УДК 536.75 DOI: 10.18698/1812-3368-2017-5-57-66

МЕТОД ОПИСАНИЯ НЕМАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ, ЗАДАВАЕМЫХ СИСТЕМОЙ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А.Н. Морозов amor@bmstu.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Предложен метод нахождения характеристических функций немарковского случайного процесса при его описании системой линейных интегральных уравнений. Показано, что в этом случае решение задачи может быть найдено с помощью ранее разработанного метода нахождения характеристических функций процесса, описываемого одним линейным интегральным уравнением. Разработанный метод применен для описания броуновского движения в равновесной и неравновесной средах. Рассчитана спектральная плотность флуктуаций импульса броуновской частицы в неравновесной среде и установлено, что в низкочастотной части спектра она представляет собой фликкер-шум. Показано, что спектральная плотность флуктуаций импульса броуновской частицы в неравновесной среде линейно зависит от производства энтропии

Ключевые слова

Броуновское движение, характеристическая функция, немарковский процесс, неравновесное состояние, производство энтропии, фликкер-шум

Поступила в редакцию 30.01.2017

Описание броуновского движения в неравновесных средах может быть выполнено с помощью уравнения Ланжевена [1], в котором внешние случайные воздействия частиц среды на броуновскую частицу описываются случайным процессом, отличающимся от белого шума [2, 3]. В этом случае становится невозможным использование метода стохастических дифференциальных уравнений для нахождения характеристических функций (функций распределения) флуктуаций импульса броуновской частицы [4, 5]. Это связано с тем, что броуновское движение становится немарковским случайным процессом [6, 7].

Метод нахождения характеристических функций немарковского случайного процесса $Z(t)$, описывающегося с помощью линейного интегрального преобразования, предложен и обоснован в работах [5, 8]:

$$Z(t)=\int_0^t G(t,\tau)\,dW(\tau), \tag{1}$$

где $G(t,\tau)$ — непрерывная функция переменной τ; $W(\tau)$ — процесс с независимыми приращениями. Полагается, что интеграл (1) представляет собой интеграл Ито [4, 9].

Одномерная характеристическая функция $g_1(\lambda;\, t)$ процесса $Z(t)$ имеет вид [5, 8]

$$g_1(\lambda;\, t) = \exp\left[\int_0^t \chi\left(\lambda G(t,\tau);\ \tau\right) d\tau\right]. \tag{2}$$

Здесь

$$\chi\left(\lambda G(t,\tau);\ \tau\right) = \frac{\partial}{\partial\tau} \ln h_1\left(\lambda G(t,\tau);\ \tau\right); \tag{3}$$

$$h_1\left(\lambda G(t,\tau);\tau\right) = \left\langle \exp\left(i\lambda G(t,\tau) W(\tau)\right)\right\rangle. \tag{4}$$

Если процесс $W(t)$ является винеровским с интенсивностью $\nu_{\text{В}}(t)$ и описывается одномерной характеристической функцией

$$h_1(\lambda;t) = \exp\left(-\frac{1}{2}\nu_{\text{В}}(t)\lambda^2 t\right), \tag{5}$$

то выражение для одномерной характеристической функции $g_1(\lambda;t)$ процесса $Z(t)$ принимает форму

$$g_1(\lambda;t) = \exp\left[-\frac{1}{2}\lambda^2 \int_0^t G^2(t,\tau)\,\nu_{\text{В}}(\tau)\, d\tau\right]. \tag{6}$$

Если процесс $W(t)$ — пуассоновский с интенсивностью $\nu_{\Pi}(t)$ и описывается одномерной характеристической функцией

$$h_1(\lambda;t) = \exp\left(\nu_{\Pi}(t)\left(g(\lambda)-1\right)t\right), \tag{7}$$

где $g(\lambda)$ — характеристическая функция скачков пуассоновского процесса, то выражение для одномерной характеристической функции $g_1(\lambda;t)$ процесса $Z(t)$ принимает вид

$$g_1(\lambda;t) = \exp\left[\int_0^t \left(g\left(\lambda G(t,\tau)\right)-1\right)\nu_{\Pi}(\tau)\, d\tau\right]. \tag{8}$$

