

МЕТОД ОПИСАНИЯ НЕМАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ, ЗАДАВАЕМЫХ СИСТЕМОЙ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А.Н. Морозов

amor@bmstu.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Предложен метод нахождения характеристических функций немарковского случайного процесса при его описании системой линейных интегральных уравнений. Показано, что в этом случае решение задачи может быть найдено с помощью ранее разработанного метода нахождения характеристических функций процесса, описываемого одним линейным интегральным уравнением. Разработанный метод применен для описания броуновского движения в равновесной и неравновесной средах. Рассчитана спектральная плотность флуктуаций импульса броуновской частицы в неравновесной среде и установлено, что в низкочастотной части спектра она представляет собой фликкер-шум. Показано, что спектральная плотность флуктуаций импульса броуновской частицы в неравновесной среде линейно зависит от производства энтропии

Ключевые слова

Броуновское движение, характеристическая функция, немарковский процесс, неравновесное состояние, производство энтропии, фликкер-шум

Поступила в редакцию 30.01.2017
© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017

Описание броуновского движения в неравновесных средах может быть выполнено с помощью уравнения Ланжевена [1], в котором внешние случайные воздействия частиц среды на броуновскую частицу описываются случайным процессом, отличающимся от белого шума [2, 3]. В этом случае становится невозможным использование метода стохастических дифференциальных уравнений для нахождения характеристических функций (функций распределения) флуктуаций импульса броуновской частицы [4, 5]. Это связано с тем, что броуновское движение становится немарковским случайным процессом [6, 7].

Метод нахождения характеристических функций немарковского случайного процесса $Z(t)$, описывающегося с помощью линейного интегрального преобразования, предложен и обоснован в работах [5, 8]:

$$Z(t) = \int_0^t G(t, \tau) dW(\tau), \quad (1)$$

где $G(t, \tau)$ — непрерывная функция переменной τ ; $W(\tau)$ — процесс с независимыми приращениями. Полагается, что интеграл (1) представляет собой интеграл Ито [4, 9].

Одномерная характеристическая функция $g_1(\lambda; t)$ процесса $Z(t)$ имеет вид [5, 8]

$$g_1(\lambda; t) = \exp \left[\int_0^t \chi(\lambda G(t, \tau); \tau) d\tau \right]. \quad (2)$$

Здесь

$$\chi(\lambda G(t, \tau); \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \ln h_1(\lambda G(t, \tau); \tau); \quad (3)$$

$$h_1(\lambda G(t, \tau); \tau) = \langle \exp(i\lambda G(t, \tau)W(\tau)) \rangle. \quad (4)$$

Если процесс $W(t)$ является винеровским с интенсивностью $v_B(t)$ и описывается одномерной характеристической функцией

$$h_1(\lambda; t) = \exp \left(-\frac{1}{2} v_B(t) \lambda^2 t \right), \quad (5)$$

то выражение для одномерной характеристической функции $g_1(\lambda; t)$ процесса $Z(t)$ принимает форму

$$g_1(\lambda; t) = \exp \left[-\frac{1}{2} \lambda^2 \int_0^t G^2(t, \tau) v_B(\tau) d\tau \right]. \quad (6)$$

Если процесс $W(t)$ — пуассоновский с интенсивностью $v_{\Pi}(t)$ и описывается одномерной характеристической функцией

$$h_1(\lambda; t) = \exp(v_{\Pi}(t)(g(\lambda) - 1)t), \quad (7)$$

где $g(\lambda)$ — характеристическая функция скачков пуассоновского процесса, то выражение для одномерной характеристической функции $g_1(\lambda; t)$ процесса $Z(t)$ принимает вид

$$g_1(\lambda; t) = \exp \left[\int_0^t (g(\lambda G(t, \tau)) - 1) v_{\Pi}(\tau) d\tau \right]. \quad (8)$$

В более общем случае для нахождения L -мерной характеристической функции $g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L)$ процесса $Z(t)$ необходимо использовать выражение [5, 8]

$$g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L) = \exp \left[\sum_{l=1}^L \int_{t_{l-1}}^{t_l} \chi \left(\left(\sum_{k=l}^L \lambda_k G(t_k, \tau) \right); \tau \right) d\tau \right]. \quad (9)$$

