

## ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМА МОДЕЛИ ТЕПЛООВОГО ПРОБОЯ ТВЕРДОГО ДИЭЛЕКТРИКА С ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ

В.С. Зарубин

fn2@bmstu.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

---

### Аннотация

Построена дифференциальная форма математической модели, описывающей установившийся процесс переноса тепловой энергии в плоском или круговом цилиндрическом слое диэлектрика при переменном напряжении. Теплопроводность материала диэлектрика зависит от температуры. Эта модель с применением вариационной формулировки нелинейной задачи установившейся теплопроводности преобразована к вариационной форме, содержащей функционал, определенный на множестве допустимых распределений потенциала теплопроводности в слое диэлектрика. Исследование стационарных точек функционала дает возможность установить сочетание определяющих параметров, при которых возникает тепловой пробой диэлектрика. Представлен пример анализа стационарных точек и проведена оценка интегральной погрешности, позволяющей выбрать аппроксимирующую функцию, наиболее близкую к предельному распределению потенциала теплопроводности, предшествующему тепловому пробую диэлектрика

### Ключевые слова

*Диэлектрик, тепловой пробой, математическая модель, функционал, потенциал теплопроводности*

Поступила в редакцию 28.11.2016  
© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017

---

**Введение.** Твердые диэлектрики достаточно широко применяют в различных электротехнических устройствах в качестве электроизоляции. При переменном напряжении диэлектрические потери в такой электроизоляции вызывают повышение температуры в слое диэлектрика. Для большинства твердых диэлектриков диэлектрические потери возрастают с увеличением температуры, что приводит к дальнейшей интенсификации энерговыделения в объеме слоя электроизоляции. В случае ограниченного теплоотвода в окружающую среду энергии, выделяющейся в слое электроизоляции, возможно возникновение положительной обратной связи, приводящей за счет роста температуры к так называемому тепловому пробую диэлектрика (в отличие от пробоя электрического) [1–4].

Для твердых диэлектриков, в том числе в виде композиционных материалов, зависимость интенсивности объемного энерговыделения от температуры может быть представлена экспоненциальной функцией [5–7], по виду совпадающей с формулой для распределения Больцмана микрочастиц по уровням энергии [8]. Это обстоятельство вызывает необходимость при количественном анализе

явления теплового пробоя твердых диэлектриков исследовать решения существенно нелинейного дифференциального уравнения, включающего слагаемое, экспоненциально зависящее от температуры, причем такое исследование дополнительно осложнено необходимостью учитывать зависимость теплопроводности материала диэлектрика от температуры. Трудность указанного исследования состоит в том, что нелинейное дифференциальное уравнение может иметь несколько решений, а условием возникновения теплового пробоя диэлектрика является отсутствие решения этого уравнения, что с физической точки зрения означает невозможность достижения теплового равновесия в слое диэлектрика.

Возможности количественного анализа явления теплового пробоя можно расширить, применяя методы математического моделирования [9, 10], в том числе методы анализа моделей, описывающих температурное состояние твердых тел [11, 12]. Один из путей связан с переходом от дифференциальной формы математической модели явления теплового пробоя, содержащей упомянутое нелинейное дифференциальное уравнение, к вариационной форме такой модели. Каждая стационарная точка функционала, составляющего основу вариационной формы модели, соответствует одному из решений указанного дифференциального уравнения. Поэтому вырождение стационарной точки функционала эквивалентно исчезновению решения этого уравнения, а условия, при которых происходит такое вырождение, определяют наступление состояния теплового пробоя. В настоящей работе с использованием вариационной формулировки нелинейной задачи установившейся теплопроводности в твердом теле [13, 14] построена вариационная форма математической модели теплового пробоя наиболее распространенных применительно к электротехническим устройствам плоского и цилиндрического слоев электроизоляции, выполненных из твердого диэлектрика, и приведен пример количественного анализа такой формы модели.

**Основные соотношения.** Объемную мощность энерговыделения, связанного с диэлектрическими потерями, определяет соотношение [5]

$$p = E^2 \gamma, \quad (1)$$

где  $E$  — напряженность электрического поля, В/м;  $\gamma$  — удельная объемная активная проводимость диэлектрика при переменном напряжении,  $1/(\text{Ом} \cdot \text{м})$ ,

$$\gamma = \omega \varepsilon_0 \varepsilon_r \operatorname{tg} \delta = 2\pi f_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r \operatorname{tg} \delta \approx f_0 \frac{\varepsilon_r \operatorname{tg} \delta}{1,8 \cdot 10^{10}}.$$

Здесь  $\omega$  — угловая (круговая) частота переменного тока, рад/с;  $f_0 = \omega/(2\pi)$  — частота переменного тока, Гц;  $\varepsilon_0 = 1/(4\pi c^2) \approx 8,8542 \cdot 10^{-12}$  Ф/м — электрическая постоянная;  $\varepsilon_r$  — относительная диэлектрическая проницаемость диэлектрика;  $\delta$  — угол диэлектрических потерь.

Характер изменения величины  $\gamma$  при изменении температуры  $T$  диэлектрика зависит от состава и структуры его материала и от микромеханизма поляризации [5–7]. При этом основной вклад в изменение величины  $\gamma$  вносит зави-

симось от температуры угла диэлектрических потерь, а влияние изменения величины  $\varepsilon_r$  с температурой сравнительно мало и при рассмотрении явления теплового пробоя обычно полагают  $\varepsilon_r = \text{const}$  [1, 3]. В большинстве случаев влияние температуры на величину  $\gamma$  описывают зависимостью

$$\gamma(T) = \gamma_0 \exp\left(-\frac{W}{k_0 T}\right), \quad (2)$$

где  $\gamma_0$  — предэкспоненциальный множитель, фиксированный для каждого материала диэлектрика, Вт/м<sup>3</sup>;  $W$  — параметр, Дж, имеющий смысл энергии активации микрочастиц материала диэлектрика, определяющих процесс его поляризации;  $k_0 = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К — постоянная Больцмана. В целях упрощения зависимость (2) в сравнительно малом промежутке изменения температуры нередко аппроксимируют формулой [1, 3]

$$\gamma'(T) = \gamma'_0 \exp(a(T - T')). \quad (3)$$

Здесь  $\gamma'_0$ ,  $a$ ,  $T'$  — коэффициенты и температура, подбираемые, как правило, в результате обработки экспериментальных данных. Из формул (2) и (3) при  $\gamma'(T') = \gamma(T)$  и  $d\gamma'/dT|_{T=T'} = d\gamma/dT|_{T=T'}$  следует  $aT' = W/(k_0 T')$  и  $\gamma'_0 / \gamma_0 = \exp(-aT')$ .