В более общем случае для нахождения L-мерной характеристической функции $g_L(\lambda_1,\ldots,\, \lambda_L;\, t_1,\ldots,t_L)$ процесса $Z(t)$ необходимо использовать выражение [5, 8]

$$g_L(\lambda_1,\ldots,\lambda_L;\, t_1,\ldots,t_L) = \exp\left[\sum_{l=1}^{L}\int_{t_{l-1}}^{t_l} \chi\left(\left(\sum_{k=l}^{L}\lambda_k G(t_k,\tau)\right);\ \tau\right) d\tau\right]. \tag{9}$$

Здесь

$$\chi\left(\left(\sum_{k=l}^{L}\lambda_k G(t_k,\tau)\right);\ \tau\right) = \frac{\partial}{\partial\tau}\ln h_1\left(\left(\sum_{k=l}^{L}\lambda_k G(t_k,\tau)\right);\ \tau\right); \tag{10}$$

$$h_1\left(\left(\sum_{k=l}^{L}\lambda_k G\left(t_k,\tau\right)\right);\tau\right)=\left\langle \exp\left(i\left(\sum_{k=l}^{L}\lambda_k G\left(t_k,\tau\right)\right)W\left(\tau\right)\right)\right\rangle. \qquad (11)$$

При нахождении интеграла в выражении (9) необходимо учитывать условие

$$G\left(t_k,\tau\right)\Big|_{\tau>t_k}=0. \qquad (12)$$

Формулы (2)–(4) являются частными случаями выражений (9)–(11) при $L=1$.

Если процесс $W(t)$ является винеровским, то

$$g_L\left(\lambda_1,\ldots,\lambda_L;\, t_1,\ldots,t_L\right)=\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{l,k=1}^{L}\lambda_l\lambda_k\int\limits_0^{\min\left(t_l,t_k\right)} G\left(t_l,\tau\right)G\left(t_k,\tau\right)\nu_{\text{В}}\left(\tau\right)d\tau\right], \qquad (13)$$

а если — пуассоновским, то

$$g_L\left(\lambda_1,\ldots,\lambda_L;\, t_1,\ldots,t_L\right)=\exp\left[\sum_{l=1}^{L}\int\limits_{t_{l-1}}^{t_l}\left(g\left(\sum_{k=l}^{L}\lambda_k G\left(t_k,\tau\right)\right)-1\right)\nu_{\Pi}\left(\tau\right)d\tau\right]. \qquad (14)$$

Проведем разработку метода нахождения характеристических функций немарковского случайного процесса $Z(t)$ в случае, если для его описания требуется использование системы линейных интегральных уравнений:

$$Z\left(t\right)=\int\limits_0^t G_1\left(t,\xi\right)X\left(\xi\right)d\xi; \qquad (15)$$

$$X\left(\xi\right)=\int\limits_0^{\xi} G_2\left(\xi,\tau\right)dW\left(\tau\right), \qquad (16)$$

где $G_1(t,\xi)$, $G_2(\xi,\tau)$ — непрерывные функции переменных ξ и τ. Здесь так же, как и для интеграла (1), полагается, что интегралы (15) и (16) представляют собой интегралы Ито.

К системе линейных интегральных уравнений (15), (16) может быть сведена задача описания броуновского движения при воздействии на частицу случайного процесса, не являющегося процессом с независимыми приращениями. В этом случае броуновское движение описывается уравнением следующего вида:

$$\frac{dZ\left(t\right)}{dt}+\gamma Z\left(t\right)=X\left(t\right). \qquad (17)$$

Здесь γ — коэффициент вязкого трения; $X(t)$ — случайный процесс, который может быть получен из процесса с независимыми приращениями $W(t)$ с помощью интегрального уравнения (16). Если решение уравнения (17) представить в интегральной форме (15) с ядром

$$G_1\left(t,\xi\right)=\exp\left(-\gamma\left(t-\xi\right)\right), \qquad (18)$$

то рассматриваемая задача описания броуновского движения сведется к решению системы линейных интегральных уравнений (15), (16).