Здесь

$$\chi \left(\left(\sum_{k=l}^L \lambda_k G(t_k, \tau) \right); \tau \right) = \frac{\partial}{\partial \tau} \ln h_1 \left(\left(\sum_{k=l}^L \lambda_k G(t_k, \tau) \right); \tau \right); \quad (10)$$

$$h_1 \left(\left(\sum_{k=1}^L \lambda_k G(t_k, \tau) \right); \tau \right) = \left\langle \exp \left(i \left(\sum_{k=1}^L \lambda_k G(t_k, \tau) \right) W(\tau) \right) \right\rangle. \quad (11)$$

При нахождении интеграла в выражении (9) необходимо учитывать условие

$$G(t_k, \tau) \Big|_{\tau > t_k} = 0. \quad (12)$$

Формулы (2)–(4) являются частными случаями выражений (9)–(11) при $L = 1$.

Если процесс $W(t)$ является винеровским, то

$$g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L) = \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{l,k=1}^L \lambda_l \lambda_k \int_0^{\min(t_l, t_k)} G(t_l, \tau) G(t_k, \tau) v_B(\tau) d\tau \right], \quad (13)$$

а если — пуассоновским, то

$$g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L) = \exp \left[\sum_{l=1}^L \int_{t_{l-1}}^{t_l} \left(g \left(\sum_{k=1}^L \lambda_k G(t_k, \tau) \right) - 1 \right) v_{\Pi}(\tau) d\tau \right]. \quad (14)$$

Проведем разработку метода нахождения характеристических функций немарковского случайного процесса $Z(t)$ в случае, если для его описания требуется использование системы линейных интегральных уравнений:

$$Z(t) = \int_0^t G_1(t, \xi) X(\xi) d\xi; \quad (15)$$

$$X(\xi) = \int_0^{\xi} G_2(\xi, \tau) dW(\tau), \quad (16)$$

где $G_1(t, \xi)$, $G_2(\xi, \tau)$ — непрерывные функции переменных ξ и τ . Здесь так же, как и для интеграла (1), полагается, что интегралы (15) и (16) представляют собой интегралы Ито.

К системе линейных интегральных уравнений (15), (16) может быть сведена задача описания броуновского движения при воздействии на частицу случайного процесса, не являющегося процессом с независимыми приращениями. В этом случае броуновское движение описывается уравнением следующего вида:

$$\frac{dZ(t)}{dt} + \gamma Z(t) = X(t). \quad (17)$$

Здесь γ — коэффициент вязкого трения; $X(t)$ — случайный процесс, который может быть получен из процесса с независимыми приращениями $W(t)$ с помощью интегрального уравнения (16). Если решение уравнения (17) представить в интегральной форме (15) с ядром

$$G_1(t, \xi) = \exp(-\gamma(t - \xi)), \quad (18)$$

то рассматриваемая задача описания броуновского движения сведется к решению системы линейных интегральных уравнений (15), (16).

Для нахождения характеристических функций процесса $Z(t)$ проведем следующее преобразование системы линейных интегральных уравнений (15), (16):

$$\begin{aligned} Z(t) &= \int_0^t G_1(t, \xi) \left(\int_0^\xi G_2(\xi, \tau) dW(\tau) \right) d\xi = \\ &= \int_0^t \left(\int_0^t 1(\xi - \tau) G_1(t, \xi) G_2(\xi, \tau) dW(\tau) \right) d\xi = \\ &= \int_0^t \left(\int_\tau^t G_1(t, \xi) G_2(\xi, \tau) d\xi \right) dW(\tau), \end{aligned}$$

где $1(\xi - \tau)$ — единичная функция.

Следовательно, систему уравнений (15), (16) можно свести к линейному интегральному уравнению (1), в которое необходимо подставлять ядро преобразования $G(t, \tau)$ в виде

$$G(t, \tau) = \int_\tau^t G_1(t, \xi) G_2(\xi, \tau) d\xi.$$

Таким образом, при нахождении характеристических функций процесса $Z(t)$, описываемого системой линейных интегральных уравнений (15), (16), могут быть использованы выражения (2)–(4) (для частных случаев винеровского и пуассоновского процессов — (6) и (8)) и (9)–(11) (для частных случаев указанных процессов — (13) и (14)).