**Дифференциальная форма математической модели.** Пусть слой электроизоляции постоянной толщины расположен между электродами с плоскими или круговыми цилиндрическими поверхностями. Условия теплообмена на внешней поверхности каждого электрода определим постоянными значениями коэффициента конвективного теплообмена  $\alpha$  и температуры  $T^*$  окружающей среды, а толщину  $h$  слоя диэлектрика между электродами примем малой по сравнению с размерами слоя в тангенциальных направлениях. Тогда возникающие в слое распределения температуры и электрического потенциала можно полагать одномерными, зависящими лишь от одной координаты  $r$  в направлении общей нормали к поверхностям электродов. Для плоского слоя диэлектрика начало отсчета координаты  $r$  выберем на одной из поверхностей контакта этого слоя с электродом, а в случае цилиндрического слоя — на оси цилиндра. Установившееся распределение температуры в слое диэлектрика с учетом соотношений (1) и (2) будет удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{r^n} \frac{d}{dr} \left( r^n \lambda(T) \frac{dT(r)}{dr} \right) + E^2(r) \gamma_0 \exp\left(-\frac{W}{k_0 T(r)}\right) = 0, \quad (4)$$

где  $\lambda(T)$  — зависящий от температуры коэффициент теплопроводности материала диэлектрика;  $n$  равно нулю или единице в случае плоского или цилиндрического слоя соответственно.

При  $\varepsilon_r = \text{const}$  для плоского слоя диэлектрика значение  $E$  в уравнении (4) не будет зависеть от координаты, что позволяет принять  $E = \Delta U / h = \text{const}$ , где

$\Delta U$  — разность электрических потенциалов на электродах. В случае цилиндрического слоя диэлектрика [1]

$$E(r) = \frac{\Delta U}{r \ln(1+h/r_0)}, \tag{5}$$

где  $r_0$  — радиус внутренней поверхности этого слоя. При  $h/r_0 \ll 1$  и в этом случае можно принять  $E \approx \Delta U/h = \text{const}$ .

Для решения уравнения (4) необходимо сформулировать граничные условия на поверхностях слоя диэлектрика. Электрический и тепловой контакты между диэлектриком и электродами примем идеальными. Термические сопротивления плоских электродов с толщинами  $h_0$  и  $h_1$ , имеющих коэффициенты теплопроводности  $\lambda_0$  и  $\lambda_1$ , будут равны  $h_0/\lambda_0$  и  $h_1/\lambda_1$ . Для суммарных термических сопротивлений между каждой поверхностью слоя диэлектрика и средой, с которой происходит конвективный теплообмен на внешней поверхности соответствующего электрода, справедливы равенства  $R_0 = h_0/\lambda_0 + 1/\alpha_0$  и  $R_1 = h_1/\lambda_1 + 1/\alpha_1$ , где  $\alpha_0, \alpha_1$  — коэффициенты конвективного теплообмена на соответствующих поверхностях слоя диэлектрика. В итоге граничные условия на поверхностях плоского слоя диэлектрика примут вид

$$\left[ \lambda \frac{dT}{dr} \right]_{r=0} = \frac{T_0 - T_0^*}{R_0}; \quad \left[ \lambda \frac{dT}{dr} \right]_{r=h} = \frac{T_1^* - T_h}{R_1}, \tag{6}$$

где  $T_0 = T(0)$ ,  $T_h = T(h)$ ,  $T_0^*$ ,  $T_h^*$  — температура окружающей среды со стороны соответствующих поверхностей слоя диэлектрика.

В случае цилиндрического слоя диэлектрика граничные условия на его поверхностях определяют формулы, аналогичные по структуре равенствам (6), в которых суммарные термические сопротивления будут равны [14]

$$R_0^{\circ} = \frac{r_0}{\lambda_0} \ln \left( \frac{1}{1-h_0/r_0} \right) + \frac{1}{\alpha_0(1-h_0/r_0)};$$

$$R_1^{\circ} = \frac{h \ln(1+h/r_0+h_1/r_0)}{\lambda_1 \ln(1+h/r_0)} + \frac{h/r_0}{\alpha_1 \ln(1+h/r_0)}.$$

Уравнение (4) вместе с граничными условиями (6) и представленными выше дополнительными соотношениями составляют дифференциальную форму математической модели теплового пробоя диэлектрика при переменном напряжении. Для частного случая  $\lambda = \text{const}$  известны решения сформулированной задачи для цилиндрического слоя диэлектрика с идеально теплоизолированной внутренней поверхностью и плоского слоя, одна из поверхностей которого также идеально теплоизолирована [1]. При получении этих решений использована табулированная интегрально-показательная функция, но если зависимость (2) аппроксимировать формулой (3), то их удастся представить в элементарных функциях. Последующий анализ указанных решений дает воз-

возможность установить условия, при которых эти решения перестают существовать, что и определяет состояние теплового пробоя диэлектрика.

Тепловой пробой слоя диэлектрика может быть связан с возникновением в этом слое значительной разности значений температуры, в связи с чем необходимо учитывать зависимость коэффициента теплопроводности материала диэлектрика от температуры. Это приводит к существенному усложнению дифференциальной формы модели теплового пробоя, затрудняющему ее количественный анализ. В этом случае целесообразно дифференциальной форме модели поставить в соответствие вариационную форму, которая непосредственно путем использования аппроксимации температурного состояния в слое диэлектрика позволяет оценить критическое значение разности электрических потенциалов, соответствующее наступлению теплового пробоя этого слоя.