Для нахождения характеристических функций процесса $Z(t)$ проведем следующее преобразование системы линейных интегральных уравнений (15), (16):

$$Z(t)=\int_0^t G_1(t,\xi)\left(\int_0^\xi G_2(\xi,\tau)\,dW(\tau)\right)d\xi=$$
$$=\int_0^t\left(\int_0^t 1(\xi-\tau)G_1(t,\xi)G_2(\xi,\tau)\,dW(\tau)\right)d\xi=$$
$$=\int_0^t\left(\int_\tau^t G_1(t,\xi)G_2(\xi,\tau)\,d\xi\right)dW(\tau),$$

где $1(\xi-\tau)$ — единичная функция.

Следовательно, систему уравнений (15), (16) можно свести к линейному интегральному уравнению (1), в которое необходимо подставлять ядро преобразования $G(t,\tau)$ в виде

$$G(t,\tau)=\int_\tau^t G_1(t,\xi)G_2(\xi,\tau)\,d\xi.$$

Таким образом, при нахождении характеристических функций процесса $Z(t)$, описываемого системой линейных интегральных уравнений (15), (16), могут быть использованы выражения (2)–(4) (для частных случаев винеровского и пуассоновского процессов — (6) и (8)) и (9)–(11) (для частных случаев указанных процессов — (13) и (14)).

Предложенный метод позволяет рассчитать характеристические функции процесса $Z(t)$, описываемого системой линейных интегральных уравнений, состоящей из любого количества таких уравнений. Например, в случае системы из трех линейных интегральных уравнений

$$Z(t)=\int_0^t G_1(t,\xi)X(\xi)\,d\xi;$$

$$X(\xi)=\int_0^\xi G_2(\xi,\vartheta)Y(\vartheta)\,d\vartheta;$$

$$Y(\vartheta)=\int_0^\vartheta G_3(\vartheta,\tau)\,dW(\tau),$$

где $G_1(t,\xi)$, $G_2(\xi,\vartheta)$, $G_3(\vartheta,\tau)$ — непрерывные функции переменных ξ, ϑ и τ; она сводится к линейному интегральному уравнению (1), ядро преобразования $G(t,\tau)$ которого имеет вид

$$G(t,\tau)=\int_\tau^t G_1(t,\xi)\left(\int_\tau^\xi G_2(\xi,\vartheta)G_3(\vartheta,\tau)\,d\vartheta\right)d\xi.$$

Аналогично можно найти ядро преобразования $G(t,\tau)$ для системы из N линейных интегральных уравнений.

Рассмотрим применение полученных выражений для нахождения характеристических функций флуктуаций импульса броуновской частицы в равновесной и неравновесной средах.

1. Пусть $Z(t)$ описывает импульс броуновской частицы в равновесной среде при воздействии на нее случайного δ-коррелированного процесса. Тогда его интенсивность ν_{B} можно представить как [5]

$$\nu_{\text{B}} = 2\gamma mkT, \tag{19}$$

где m — масса броуновской частицы; k — постоянная Больцмана; T — температура среды, а ядра преобразований $G_1(t,\xi)$ и $G_2(\xi,\tau)$ имеют соответственно вид (18) и

$$G_2(\xi,\tau) = \delta(\xi-\tau).$$

В этом случае формула для $G(t,\tau)$ принимает вид

$$G(t,\tau) = \int_{\tau}^{t} \exp(-\gamma(t-\xi))\delta(\xi-\tau)d\xi = \exp(-\gamma(t-\tau)). \tag{20}$$

Подстановка выражений (19) и (20) в формулу (13) дает формулу для L-мерной характеристической функции $g_L(\lambda_1,\ldots,\lambda_L;\ t_1,\ldots,t_L)$ процесса $Z(t)$ при воздействии на броуновскую частицу винеровского процесса

$$g_L(\lambda_1,\ldots,\lambda_L;\ t_1,\ldots,t_L) =$$

$$= \exp\left[-\frac{mkT}{2}\sum_{l,k=1}^{L}\left(\lambda_l\lambda_k\left(\exp(-\gamma|t_l-t_k|)-\exp(-\gamma(t_l+t_k))\right)\right)\right]. \tag{21}$$