Предложенный метод позволяет рассчитать характеристические функции процесса $Z(t)$, описываемого системой линейных интегральных уравнений, состоящей из любого количества таких уравнений. Например, в случае системы из трех линейных интегральных уравнений

$$\begin{aligned} Z(t) &= \int_0^t G_1(t, \xi) X(\xi) d\xi; \\ X(\xi) &= \int_0^\xi G_2(\xi, \vartheta) Y(\vartheta) d\vartheta; \\ Y(\vartheta) &= \int_0^\vartheta G_3(\vartheta, \tau) dW(\tau), \end{aligned}$$

где $G_1(t, \xi)$, $G_2(\xi, \vartheta)$, $G_3(\vartheta, \tau)$ — непрерывные функции переменных ξ , ϑ и τ ; она сводится к линейному интегральному уравнению (1), ядро преобразования $G(t, \tau)$ которого имеет вид

$$G(t, \tau) = \int_\tau^t G_1(t, \xi) \left(\int_\tau^\xi G_2(\xi, \vartheta) G_3(\vartheta, \tau) d\vartheta \right) d\xi.$$

Аналогично можно найти ядро преобразования $G(t, \tau)$ для системы из N линейных интегральных уравнений.

Рассмотрим применение полученных выражений для нахождения характеристических функций флуктуаций импульса броуновской частицы в равновесной и неравновесной средах.

1. Пусть $Z(t)$ описывает импульс броуновской частицы в равновесной среде при воздействии на нее случайного δ -коррелированного процесса. Тогда его интенсивность v_B можно представить как [5]

$$v_B = 2\gamma mkT, \tag{19}$$

где m — масса броуновской частицы; k — постоянная Больцмана; T — температура среды, а ядра преобразований $G_1(t, \xi)$ и $G_2(\xi, \tau)$ имеют соответственно вид (18) и

$$G_2(\xi, \tau) = \delta(\xi - \tau).$$

В этом случае формула для $G(t, \tau)$ принимает вид

$$G(t, \tau) = \int_{\tau}^t \exp(-\gamma(t - \xi)) \delta(\xi - \tau) d\xi = \exp(-\gamma(t - \tau)). \tag{20}$$

Подстановка выражений (19) и (20) в формулу (13) дает формулу для L -мерной характеристической функции $g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L)$ процесса $Z(t)$ при воздействии на броуновскую частицу винеровского процесса

$$g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L) = \exp\left[-\frac{mkT}{2} \sum_{l,k=1}^L (\lambda_l \lambda_k (\exp(-\gamma|t_l - t_k|) - \exp(-\gamma(t_l + t_k))))\right]. \tag{21}$$

Аналогичное выражение при воздействии пуассоновского процесса (см. (14)) имеет вид

$$g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L) = \exp\left[2\gamma mkT \sum_{l=1}^L \int_{t_{l-1}}^{t_l} \left(g\left(\sum_{k=l}^L \lambda_k \exp(-\gamma(t_k - \tau))\right) - 1\right) d\tau\right]. \tag{22}$$

При $L = 1$ получаем выражения для одномерных характеристических функций в случае воздействия винеровского и пуассоновского процессов:

$$g_1(\lambda; t) = \exp\left[-\frac{mkT}{2} \lambda^2 (1 - \exp(-2\gamma t))\right]; \tag{23}$$

$$g_1(\lambda; t) = \exp\left[2\gamma mkT \int_0^t (g(\lambda \exp(-\gamma(t - \tau))) - 1) d\tau\right]. \tag{24}$$

Выражения (21)–(24) совпадают с формулами, полученными для случая броуновского движения в равновесной среде в работах [5, 8].

2. Рассмотрим описание броуновского движения в случае, когда броуновская частица находится в неравновесной среде, воздействие которой на нее имеет интенсивность

$$v = 2\gamma m \sigma_S T, \tag{25}$$

где σ_S — производство энтропии при движении броуновской частицы в неравновесной среде, а ядро преобразования $G_2(\xi, \tau)$ можно представить в виде

$$G_2(\xi, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\gamma(\xi - \tau)}}.$$

Тогда выражение для $G(t, \tau)$ принимает форму [10]

$$G(t, \tau) = \int_{\tau}^t \frac{\exp(-\gamma(t - \xi))}{\sqrt{\gamma(\xi - \tau)}} d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{\gamma} \exp(-\gamma(t - \tau)) \operatorname{erfi}(\sqrt{\gamma(t - \tau)}), \tag{26}$$

где $\operatorname{erfi}(x) = -i \operatorname{erf}(ix)$.