**Вариационная форма математической модели.** Для перехода к вариационной форме модели теплового пробоя слоя диэлектрика предварительно введем с помощью подстановки Кирхгофа [14] функцию

$$\psi(T) = \int_{T_*}^T \lambda(T) dT, \quad (7)$$

называемую обычно потенциалом теплопроводности. Здесь  $T_*$  — нижняя грань множества возможных значений температуры в рассматриваемом слое диэлектрика. Разделив обе части равенства (7) на  $\lambda_* T_*$ , где  $\lambda_* = \lambda(T_*)$ , запишем

$$\Psi(\Theta) = \frac{\psi(T)}{\lambda_* T_*} = \int_1^\Theta \Lambda(\Theta) d\Theta, \quad (8)$$

где  $\Theta = T/T_*$ ;  $\Lambda(\Theta) = \lambda(T)/\lambda_*$ .

Поскольку  $\Lambda(\Theta) > 0$ , функция  $\Psi(\Theta)$  является возрастающей при увеличении безразмерной температуры  $\Theta$  и имеет взаимно однозначную обратную функцию  $\Theta(\Psi)$ , также возрастающую, но при увеличении  $\Psi$ . Тогда уравнение (4) с учетом равенств (5) и (8) в случае цилиндрического слоя диэлектрика можно привести к виду

$$\frac{d}{d\rho} \left( \rho^n \frac{d\Psi}{d\rho} \right) + \frac{\beta}{\rho^n (\ln(1+1/\rho_0))^{2n}} \exp\left(-\frac{\mu}{\Theta(\Psi)}\right) \rho^n = 0. \quad (9)$$

Здесь  $\rho = r/h$ ;  $\rho_0 = r_0/h$ ;  $\beta = (\Delta U)^2 k_0 \gamma_0 / (\lambda_* W)$ ;  $\mu = W / (k_0 T_*)$ . Граничные условия (6) перейдут в равенства

$$\frac{\Theta_0^* - \Theta(\Psi_0)}{\bar{R}_0} + \frac{d\Psi}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_0} = 0; \quad \frac{\Theta_1^* - \Theta(\Psi_1)}{\bar{R}_1} - \frac{d\Psi}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_0+1} = 0, \quad (10)$$

где  $\Theta_0^* = T_0^*/T_*$ ;  $\Theta_1^* = T_1^*/T_*$ ;  $\Psi_0$ ,  $\Psi_1$  — значения искомой функции  $\Psi(\rho)$  на поверхности цилиндрического слоя диэлектрика при  $\rho = \rho_0$  и  $\rho = \rho_0 + 1$ . В случае плоского слоя диэлектрика в уравнении (9) следует положить  $n = 0$ , а в равен-

ствах (10) принять  $\rho_0 = 0$  и  $\bar{R}_0^{\circ}, \bar{R}_1^{\circ}$  заменить  $\bar{R}_0 = \lambda_* R_0 / h, \bar{R}_1 = \lambda_* R_1 / h$ . При этом  $\Psi_0$  и  $\Psi_1$  станут значениями искомой функции  $\Psi(\rho)$  при  $\rho = 0$  и  $\rho = 1$ .

Связь вариационной формы математической модели с дифференциальной формой этой модели заключается в том, что в стационарных точках функционала, составляющего основу вариационной формы, должны быть выполнены соотношения (9) и (10), входящие теперь в дифференциальную форму модели. Построить такой функционал можно следующим образом.

Умножив уравнение (9) на вариацию  $\delta\Psi$  и проинтегрировав это произведение по толщине слоя диэлектрика, запишем

$$\int_{\rho_0}^{\rho_0+1} \frac{d}{d\rho} \left( \rho^n \frac{d\Psi}{d\rho} \right) \delta\Psi d\rho + \frac{\beta}{(\ln(1+1/\rho_0))^{2n}} \int_{\rho_0}^{\rho_0+1} \exp\left(-\frac{\mu}{\Theta(\Psi)}\right) \frac{\delta\Psi}{\rho^n} d\rho = 0.$$

После вычисления первого интеграла в левой части этого равенства будем иметь

$$\int_{\rho_0}^{\rho_0+1} \frac{d}{d\rho} \left( \rho^n \frac{d\Psi}{d\rho} \right) \delta\Psi d\rho = (\rho_0 + 1)^n \frac{d\Psi}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_0+1} \delta\Psi_1 - \rho_0^n \frac{d\Psi}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_0} \delta\Psi_0 - \int_{\rho_0}^{\rho_0+1} \rho^n \frac{d\Psi}{d\rho} \delta \frac{d\Psi}{d\rho} d\rho.$$

Заменяв первый интеграл этим результатом и сложив после этого указанное равенство с результатами умножения соотношений (10) на  $\rho_0^n \delta\Psi_0$  и  $(\rho_0 + 1)^n \delta\Psi_1$ , получим

$$\begin{aligned} & - \int_{\rho_0}^{\rho_0+1} \rho^n \frac{d\Psi}{d\rho} \delta \frac{d\Psi}{d\rho} d\rho + \frac{\beta}{(\ln(1+1/\rho_0))^{2n}} \int_{\rho_0}^{\rho_0+1} \exp\left(-\frac{\mu}{\Theta(\Psi)}\right) \frac{\delta\Psi}{\rho^n} d\rho + \\ & + \frac{\Theta_0^* - \Theta(\Psi_0)}{\bar{R}_0} \rho_0^n \delta\Psi_0 + \frac{\Theta_1^* - \Theta(\Psi_1)}{\bar{R}_1} (\rho_0 + 1)^n \delta\Psi_1 = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Равенство (11) с учетом правила вычисления вариации интеграла с переменным верхним пределом [13, 15] соответствует условию  $\delta J[\Theta, \delta\Theta] = 0$  стационарности функционала

$$\begin{aligned} J[\Psi] = & \int_{\rho_0}^{\rho_0+1} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{d\Psi(\rho)}{d\rho} \right)^2 - \frac{\beta}{(\rho \ln(1+1/\rho_0))^{2n}} \int_0^{\Theta(\rho)} \exp\left(-\frac{\mu}{\Theta(\Psi)}\right) d\Psi \right) \rho^n d\rho + \\ & + \frac{\Theta(\Psi_0) - 2\Theta_0^*}{2\bar{R}_0} \Theta(\Psi_0) \rho_0^n + \frac{\Theta(\Psi_1) - 2\Theta_1^*}{2\bar{R}_1} \Theta(\Psi_1) (\rho_0 + 1)^n. \end{aligned} \tag{12}$$