Аналогичное выражение при воздействии пуассоновского процесса (см. (14)) имеет вид

$$g_L(\lambda_1,\ldots,\lambda_L;\ t_1,\ldots,t_L) =$$

$$= \exp\left[2\gamma mkT\sum_{l=1}^{L}\int_{t_{l-1}}^{t_l}\left(g\left(\sum_{k=l}^{L}\lambda_k \exp(-\gamma(t_k-\tau))\right)-1\right)d\tau\right]. \tag{22}$$

При $L=1$ получаем выражения для одномерных характеристических функций в случае воздействия винеровского и пуассоновского процессов:

$$g_1(\lambda;t) = \exp\left[-\frac{mkT}{2}\lambda^2\left(1-\exp(-2\gamma t)\right)\right]; \tag{23}$$

$$g_1(\lambda;t) = \exp\left[2\gamma mkT\int_{0}^{t}\left(g\left(\lambda\exp(-\gamma(t-\tau))\right)-1\right)d\tau\right]. \tag{24}$$

Выражения (21)–(24) совпадают с формулами, полученными для случая броуновского движения в равновесной среде в работах [5, 8].

2. Рассмотрим описание броуновского движения в случае, когда броуновская частица находится в неравновесной среде, воздействие которой на нее имеет интенсивность

$$\nu = 2\gamma m \sigma_S T, \tag{25}$$

где σ_S — производство энтропии при движении броуновской частицы в неравновесной среде, а ядро преобразования $G_2(\xi, \tau)$ можно представить в виде

$$G_2(\xi, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\gamma(\xi - \tau)}}.$$

Тогда выражение для $G(t, \tau)$ принимает форму [10]

$$G(t, \tau) = \int_{\tau}^{t} \frac{\exp(-\gamma(t - \xi))}{\sqrt{\gamma(\xi - \tau)}} d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{\gamma} \exp(-\gamma(t - \tau)) \operatorname{erfi}\left(\sqrt{\gamma(t - \tau)}\right), \tag{26}$$

где $\operatorname{erfi}(x) = -i \operatorname{erf}(ix)$.

Если подставить выражения (25) и (26) в формулу (13), то для L-мерной характеристической функции $g_L(\lambda_1, ..., \lambda_L; t_1, ..., t_L)$ процесса $Z(t)$ при воздействии на броуновскую частицу винеровского процесса имеем

$$g_L(\lambda_1, ..., \lambda_L; t_1, ..., t_L) = \exp\left[-\frac{\pi m \sigma_S T}{\gamma} \sum_{l,k=1}^{L} \lambda_l \lambda_k \int_{0}^{\min(t_l, t_k)} \exp(-\gamma(t_l + t_k - 2\tau)) \times \right.$$

$$\left. \times \operatorname{erfi}\left(\sqrt{\gamma(t_l - \tau)}\right) \operatorname{erfi}\left(\sqrt{\gamma(t_k - \tau)}\right) d\tau \right]. \tag{27}$$

Аналогично при подстановке выражений (25) и (26) в формулу (14), описывающую воздействие пуассоновского процесса, получим

$$g_L(\lambda_1, ..., \lambda_L; t_1, ..., t_L) =$$

$$= \exp\left[2\gamma m \sigma_S T \sum_{l=1}^{L} \int_{t_{l-1}}^{t_l} \left(g\left(\frac{\sqrt{\pi}}{\gamma} \sum_{k=l}^{L} \lambda_k \exp(-\gamma(t_k - \tau)) \operatorname{erfi}\left(\sqrt{\gamma(t_k - \tau)}\right) \right) - 1 \right) d\tau \right]. \tag{28}$$