Если подставить выражения (25) и (26) в формулу (13), то для L -мерной характеристической функции $g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L)$ процесса $Z(t)$ при воздействии на броуновскую частицу винеровского процесса имеем

$$g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L) = \exp \left[-\frac{\pi m \sigma_S T}{\gamma} \sum_{l,k=1}^L \lambda_l \lambda_k \int_0^{\min(t_l, t_k)} \exp(-\gamma(t_l + t_k - 2\tau)) \times \right. \\ \left. \times \operatorname{erfi}(\sqrt{\gamma(t_l - \tau)}) \operatorname{erfi}(\sqrt{\gamma(t_k - \tau)}) d\tau \right]. \tag{27}$$

Аналогично при подстановке выражений (25) и (26) в формулу (14), описывающую воздействие пуассоновского процесса, получим

$$g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L) = \\ = \exp \left[2\gamma m \sigma_S T \sum_{l=1}^L \int_{t_{l-1}}^{t_l} \left(g \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\gamma} \sum_{k=l}^L \lambda_k \exp(-\gamma(t_k - \tau)) \operatorname{erfi}(\sqrt{\gamma(t_k - \tau)}) \right) - 1 \right) d\tau \right]. \tag{28}$$

При $L = 1$ выражения (27) и (28) переходят в формулы для одномерных характеристических функций винеровского и пуассоновского процессов:

$$g_1(\lambda; t) = \exp \left[-\frac{\pi m \sigma_S T}{\gamma} \lambda^2 \int_0^t \exp(-2\gamma(t - \tau)) \operatorname{erfi}^2(\sqrt{\gamma(t - \tau)}) d\tau \right]; \\ g_1(\lambda; t) = \exp \left[2\gamma m \sigma_S T \int_0^t \left(g \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\gamma} \lambda \exp(-\gamma(t - \tau)) \operatorname{erfi}(\sqrt{\gamma(t - \tau)}) \right) - 1 \right) d\tau \right].$$

Определим математическое ожидание $\langle Z(t) \rangle$, дисперсию $\langle Z^2(t) \rangle$ и корреляционную функцию $\langle Z(t_2)Z(t_1) \rangle$ процесса $Z(t)$ при воздействии винеровского процесса:

$$\begin{aligned} \langle Z(t) \rangle &= \frac{\partial g_1(\lambda; t)}{i\partial\lambda} = 0; \\ \langle Z^2(t) \rangle &= -\frac{\partial^2 g_1(\lambda; t)}{\partial\lambda^2} \Big|_{\lambda=0} = \frac{2\pi m\sigma_S T}{\gamma} \int_0^t \exp(-2\gamma(t-\tau)) \operatorname{erfi}^2(\sqrt{\gamma(t-\tau)}) d\tau; \\ \langle Z(t_2)Z(t_1) \rangle &= \frac{\partial^2 g_2(\lambda_1, \lambda_2; t_1, t_2)}{i\partial\lambda_1 i\partial\lambda_2} \Big|_{\substack{\lambda_1=0 \\ \lambda_2=0}} = \\ &= \frac{2\pi m\sigma_S T}{\gamma} \int_0^{t_1} \exp(-\gamma(t_1-\tau)) \operatorname{erfi}(\sqrt{\gamma(t_1-\tau)}) \exp(-\gamma(t_2-\tau)) \operatorname{erfi}(\sqrt{\gamma(t_2-\tau)}) d\tau. \end{aligned} \tag{29}$$

Формула (29) для корреляционной функции процесса $Z(t)$ позволяет найти одностороннюю спектральную плотность $G_Z(\omega)$ флуктуаций этой величины [11]:

$$\begin{aligned} G_Z(\omega) &= 4 \int_0^\infty \langle Z(t+\xi)Z(t) \rangle \Big|_{t \rightarrow \infty} \cos(\omega\xi) d\xi = \\ &= \frac{8\pi m\sigma_S T}{\gamma} \int_0^\infty \left(\int_0^t \exp(-\gamma(t-\tau)) \operatorname{erfi}(\sqrt{\gamma(t-\tau)}) \exp(-\gamma(t-\tau+\xi)) \times \right. \\ &\quad \left. \times \operatorname{erfi}(\sqrt{\gamma(t-\tau+\xi)}) d\tau \right) \Big|_{t \rightarrow \infty} \cos(\omega\xi) d\xi. \end{aligned} \tag{30}$$

