Professor of Applied Mathematics Department, Volgograd State Technical University (Prospekt im. V.I. Lenina 28, Volgograd, 400005 Russian Federation).

**Please cite this article in English as:**

Tyrymov A.A. Graph Approach for Finite-Element Model of an Elastic Body in Polar Coordinates. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2017, no. 3, pp. 52–70.  
DOI: 10.18698/1812-3368-2017-3-52-70