Функционал (12) допустимо рассматривать при условии  $\rho_0 \leq \rho \leq \rho_0 + 1$  на множестве непрерывных и кусочно дифференцируемых функций  $\Psi(\rho)$ . При идеальной теплоизоляции одной из поверхностей слоя диэлектрика термическое сопротивление на этой поверхности стремится к бесконечности, что при-

водит к исчезновению соответствующего слагаемого (второго или третьего) в правой части формулы (12). Если на одной или обеих поверхностях слоя диэлектрика вместо условий теплообмена с окружающей средой заданы фиксированные значения температуры, которым отвечают безразмерные значения  $\Theta_0$  или (и)  $\Theta_1$ , то в правой части соотношения (12) следует опустить второе или третье слагаемое (или оба этих слагаемых). В этом случае допустимая функция при  $\rho = \rho_0$  или (и)  $\rho = \rho_0 + 1$  должна принимать соответствующее безразмерное значение  $\Psi(\Theta_0)$  или (и)  $\Psi(\Theta_1)$ , определяемое с помощью формулы (8). Для плоского слоя диэлектрика в соотношении (12) необходимо принять  $\rho_0 = 0$  и  $n = 0$ .

**Анализ стационарных точек функционала.** Зависимость коэффициента теплопроводности диэлектрика от температуры примем в виде  $\lambda(T) = \lambda_* \exp(b(T - T_*))$ , где коэффициент  $b$  может быть как положительным, так и отрицательным (в частном случае при  $b = 0$  коэффициент теплопроводности не зависит от температуры). Тогда из равенства (8) получим  $v\Psi(\Theta) = \exp(v(\Theta - 1)) - 1$ , где  $v = bT_*$ . Откуда следует формула для обратной функции

$$\Theta(\Psi) = 1 + (1/v) \ln(1 + v\Psi). \quad (13)$$

В целях сокращения числа параметров при анализе стационарных точек функционала (12) рассмотрим плоский слой диэлектрика ( $n = \rho_0 = 0$ ). Примем поверхность этого слоя при  $\rho = 0$  идеально теплоизолированной, а на поверхности при  $\rho = 1$  зададим значение  $\Theta(1) = 1$  безразмерной температуры, которому, согласно формуле (8), соответствует значение  $\Psi_1 = 0$ . Тогда в правой части формулы (12) будут отсутствовать второе и третье слагаемые. В итоге с учетом формулы (13) вместо соотношения (12) получим

$$J_1[\Psi] = \int_0^1 \left( \frac{1}{2} \left( \frac{d\Psi(\rho)}{d\rho} \right)^2 - \beta \int_0^{\Psi(\rho)} \exp\left( -\frac{\mu v}{v + \ln(1 + v\Psi)} \right) d\Psi \right) d\rho. \quad (14)$$

Для функционала (14) одной из возможных допустимых будет тригонометрическая функция  $\Psi_1(\rho) = B_1 \cos(\pi\rho/2)$ , удовлетворяющая граничным условиям на обеих поверхностях плоского слоя диэлектрика. Эта функция содержит коэффициент  $B_1$ , определяемый условием  $\partial J_1[\Psi]/\partial B_1 = 0$  стационарности функционала [16, 17], приводящим после подстановки в функционал (14) функции  $\Psi_1(\rho)$  к трансцендентному уравнению

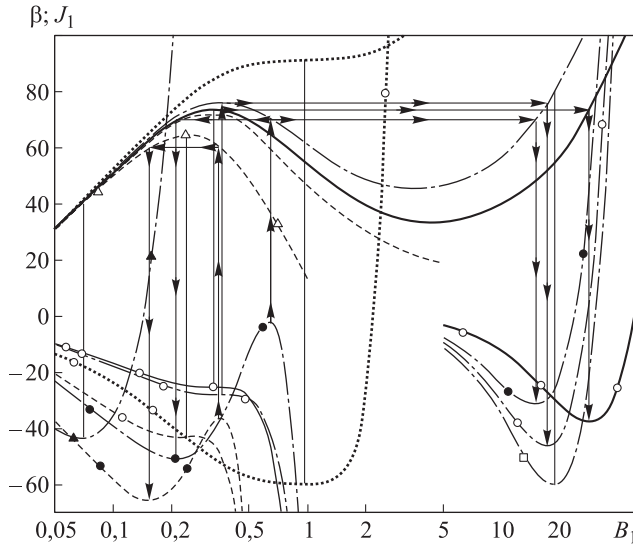
$$\frac{\pi^2}{8} B_1 - \beta \int_0^1 \exp\left( -\frac{\mu v}{v + \ln(1 + vB_1 \cos(\pi\rho/2))} \right) \cos\left( \frac{\pi\rho}{2} \right) d\rho = 0 \quad (15)$$

относительно этого коэффициента. Связь коэффициента  $B_1$  с параметром  $\beta$  можно представить графически при фиксированных значениях  $\mu$  и  $v$ . С использованием уравнения (15) в полулогарифмических координатах на рис. 1 построена

зависимость  $\beta (B_1)$  при гипотетически выбранном значении  $\mu = 6$  и значениях  $\nu = 1,167$  (пунктирная линия),  $0,2$  (штрихпунктирная линия),  $0$  (сплошная линия);  $-0,2$  (штриховая линия),  $-1$  (штриховая линия со светлыми треугольниками). При  $\nu = 0$  кривая построена по формуле

$$\beta = \frac{\pi^2}{8} B_1 \left( \int_0^1 \exp \left( - \frac{\mu}{1 + B_1 \cos(\pi \rho / 2)} \right) \cos \left( \frac{\pi \rho}{2} \right) d\rho \right)^{-1},$$

которая следует из равенства (15) после предельного перехода при  $\nu \rightarrow 0$ .