При $L = 1$ выражения (27) и (28) переходят в формулы для одномерных характеристических функций винеровского и пуассоновского процессов:

$$g_1(\lambda; t) = \exp\left[-\frac{\pi m \sigma_S T}{\gamma} \lambda^2 \int_{0}^{t} \exp(-2\gamma(t - \tau)) \operatorname{erfi}^2\left(\sqrt{\gamma(t - \tau)}\right) d\tau \right];$$

$$g_1(\lambda; t) = \exp\left[2\gamma m \sigma_S T \int_{0}^{t} \left(g\left(\frac{\sqrt{\pi}}{\gamma} \lambda \exp(-\gamma(t - \tau)) \operatorname{erfi}\left(\sqrt{\gamma(t - \tau)}\right) \right) - 1 \right) d\tau \right].$$

Определим математическое ожидание $\langle Z(t)\rangle$, дисперсию $\langle Z^2(t)\rangle$ и корреляционную функцию $\langle Z(t_2)Z(t_1)\rangle$ процесса $Z(t)$ при воздействии винеровского процесса:

$$\langle Z(t)\rangle = \frac{\partial g_1(\lambda;t)}{i\partial\lambda} = 0;$$

$$\langle Z^2(t)\rangle = -\left.\frac{\partial^2 g_1(\lambda;t)}{\partial\lambda^2}\right|_{\lambda=0} = \frac{2\pi m\sigma_S T}{\gamma}\int_0^t \exp(-2\gamma(t-\tau))\,\mathrm{erfi}^2\left(\sqrt{\gamma(t-\tau)}\right)d\tau;$$

$$\langle Z(t_2)Z(t_1)\rangle = \left.\frac{\partial^2 g_2(\lambda_1,\lambda_2;t_1,t_2)}{i\partial\lambda_1 i\partial\lambda_2}\right|_{\substack{\lambda_1=0\\ \lambda_2=0}} = \tag{29}$$

$$= \frac{2\pi m\sigma_S T}{\gamma}\int_0^{t_1} \exp(-\gamma(t_1-\tau))\,\mathrm{erfi}\left(\sqrt{\gamma(t_1-\tau)}\right)\exp(-\gamma(t_2-\tau))\,\mathrm{erfi}\left(\sqrt{\gamma(t_2-\tau)}\right)d\tau.$$

Формула (29) для корреляционной функции процесса $Z(t)$ позволяет найти одностороннюю спектральную плотность $G_Z(\omega)$ флуктуаций этой величины [11]:

$$G_Z(\omega) = 4\int_0^\infty \langle Z(t+\xi)Z(t)\rangle\big|_{t\to\infty}\cos(\omega\xi)\,d\xi =$$

$$= \frac{8\pi m\sigma_S T}{\gamma}\int_0^\infty\left(\int_0^t \exp(-\gamma(t-\tau))\,\mathrm{erfi}\left(\sqrt{\gamma(t-\tau)}\right)\exp(-\gamma(t-\tau+\xi))\times\right.$$

$$\left.\left.\times\,\mathrm{erfi}\left(\sqrt{\gamma(t-\tau+\xi)}\right)d\tau\right)\right|_{t\to\infty}\cos(\omega\xi)\,d\xi. \tag{30}$$

Рассмотрим нахождение односторонней спектральной плотности $G_Z(\omega)$ для высокочастотного случая при $\omega \gg \gamma$. Для этого случая в первом приближении можно использовать следующую формулу [12]:

$$\mathrm{erfi}(\chi)\big|_{\chi\ll 1} \cong \frac{2}{\sqrt{\pi}}\chi. \tag{31}$$

Подстановка выражения (31) в формулу (30) дает

$$G_Z(\omega) =$$

$$= 32\gamma m\sigma_S T\int_0^\infty\left.\left(\exp(-\gamma\xi)\int_0^t \exp(-2\gamma(t-\tau))\sqrt{(t-\tau)(t-\tau+\xi)}\,d\tau\right)\right|_{t\to\infty}\cos(\omega\xi)\,d\xi. \tag{32}$$

Вычисление интегралов в выражении (32) позволяет найти спектральную плотность [10]:

$$G_Z(\omega) = \frac{4\pi m\sigma_S T}{\omega^3}.$$

Следовательно, в высокочастотной части спектра спектральная плотность флуктуаций импульса броуновской частицы обратно пропорциональна третьей степени частоты.