Рассмотрим нахождение односторонней спектральной плотности $G_Z(\omega)$ для высокочастотного случая при $\omega \gg \gamma$. Для этого случая в первом приближении можно использовать следующую формулу [12]:

$$\operatorname{erfi}(x) \Big|_{x \ll 1} \cong \frac{2}{\sqrt{\pi}} x. \tag{31}$$

Подстановка выражения (31) в формулу (30) дает

$$\begin{aligned} G_Z(\omega) &= \\ &= 32\gamma m\sigma_S T \int_0^\infty \left(\exp(-\gamma\xi) \int_0^t \exp(-2\gamma(t-\tau)) \sqrt{(t-\tau)(t-\tau+\xi)} d\tau \right) \Big|_{t \rightarrow \infty} \cos(\omega\xi) d\xi. \end{aligned} \tag{32}$$

Вычисление интегралов в выражении (32) позволяет найти спектральную плотность [10]:

$$G_Z(\omega) = \frac{4\pi m\sigma_S T}{\omega^3}.$$

Следовательно, в высокочастотной части спектра спектральная плотность флуктуаций импульса броуновской частицы обратно пропорциональна третьей степени частоты.

Рассмотрим случай $\omega \ll \gamma$, для которого можно использовать следующее первое приближение [12]:

$$\operatorname{erfi}(\chi) \Big|_{\chi \gg 1} \cong \frac{\exp(\chi^2)}{\sqrt{\pi\chi}}. \quad (33)$$

После подстановки выражения (33) в формулу (30) имеем

$$G_Z(\omega) = \frac{8\pi m\sigma_S T}{\gamma^2} \int_0^\infty \left(\int_0^t \frac{1}{\sqrt{(t-\tau)(t-\tau+\xi)}} d\tau \right) \cos(\omega\xi) d\xi. \quad (34)$$

Вычисление интегралов в формуле (34) позволяет получить [10]

$$G_Z(\omega) = \frac{4\pi m\sigma_S T}{\gamma^2 \omega}. \quad (35)$$

Из формулы (35) следует, что при движении броуновской частицы в неравновесной среде в низкочастотной части спектра спектральная плотность флуктуаций импульса броуновской частицы описывается фликкер-шумом [13, 14].

Заключение. Предложенный метод нахождения характеристических функций немарковского процесса, описываемого системой линейных интегральных уравнений, позволил рассчитать статистические характеристики броуновского движения в неравновесной среде. Спектральная плотность флуктуаций импульса броуновской частицы в такой среде линейно зависит от производства энтропии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гардинер К.В. Стохастические методы в естественных науках. М.: Мир, 1986. 528 с.
2. Брауэрс Й.Й.Х. Уравнение Ланжевена для частицы жидкости в потоке с вызванной наличием стенок турбулентностью // Теоретическая и математическая физика. 2010. Т. 163. № 2. С. 328–352.
3. Marchesoni F., Taloni A. Subdiffusion and long-time anticorrelations in a stochastic single file // Physical Review Letters. 2006. Vol. 97. Iss. 10. P. 106101-1–106101-4. DOI: 10.1103/PhysRevLett.97.106101
4. Пугачев В.С., Сеницын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. М.: Наука, 1990. 632 с.
5. Бункин Н.Ф., Морозов А.Н. Стохастические системы в физике и технике. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 366 с.
6. Морозов А.Н. Применение теории немарковских процессов при описании броуновского движения // ЖЭТФ. 1996. Т. 109. № 4. С. 1304–1315.
7. Морозов А.Н., Скрипкин А.В. Применение интегральных преобразований для описания броуновского движения как немарковского случайного процесса // Известия вузов. Физика. 2009. № 2. С. 66–74.

8. Морозов А.Н. Метод описания немарковских процессов, задаваемых линейным интегральным преобразованием // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2004. № 3. С. 47–56.
9. Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы. М.: Мир, 1987. 400 с.
10. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Т. 1. Элементарные функции. М.: Наука, 2003. 632 с.
11. Морозов А.Н. Необратимые процессы и броуновское движение. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. 332 с.
12. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1977. 344 с.
13. Бочков Г.Н., Кузовлев Ю.Е. Новое в исследованиях $1/f$ -шума // Успехи физических наук. 1983. Т. 141. № 1. С. 151–176. DOI: 10.3367/UFNr.0141.198309d.0151
14. Кузовлев Ю.Е. Почему природе нужен $1/f$ -шум // Успехи физических наук. 2015. Т. 185. № 7. С. 773–783. DOI: 10.3367/UFNr.0185.201507d.0773