**Рис. 1.** Зависимости параметра  $\beta$  и функционала  $J_1$  от коэффициента  $B_1$  при гипотетически выбранном значении  $\mu = 6$  и различных значениях  $\nu$

В случае  $\nu = 0$  зависимость  $\beta (B_1)$  достигает максимального значения  $\beta_1^* \approx 73,393$  при  $B_1 \approx 0,328$  и минимального значения  $\beta \approx 33,301$  при  $B_1 \approx 4,406$  (эти значения найдены из условия  $\partial\beta / \partial B_1 = 0$  с помощью метода безусловной минимизации [18, 19] применительно к функции  $F(B_1) = (\partial\beta / \partial B_1)^2$ ). При  $\nu = 0,2$  значению  $\Theta = 2$  безразмерной температуры соответствует увеличение коэффициента теплопроводности по сравнению с  $\lambda_*$  в  $\exp(0,2) \approx 1,221$  раза. В этом случае зависимость  $\beta (B_1)$  также имеет два экстремума: максимум с ординатой  $\beta_1^* \approx 75,579$  и абсциссой  $B_1^* \approx 0,356$ ; минимум с ординатой  $\beta'_1 \approx 45,037$  и абсциссой  $B'_1 \approx 3,597$  (эти значения также определены путем решения упомянутой выше задачи безусловной минимизации). По мере возрастания параметра  $\nu$  происходит сближение экстремальных точек на зависимости  $\beta (B_1)$  и при  $\nu' \approx 1,167$  наступает объединение этих точек в точку перегиба с касательной, параллельной оси абсцисс (см. рис. 1). При  $\nu > \nu'$  зависимость  $\beta (B_1)$  является строго возрастающей.



Если  $\nu < 0$ , то зависимость  $\beta(B_1)$  имеет лишь один экстремум — максимум, причем эта зависимость определена лишь при  $B_1 < 1/|\nu|$ . Следует отметить, что при аппроксимации функции (2) формулой (3) зависимость  $\beta(B_1)$  может иметь лишь один экстремум (максимум) как при отрицательных, так и при положительных значениях параметра  $\nu$ .

Установленная связь между параметром  $\beta$  и коэффициентом  $B_1$  позволяет провести анализ зависимости функционала (14) от  $B_1$  при фиксированных значениях  $\beta$ ,  $\mu = 6$  и  $\nu$ , представив его как функцию  $J_1(\beta, B_1, \mu, \nu)$ . Каждому сочетанию фиксированных значений указанных параметров соответствует определенная зависимость функционала (14) от коэффициента  $B_1$ . При этом абсциссы стационарных точек этого функционала совпадают с абсциссами выбранных значений  $\beta$  на соответствующих графиках зависимости  $\beta$  от  $B_1$ , что отмечено на рис. 1 вертикальными линиями. Поскольку значения функции  $J_1(\beta, B_1, \mu, \nu)$  изменяются в достаточно широких пределах, зависимости  $J_1(B_1)$  представлены на этом рисунке в различных масштабах по оси ординат.

Сплошная линия со светлыми кружками на рис. 1 построена при значении  $\nu = 0$  и соответствует зависимости  $J_1 \cdot 2000$  от  $B_1$  при  $B_1 < 1$  и зависимости  $J_1 \cdot 0,2$  от  $B_1$  при  $B_1 > 5$  (значения ординат остальных графиков при  $B_1 > 5$  определяет шкала на рис. 1). На левой ветви этой кривой абсциссе  $B_1 \approx 0,328$  максимального значения  $\beta_1^\circ$  отвечает стационарная точка функционала в виде точки перегиба с касательной, параллельной оси абсцисс. Эта стационарная точка соответствует неустойчивому температурному состоянию диэлектрика, которое при малом превышении параметра  $\beta$  по отношению к значению  $\beta^\circ$  переходит в формально устойчивое температурное состояние, соответствующее минимуму функционала на правой ветви этой кривой при  $\bar{B}_1 \approx 28,576$  (переход к устойчивой стационарной точке отмечен на рис. 1 горизонтальной и вертикальной линиями со стрелками). Однако реализация устойчивого состояния маловероятна, поскольку связана с существенным повышением температуры на идеально теплоизолированной поверхности слоя диэлектрика. Действительно, при  $\nu = 0$  из формулы (13) с использованием значения  $\Psi_1(0) = B_1$  аппроксимирующей функции следует  $\Theta^\circ(0) = 1 + B_1^\circ \approx 1,328$  и  $\bar{\Theta}(0) = 1 + \bar{B}_1 \approx 29,576$ . Если принять  $T_* = 300$  К, то значению  $\Theta^\circ(0)$  будет соответствовать на этой поверхности температура примерно 400 К, а при значении  $\bar{\Theta}(0)$  она превысит 8800 К. Следовательно, температурное состояние диэлектрика, соответствующее при  $\nu = 0$  значению  $\beta_1^\circ$  можно рассматривать как предшествующее тепловому пробою или тепловому разрушению плоского слоя диэлектрика.

При  $\nu = -1$  единственному максимуму зависимости  $\beta(B_1)$  также отвечает стационарная точка функционала в виде точки перегиба на штриховой линии со светлыми кружками и увеличенными в 5000 раз ординатами, соответствующая неустойчивому температурному состоянию диэлектрика, предшествующему тепловому пробою. Штриховая линия с темными кружками и увеличенными

в 10 000 раз ординатами построена при  $\nu = -1$  и значении  $\beta = 60$ , несколько меньшим максимального. В этом случае функционал имеет две стационарные точки: неустойчивую в виде максимума и устойчивую в виде минимума. Переход из неустойчивой стационарной точки в устойчивую также показан на рис. 1 линиями со стрелками.