Рассмотрим случай $\omega \ll \gamma$, для которого можно использовать следующее первое приближение [12]:

$$\operatorname{erfi}(\chi)\big|_{\chi\gg 1} \cong \frac{\exp(\chi^2)}{\sqrt{\pi}\chi}. \tag{33}$$

После подстановки выражения (33) в формулу (30) имеем

$$G_Z(\omega) = \frac{8\pi m\sigma_S T}{\gamma^2}\int_0^\infty \left(\int_0^t \frac{1}{\sqrt{(t-\tau)(t-\tau+\xi)}}\,d\tau\right)\Bigg|_{t\to\infty} \cos(\omega\xi)\,d\xi. \tag{34}$$

Вычисление интегралов в формуле (34) позволяет получить [10]

$$G_Z(\omega) = \frac{4\pi m\sigma_S T}{\gamma^2\omega}. \tag{35}$$

Из формулы (35) следует, что при движении броуновской частицы в неравновесной среде в низкочастотной части спектра спектральная плотность флуктуаций импульса броуновской частицы описывается фликкер-шумом [13, 14].

Заключение. Предложенный метод нахождения характеристических функций немарковского процесса, описываемого системой линейных интегральных уравнений, позволил рассчитать статистические характеристики броуновского движения в неравновесной среде. Спектральная плотность флуктуаций импульса броуновской частицы в такой среде линейно зависит от производства энтропии.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гардинер К.В.* Стохастические методы в естественных науках. М.: Мир, 1986. 528 с.

2. *Брауэрс Й.Й.Х.* Уравнение Ланжевена для частицы жидкости в потоке с вызванной наличием стенок турбулентностью // Теоретическая и математическая физика. 2010. Т. 163. № 2. С. 328–352.

3. *Marchesoni F., Taloni A.* Subdiffusion and long-time anticorrelations in a stochastic single file // Physical Review Letters. 2006. Vol. 97. Iss. 10. P. 106101-1–106101-4.
DOI: 10.1103/PhysRevLett.97.106101

4. *Пугачев В.С., Синицын И.Н.* Стохастические дифференциальные системы. М.: Наука, 1990. 632 с.

5. *Бункин Н.Ф., Морозов А.Н.* Стохастические системы в физике и технике. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 366 с.

6. *Морозов А.Н.* Применение теории немарковских процессов при описании броуновского движения // ЖЭТФ. 1996. Т. 109. № 4. С. 1304–1315.

7. *Морозов А.Н., Скрипкин А.В.* Применение интегральных преобразований для описания броуновского движения как немарковского случайного процесса // Известия вузов. Физика. 2009. № 2. С. 66–74.

8. *Морозов А.Н.* Метод описания немарковских процессов, задаваемых линейным интегральным преобразованием // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2004. № 3. С. 47–56.

9. *Хорстхемке В., Лефевр Р.* Индуцированные шумом переходы. М.: Мир, 1987. 400 с.

10. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Т. 1. Элементарные функции. М.: Наука, 2003. 632 с.

11. *Морозов А.Н.* Необратимые процессы и броуновское движение. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. 332 с.

12. *Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф.* Специальные функции. М.: Наука, 1977. 344 с.

13. *Бочков Г.Н., Кузовлев Ю.Е.* Новое в исследованиях 1/*f*-шума // Успехи физических наук. 1983. Т. 141. № 1. С. 151–176. DOI: 10.3367/UFNr.0141.198309d.0151

14. *Кузовлев Ю.Е.* Почему природе нужен 1/*f*-шум // Успехи физических наук. 2015. Т. 185. № 7. С. 773–783. DOI: 10.3367/UFNr.0185.201507d.0773

Морозов Андрей Николаевич — д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой «Физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Морозов А.Н. Метод описания немарковских процессов, задаваемых системой линейных интегральных уравнений // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2017. № 5. С. 57–66. DOI: 10.18698/1812-3368-2017-5-57-66