Морозов Андрей Николаевич — д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой «Физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Морозов А.Н. Метод описания немарковских процессов, задаваемых системой линейных интегральных уравнений // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2017. № 5. С. 57–66. DOI: 10.18698/1812-3368-2017-5-57-66

METHOD FOR DESCRIBING NON-MARKOVIAN PROCESSES DEFINED BY A SYSTEM OF LINEAR INTEGRAL EQUATIONS

A.N. Morozov

amor@bmstu.ru

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

We suggest a method for determining characteristic functions of a non-markovian stochastic process when a system of linear integral equations describes it. We show that in this case it is possible to find the solution to this problem using a previously developed method for determining characteristic functions of a process described by a single linear integral equation. We employed the method we developed to describe Brownian motion in equilibrium and non-equilibrium media. We computed spectral density of impulse fluctuations for a Brownian particle in a non-equilibrium medium and determined that in the low-frequency region it is represented by flicker noise. We show that the spectral density of impulse fluctuations for a Brownian particle in a non-equilibrium medium is a linear function of entropy generation

Keywords

Brownian motion, characteristic function, non-markovian process, non-equilibrium state, entropy generation, flicker noise

Received 30.01.2017

© BMSTU, 2017

REFERENCES

- [1] Crispin W.G. Handbook of stochastic methods for physics, chemistry, and the natural sciences. Springer-Verlag, 1985. 442 p.
- [2] Brauers Y.Y.Kh. Langevin equation of a fluid particle in wall-induced turbulence. *Theoretical and Mathematical Physics*, 2010, vol. 163, iss. 2, pp. 677–695.
DOI: 10.1007/s11232-010-0050-2
- [3] Marchesoni F., Taloni A. Subdiffusion and long-time anticorrelations in a stochastic single file. *Physical Review Letters*, 2006, vol. 97, iss. 10, pp. 106101-1–106101-4.
DOI: 10.1103/PhysRevLett.97.106101
- [4] Pugachev V.S., Sinitsyn I.N. Stokhasticheskie differentsial'nye sistemy [Stochastic differential systems]. Moscow, Nauka Publ., 1990. 632 p.
- [5] Bunkin N.F., Morozov A.N. Stokhasticheskie sistemy v fizike i tekhnike [Stochastic systems in physics and technique]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2011. 366 p.
- [6] Morozov A.N. Use of the theory of non-Markovian processes in the description of Brownian motion. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1996, vol. 82, no. 4, pp. 703–708.
- [7] Morozov A.N., Skripkin A.V. Application of integral transforms to a description of the Brownian motion by a non-Markovian random process. *Russian Physics Journal*, 2009, vol. 52, no. 2, pp. 184–195. DOI: 10.1007/s11182-009-9217-4
- [8] Morozov A.N. Method of describing non-Markovian processes defined by linear integral transformation. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2004, no. 3, pp. 47–56 (in Russ.).
- [9] Horsthemke W., Lefever R. Noise-induced transitions. Springer, 1984. 322 p.
- [10] Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. Integraly i ryady. T. 1. Elementarnye funktsii [Integrals and raws. Vol. 1. Elementary functions]. Moscow, Nauka Publ., 2003. 632 p.
- [11] Morozov A.N. Neobratimye protsessy i brownovskoe dvizhenie [Irreversible processes and Brownian motion]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 1997. 332 p.
- [12] Jahnke E., Emde F., Lösch F. Tafeln höherer funktionen. Stuttgart, Teubner Verlagsgesellschaft. Preis, 1960. 318 p.
- [13] Bochkov G.N., Kuzovlev Yu.E. New aspects in $1/f$ noise studies. *Sov. Phys. Usp.*, 1983, vol. 26, pp. 829–844. DOI: 10.1070/PU1983v026n09ABEH004497
- [14] Kuzovlev Yu.E. Why nature needs $1/f$ noise. *Phys. Usp.*, 2015, vol. 58, no. 7, pp. 719–729.
DOI: 10.3367/UFNe.0185.201507d.0773

Morozov A.N. — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Head of Physics Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Morozov A.N. Method for Describing Non-Markovian Processes Defined by a System of Linear Integral Equations. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2017, no. 5, pp. 57–66.
DOI: 10.18698/1812-3368-2017-5-57-66