Значению  $\nu = 0,2$  отвечает на рис. 1 несколько различных вариантов расположения стационарных точек функционала  $J_1$ . При  $\beta < \beta'_1$  и  $\beta > \beta_1^*$  функционал имеет единственный экстремум — минимум, соответствующий устойчивому распределению температуры в слое диэлектрика. При  $\beta = 40$  и  $\beta = 80$  минимумы расположены на штрихпунктирных линиях с темными треугольниками и светлыми квадратами (ординаты первой кривой увеличены в 20 000 раз), причем во втором случае абсцисса минимума настолько велика, что реализация распределения температуры в слое диэлектрика маловероятна. При  $\beta = \beta_1^*$  у функционала две стационарные точки на штрихпунктирной линии со светлыми кружками (ординаты левой ветви кривой увеличены в 2000 раз). Свойства этих точек аналогичны случаю  $\beta = \beta_1^*$ . Если  $\beta'_1 < \beta < \beta_1^*$ , то функционал имеет три стационарные точки (при  $\beta = 70$  два минимума и один максимум на штрихпунктирной линии с темными кружками, ординаты которой увеличены в 5000 раз). Отрезками линии со стрелками отмечен переход из неустойчивой точки, соответствующей максимуму, в одну из устойчивых точек, отвечающей минимуму, причем реализация устойчивого температурного состояния при большем значении  $B_1$  маловероятна.

При  $0,2 < \nu < \nu'$  ординаты экстремумов зависимости  $\beta(B_1)$  возрастают вплоть до объединения экстремумов в упомянутую выше точку перегиба при  $\beta \approx 90,988$ . Этой точке соответствует единственный экстремум (минимум) функционала (пунктирная кривая со светлыми кружками и ординатами, увеличенными в 2000 раз). Таким образом, увеличение параметра  $\nu$ , соответствующее более высокому темпу возрастания с температурой коэффициента теплопроводности материала диэлектрика, приводит к вырождению скачкообразного эффекта теплового пробоя.

Если в целях сравнения в качестве допустимой для функционала (14) принять квадратичную функцию  $\Psi_2(\rho) = B_2(1 - \rho^2)$ , также удовлетворяющую граничным условиям на обеих поверхностях рассматриваемого плоского слоя диэлектрика, то из условия  $\partial J[\Theta] / \partial B_2 = 0$  стационарности этого функционала получим трансцендентное уравнение

$$\frac{4}{3} B_2 - \beta \int_0^1 (1 - \rho^2) \exp\left(-\frac{\mu \nu}{\nu + \ln(1 + \nu B_2(1 - \rho^2))}\right) d\rho = 0. \quad (16)$$

При  $\mu = 6$  из уравнения (16) следует связь между параметром  $\beta$  и коэффициентом  $B_2$ , достаточно близкая к полученной с использованием функции  $\Psi_1(\rho)$  при одинаковых значениях  $\nu$ . Например, при  $\nu = 0$  зависимость  $\beta(B_2)$  имеет максимум с

ординатой  $\beta_2^* \approx 74,549$  и абсциссой  $B_2^* \approx 0,325$ , а при  $\nu = 0,2$  — максимум с ординатой  $\beta_2^* \approx 76,755$  и абсциссой  $B_2^* \approx 0,350$ . Близкими также являются расположение и свойства всех характерных стационарных точек функционала  $J_1$ .

**Сравнительная оценка интегральной погрешности.** Несмотря на малое различие результатов при использовании двух рассмотренных функций, аппроксимирующее действительное распределение безразмерного потенциала теплопроводности в плоском слое диэлектрика, с прикладной точки зрения целесообразно располагать количественной мерой погрешности, соответствующей каждой этой функции [20]. В рассматриваемом слое действительному распределению  $\Psi^*(\rho)$  безразмерного потенциала теплопроводности соответствует безразмерная плотность  $q^*(\rho) = -d\Psi^*(\rho)/d\rho$  теплового потока, удовлетворяющая условию

$$\frac{dq^*(\rho)}{d\rho} = \beta \exp\left(-\frac{\mu\nu}{\nu + \ln(1 + \nu\Psi^*(\rho))}\right),$$

следующему при  $n = 0$  из уравнения (9) с учетом формулы (13). В общем случае приближенное распределение  $\Psi(\rho)$  не удовлетворяет уравнению (9), которое следует из закона сохранения энергии. Этот закон не будет нарушен, если безразмерную плотность  $q(\rho)$  теплового потока, соответствующую функции  $\Psi(\rho)$ , определить по соотношению

$$q(\rho) = \beta \int_0^\rho \exp\left(-\frac{\mu\nu}{\nu + \ln(1 + \nu\Psi(\rho'))}\right) d\rho', \quad (17)$$

получаемому из предыдущего равенства после замены в нем  $\Psi^*(\rho)$  величиной  $\Psi(\rho)$  и учитывающему, что  $q(0) = 0$  на идеально теплоизолированной поверхности плоского слоя при  $\rho = 0$ . Однако в общем случае не будет выполнено равенство  $q(\rho) + d\Psi(\rho)/d\rho = 0$ , следующее из закона теплопроводности Фурье [21]. Поэтому величину

$$\Delta = \int_0^1 \left( q(\rho) + \frac{d\Psi(\rho)}{d\rho} \right)^2 d\rho \quad (18)$$

можно рассматривать как интегральную меру погрешности, вызванной приближенным представлением распределения безразмерного потенциала теплопроводности в плоском слое функцией  $\Psi(\rho)$ , и использовать эту меру при сравнительной оценке близости функций  $\Psi_1(\rho)$  и  $\Psi_2(\rho)$  к функции  $\Psi^*(\rho)$ .

Проведем сравнение зависимостей  $q(\rho)$ ,  $f(\rho) = q(\rho) + d\Psi(\rho)/d\rho$  и значений  $\Delta$ , соответствующих двум выбранным выше в качестве допустимых для функционала (14) аппроксимирующих функций  $\Psi_1(\rho)$  и  $\Psi_2(\rho)$  при полученных выше значениях  $B_1^* \approx 75,579$  и  $B_2^* \approx 76,755$ . Пунктирной линией на рис. 2 показана зависимость функции  $\Psi_1(\rho) = B_1^* \cos(\pi\rho/2)$  от  $\rho$ , а штриховой линией — функции  $\Psi_2(\rho) = B_2^*(1 - \rho^2)$ . Штрихпунктирной линией и сплошной кривой на этом рисунке приведены зависимости  $q_1(\rho)$  и  $q_2(\rho)$ , полученные подстановкой в формулу (17)

тригонометрической и квадратичной аппроксимирующих функций при указанных значениях  $B_1^*$  и  $B_2^*$ . В первом случае в правой части этой формулы использовано значение  $\beta_1^* \approx 75,579$ , а во втором —  $\beta_2^* \approx 76,755$ . Поскольку  $q_2(1) > q_1(1)$ , аппроксимация функцией  $\Psi_2(\rho)$  действительного распределения безразмерного потенциала теплопроводности в плоском слое диэлектрика приводит к несколько большему значению  $\beta_2^*$  по сравнению со значением  $\beta_1^*$ , полученным с использованием функции  $\Psi_1(\rho)$ .