METHOD FOR DESCRIBING NON-MARKOVIAN PROCESSES DEFINED BY A SYSTEM OF LINEAR INTEGRAL EQUATIONS

A.N. Morozov amor@bmstu.ru

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

We suggest a method for determining characteristic functions of a non-markovian stochastic process when a system of linear integral equations describes it. We show that in this case it is possible to find the solution to this problem using a previously developed method for determining characteristic functions of a process described by a single linear integral equation. We employed the method we developed to describe Brownian motion in equilibrium and non-equilibrium media. We computed spectral density of impulse fluctuations for a Brownian particle in a non-equilibrium medium and determined that in the low-frequency region it is represented by flicker noise. We show that the spectral density of impulse fluctuations for a Brownian particle in a non-equilibrium medium is a linear function of entropy generation

Keywords

Brownian motion, characteristic function, non-markovian process, non-equilibrium state, entropy generation, flicker noise

Received 30.01.2017

REFERENCES

[1] Crispin W.G. Handbook of stochastic methods for physics, chemistry, and the natural sciences. Springer-Verlag, 1985. 442 p.

[2] Brauers Y.Y.Kh. Langevin equation of a fluid particle in wall-induced turbulence. *Theoretical and Mathematical Physics*, 2010, vol. 163, iss. 2, pp. 677–695. DOI: 10.1007/s11232-010-0050-2

[3] Marchesoni F., Taloni A. Subdiffusion and long-time anticorrelations in a stochastic single file. *Physical Review Letters*, 2006, vol. 97, iss. 10, pp. 106101-1–106101-4. DOI: 10.1103/PhysRevLett.97.106101

[4] Pugachev V.S., Sinitsyn I.N. Stokhasticheskie differentsial'nye sistemy [Stochastic differential systems]. Moscow, Nauka Publ., 1990. 632 p.

[5] Bunkin N.F., Morozov A.N. Stokhasticheskie sistemy v fizike i tekhnike [Stochastic systems in physics and technique]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2011. 366 p.

[6] Morozov A.N. Use of the theory of non-Markovian processes in the description of Brownian motion. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1996, vol. 82, no. 4, pp. 703–708.

[7] Morozov A.N., Skripkin A.V. Application of integral transforms to a description of the Brownian motion by a non-Markovian random process. *Russian Physics Journal*, 2009, vol. 52, no. 2, pp. 184–195. DOI: 10.1007/s11182-009-9217-4

[8] Morozov A.N. Method of describing non-Markovian processes defined by linear integral transformation. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2004, no. 3, pp. 47–56 (in Russ.).

[9] Horsthemke W., Lefever R. Noise-induced transitions. Springer, 1984. 322 p.

[10] Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. Integraly i ryady. T. 1. Elementarnye funktsii [Integrals and raws. Vol. 1. Elementary functions]. Moscow, Nauka Publ., 2003. 632 p.

[11] Morozov A.N. Neobratimye protsessy i brounovskoe dvizhenie [Irreversible processes and Brownian motion]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 1997. 332 p.

[12] Jahnke E., Emde F., Lösch F. Tafeln höherer funktionen. Stuttgart, Teubner Verlagsgesellschaft. Preis, 1960. 318 p.

[13] Bochkov G.N., Kuzovlev Yu.E. New aspects in 1/*f* noise studies. *Sov. Phys. Usp.,* 1983, vol. 26, pp. 829–844. DOI: 10.1070/PU1983v026n09ABEH004497

[14] Kuzovlev Yu.E. Why nature needs 1/*f* noise. *Phys. Usp.*, 2015, vol. 58, no. 7, pp. 719–729. DOI: 10.3367/UFNe.0185.201507d.0773

Morozov A.N. — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Head of Physics Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Morozov A.N. Method for Describing Non-Markovian Processes Defined by a System of Linear Integral Equations. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2017, no. 5, pp. 57–66.
DOI: 10.18698/1812-3368-2017-5-57-66