Штрихпунктирной и сплошной линиями с треугольниками показаны зависимости функций  $f_1(\rho)$  и  $f_2(\rho)$ . Если действительное распределение безразмерной температуры в слое диэлектрика аппроксимировать функцией  $\Psi_2(\rho)$ , то при одинаковых значениях  $\rho$  ординаты функции  $f_2(\rho)$  по абсолютному значению более чем на порядок превосходят ординаты функции  $f_1(\rho)$ . Ясно, что в этом случае целесообразно отдать предпочтение аппроксимирующей функции  $\Psi_1(\rho)$  и из двух приведенных выше значений  $\beta_1^*$  и  $\beta_2^*$  принять первое более близким к истинному значению  $\beta^*$ . Результаты вычисления по формуле (18) дают значения  $\Delta_1 \approx 4,298 \cdot 10^{-5}$  и  $\Delta_2 \approx 1,504 \cdot 10^{-3}$ , что также подтверждает сделанный вывод.

**Заключение.** Анализ стационарных точек функционала, входящего в вариационную форму математической модели теплового пробоя диэлектрика при переменном напряжении, позволил установить связь между значением безразмерного параметра  $\beta$ , включающего напряжение пробоя, и характеристиками слоя диэлектрика, теплопроводность материала которого зависит от температуры. Из проведенного сравнения оценок интегральной погрешности для двух вариантов функций (квадратичной и тригонометрической), аппроксимирующих действительное распределение безразмерного потенциала теплопроводности в слое диэлектрика, следует, что более близким к истинному экстремальному значению  $\beta$  будет значение, полученное с использованием тригонометрической функции.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Сканава Г.И. Физика диэлектриков (область сильных полей). М.: Физматгиз, 1958. 908 с.
2. Борисова М.Э., Койков С.Н. Физика диэлектриков. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1979. 240 с.
3. Воробьев Г.А., Похолков Ю.П., Королев Ю.Д., Меркулов В.И. Физика диэлектриков (область сильных полей). Томск: Изд-во ТПУ, 2003. 244 с.
4. Пробой диэлектриков // websor.ru: веб-сайт.  
URL: [https://www.websor.ru/proboi\\_dielektrico.html](https://www.websor.ru/proboi_dielektrico.html) (дата обращения: 20.11.2016).

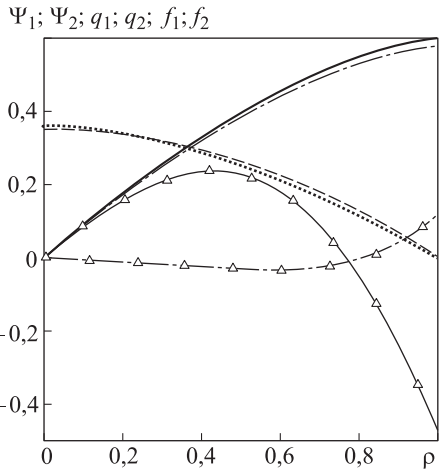


Рис. 2. Зависимости функций  $\Psi$ ,  $q$  и  $f$  от параметра  $\rho$

5. *Тареев Б.М.* Физика диэлектрических материалов. М.: Энергоатомиздат, 1982. 320 с.
6. *Сажин Б.И., ред.* Электрические свойства полимеров. Л.: Химия, 1986. 224 с.
7. *Физика композиционных материалов.* В 2-х т. Т. 2. / Н.Н. Трофимов, М.З. Канович, Э.М. Карташов, В.И. Натрусев, А.Т. Пономаренко, В.Г. Шевченко, В.И. Соколов, И.Д. Симонов-Емельянов. М.: Мир, 2005. 344 с.
8. *Глаголев К.В., Морозов А.Н.* Физическая термодинамика. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. 272 с.
9. *Зарубин В.С.* Моделирование. М.: Издательский центр «Академия», 2013. 336 с.
10. *Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н.* Особенности математического моделирования технических устройств // Математическое моделирование и численные методы. 2014. № 1. С. 5–17. DOI: 10.18698/2309-3684-2014-1-517
11. *Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987. 480 с.
12. *Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н.* Математическое моделирование термомеханических процессов при интенсивном тепловом воздействии // Теплофизика высоких температур. 2003. Т. 41. № 2. С. 300–309.
13. *Ванько В.И., Ермошина О.В., Кувыркин Г.Н.* Вариационное исчисление и оптимальное управление. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. 488 с.
14. *Зарубин В.С.* Инженерные методы решения задач теплопроводности. М.: Энергоатомиздат, 1983. 328 с.
15. *Зарубин В.С., Иванова Е.Е., Кувыркин Г.Н.* Интегральное исчисление функций одного переменного. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. 528 с.
16. *Зарубин В.С., Селиванов В.В.* Вариационные и численные методы механики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1993. 360 с.
17. *Зарубин В.С., Станкевич И.В.* Расчет теплонапряженных конструкций. М.: Машиностроение, 2005. 352 с.
18. *Аттетков А.В., Зарубин В.С., Канатников А.Н.* Введение в методы оптимизации. М.: НИЦ ИНФРА-М, 2008. 272 с.
19. *Аттетков А.В., Зарубин В.С., Канатников А.Н.* Методы оптимизации. М.: ИЦ РИОР, 2012. 270 с.
20. *Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю.* Вариационный вариант модели теплового пробоя слоя твердого диэлектрика при постоянном напряжении // Радиооптика. МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2016. № 5. С. 38–50. DOI: 10.7463/rdopt.0516.0848088 URL: <http://radiooptics.ru/doc/848088.html>
21. *Карташов Э.М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 2001. 550 с.

**Зарубин Владимир Степанович** — д-р техн. наук, профессор кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

**Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Зарубин В.С. Вариационная форма модели теплового пробоя твердого диэлектрика с зависящей от температуры теплопроводностью // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2017. № 5. С. 4–18. DOI: 10.18698/1812-3368-2017-5-4-18

## VARIATIONAL NOTATION OF A THERMAL BREAKDOWN MODEL FOR A SOLID DIELECTRIC WITH TEMPERATURE-DEPENDENT THERMAL CONDUCTIVITY

V.S. Zarubin

fn2@bmstu.ru

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

---

### Abstract

We constructed a differential notation of a mathematical model describing a steady-state heat energy transfer process in a planar or circular cylindrical dielectric layer for the case of alternating voltage. Thermal conductivity of a dielectric material depends on temperature. Using a variational formulation of the non-linear steady-state thermal conductivity problem, we transform this model into variational notation containing a functional defined on a set of acceptable distributions of the thermal conductivity potential in the dielectric layer. Investigating stationary points on this functional makes it possible to find the combination of the parameters determining whether a thermal breakdown occurs in the dielectric. The paper presents an example of stationary point analysis and an estimation of the cumulative error allowing the approximation function to be selected so as to lie as close as possible to the limit thermal conductivity potential distribution prior to the thermal breakdown in the dielectric

### Keywords

*Dielectric, thermal breakdown, mathematical model, functional, thermal conductivity potential*

Received 28.11.2016

© BMSTU, 2017

---

### REFERENCES

- [1] Skanavi G.I. Fizika dielektrikov (oblast' sil'nykh poley) [Dielectric physics (high field region)]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1958. 908 p.
- [2] Borisova M.E., Koykov S.N. Fizika dielektrikov [Dielectric physics]. Leningrad, Izd-vo Leningradskogo universiteta Publ., 1979. 240 p.
- [3] Vorob'yev G.A., Pokholkov Yu.P., Korolev Yu.D., Merkulov V.I. Fizika dielektrikov (oblast' sil'nykh poley) [Dielectric physics (high field region)]. Tomsk, TPU Publ., 2003. 244 p.
- [4] Proboi dielektrikov [Dielectric breakdown]. Websor.ru: website. Available at: <http://www.websor.ru/proboi-dielektrikov> (accessed: 20.11.2016).
- [5] Tareev B.M. Fizika dielektricheskikh materialov [Dielectric physics]. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1982. 320 p.
- [6] Sazhin B.I., ed. Elektricheskie svoystva polimerov [Polymer electrical properties]. Leningrad, Khimiya Publ., 1986. 224 p.
- [7] Trofimov N.N., Kanovich M.Z., Kartashov E.M., Natrusov V.I., Ponomarenko A.T., Shevchenko V.G., Sokolov V.I., Simonov-Emel'yanov I.D. Fizika kompozitsionnykh materialov. V 2-kh t. T. 2 [Composite physics. In 2 vols. Vol. 2]. Moscow, Mir Publ., 2005. 344 p.
- [8] Glagolev K.V., Morozov A.N. Fizicheskaya termodinamika [Physical thermodynamics]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2007. 272 p.
- [9] Zarubin V.S. Modelirovanie [Simulation]. Moscow, Akademiya Publ. Center, 2013. 336 p.

- [10] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Special features of mathematical modeling of technical instruments. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody* [Mathematical Modeling and Computational Methods], 2014, no. 1, pp. 5–17 (in Russ.).  
DOI: 10.18698/2309-3684-2014-1-517
- [11] Samarskiy A.A., Galaktionov V.A., Kurdyumov S.P., Mikhaylov A.P. Rezhimy s obostreniem v zadachakh dlya kvazilineynykh parabolicheskikh uravneniy [Blow-up regimes in problems for quasilinear parabolic equations]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 480 p.
- [12] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Mathematical modeling of thermomechanical processes under intense thermal effect. *High Temperature*, 2003, vol. 41, iss. 2, pp. 257–265.  
DOI: 10.1023/A:1023390021091
- [13] Van'ko V.I., Ermoshina O.V., Kuvyrkin G.N. Variatsionnoe ischislenie i optimal'noe upravlenie [Variational calculus and optimal control]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2001. 488 p.
- [14] Zarubin V.S. Inzhenernye metody resheniya zadach teploprovodnosti [Engineering methods for solving thermal conductivity problems]. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1983. 328 p.
- [15] Zarubin V.S., Ivanova E.E., Kuvyrkin G.N. Integral'noe ischislenie funktsiy odnogo perrmennogo [Integral calculus of one-variable function]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2006. 528 p.
- [16] Zarubin V.S., Selivanov V.V. Variatsionnye i chislennye metody mekhaniki sploshnoy sredy [Variational and numerical methods of solid state mechanics]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 1993. 360 p.
- [17] Zarubin V.S., Stankevich I.V. Raschet teplonapryazhennykh konstruksiy [Heat-stressed construction calculation]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 2005. 352 p.
- [18] Attetkov A.V., Zarubin V.S., Kanatnikov A.N. Vvedenie v metody optimizatsii [Introduction to optimization methods]. Moscow, NITs INFRA-M Publ., 2008. 272 p.
- [19] Attetkov A.V., Zarubin V.S., Kanatnikov A.N. Metody optimizatsii [Optimization methods]. Moscow, ITs RIOR Publ., 2012. 270 p.
- [20] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'yeva I.Yu. A variation model option for the heat breakdown of solid dielectric layer under constant voltage. *Radiooptika* [Radiooptics], 2016, no. 5, pp. 38–50 (in Russ.). DOI: 10.7463/rdopt.0516.0848088  
Available at: <http://radiooptics.ru/en/doc/848088.html>
- [21] Kartashov E.M. Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tverdykh tel [Analytical methods in solids thermal conductivity theory]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2001. 550 p.

**Zarubin V.S.** — Dr. Sc. (Eng.), Professor of Applied Mathematics Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Please cite this article in English as:**

Zarubin V.S. Variational Notation of a Thermal Breakdown Model for a Solid Dielectric with Temperature-Dependent Thermal Conductivity. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Bauman, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2017, no. 5, pp. 4–18. DOI: 10.18698/1812-3368-2017-5-4-18