УДК 517.956.2+517.53 DOI: 10.18698/1812-3368-2017-6-4-18

ФУНКЦИЯ ГРИНА И ИНТЕГРАЛ ПУАССОНА В КРУГЕ ДЛЯ СИЛЬНОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А.О. Багапш a.bagapsh@gmail.com

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
Вычислительный центр ФИЦ «Информатика и управление» РАН, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Рассмотрена задача Дирихле для однородной сильноэллиптической системы второго порядка с постоянными коэффициентами, другими словами, для дифференциального уравнения в частных производных вида $\mathcal{L}_{\tau,\sigma} f = 0$, где f — комплекснозначная функция, а $\mathcal{L}_{\tau,\sigma} = (\partial\overline{\partial} + \tau\partial^2)\mathcal{I} + \sigma(\tau\partial\overline{\partial} + \partial^2)\mathcal{C}$. Здесь ∂, $\overline{\partial}$ — операторы Коши — Римана; $\mathcal{I}$ — тождественный оператор; $\mathcal{C} : z \mapsto \overline{z}$ — оператор комплексного сопряжения; τ, σ — параметры, такие, что $\tau, \sigma \in (-1,1)$. Для таких систем получены формулы интеграла типа Пуассона, функции Грина и решения задачи Дирихле в круге и эллипсе специального вида. Оператор $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}$ является возмущением оператора Лапласа Δ, а решение задачи Дирихле для уравнения $\mathcal{L}_{\tau,\sigma} f = 0$ получено в виде суммы ряда по степеням параметра σ. Функции, являющиеся коэффициентами соответствующего ряда, могут быть найдены в результате решения «рекуррентной» последовательности задач Дирихле для обычных уравнений Лапласа и Пуассона

Ключевые слова

Эллиптические системы, сильная эллиптичность, задача Дирихле, интеграл Пуассона, функция Грина, кососимметрические системы, система Ляме

Поступила в редакцию 25.05.2017

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (проект № 1.3843.2017), РФФИ (проекты № 16-01-00674, № 16-01-00781) и Программы поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (проект № НШ-9110.2016.1)

Введение. В работе рассмотрены однородные эллиптические системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка в $\mathbb{R}^2$ с постоянными коэффициентами, т. е. системы вида

$$\left(A\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где A, B, C — постоянные вещественные матрицы 2×2. Эллиптичность системы (1) означает [1], что биквадратичная характеристическая форма

$$F(\xi_1, \xi_2) := \det(A\xi_1^2 + 2B\xi_1\xi_2 + C\xi_2^2) \tag{2}$$

с вещественными ξ_1 и ξ_2 обращается в нуль только при $\xi_1 = \xi_2 = 0$. Эллиптическая система (1) называется *сильноэллиптической* [2–5], если соответствующая ей квадратичная форма

$$Q(\xi_1, \xi_2) := \det(A + 2B\xi_1 + C\xi_2) \tag{3}$$

не обращается в нуль при вещественных ξ_1, ξ_2 с условием $\xi_1^2 \le \xi_2$.

Геометрически условие эллиптичности означает, что кривая второго порядка, задаваемая в плоскости (ξ_1, ξ_2) уравнением $Q(\xi_1, \xi_2) = 0$, не пересекается с параболой $\xi_2 = \xi_1^2$, а условие сильной эллиптичности — что она расположена именно во «внешности» этой параболы.

Для данного подмножества $E \subset \mathbb{C}$ обозначим через $C(E)$ пространство, состоящее из всех непрерывных на E комплекснозначных функций. Напомним постановку классической задачи Дирихле для системы (1). Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$. Для заданной функции $h \in C(\partial\Omega)$ требуется найти функцию $f \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, такую, что пара функций $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$ удовлетворяет в области Ω системе уравнений (1). Сильная эллиптичность является критерием того, что задача Дирихле для системы (1) имеет не больше одного решения (см. например, [4]).

Основная цель настоящей работы — получение новых явных формул для интеграла типа Пуассона, функции Грина и решения задачи Дирихле в единичном круге для систем (1). Кроме того, развитая в работе техника позволяет получить такие формулы для областей, ограниченных эллипсами специального вида.

Каноническое представление. Как показано, например, в работе [6], любая эллиптическая система вида (1) может быть приведена к следующему каноническому двухпараметрическому виду:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{\lambda}{\kappa^2} \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\lambda-\kappa^2}{\kappa} \\ \dfrac{\lambda-1}{\kappa} & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} + \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Параметр $\lambda \ne 0$ называют *показателем симметрии*, а параметр $\kappa \in (0,1]$ — *показателем эллиптичности*. Сильноэллиптическим системам соответствуют значения показателя симметрии $\lambda > 0$. При соотношении параметров $\lambda < \kappa^2$ или $\lambda > 1$ такие системы называются *симметричными*, или симметризуемыми [6, 7], поскольку они приводятся к виду, в котором все матрицы A, B, C одновременно симметричны; при $\kappa^2 < \lambda < 1$ системы называются *несимметричными*. Если $\lambda = \kappa^2$ или $\lambda = 1$, то соответствующая система распадается на два уравнения, одно из которых не зависит от другого, так что решение системы сводится к последовательному решению двух уравнений; ее принято называть *треугольной*, ввиду того, что в этом случае матрица B становится треугольной.

Приведение эллиптической системы (1) к каноническому виду (4) осуществляется в два шага. Первый шаг — определение двух комплексно сопряженных пар $\lambda_1,\ \overline{\lambda}_1$ и $\lambda_2,\ \overline{\lambda}_2$ корней биквадратичной характеристической формы (2), другими словами, форму представляют в виде

$$F(\xi_1,\xi_2)=\det A\cdot(\xi_1-\lambda_1\xi_2)(\xi_1-\overline{\lambda}_1\xi_2)(\xi_1-\lambda_2\xi_2)(\xi_1-\overline{\lambda}_2\xi_2).$$

Второй шаг — применением подходящего (невырожденного) дробно-линейного преобразования [6, 9]

$$L(z)=\frac{az+b}{z+c},\quad ac-b\neq 0, \tag{5}$$

переводим характеристические корни $\lambda_1,\ \lambda_2$ в точки мнимой оси:

$$L(\lambda_1)=-i\kappa,\qquad L(\lambda_2)=i, \tag{6}$$

причем значение κ заранее не известно.

После описанного дробно-линейного преобразования использованием подходящей линейной комбинации уравнений полученной системы, а также линейного преобразования зависимых переменных u, v приходим к системе вида (4). Отметим, что фигурирующие в ней функции u и v отличаются от одноименных функций в исходной системе (1) на упомянутое линейное преобразование в плоскости зависимых переменных.

От матричной формы (4) записи эллиптической системы теперь удобно перейти к комплексной форме. Для этого предварительно умножим все матрицы системы (4) слева на матрицу

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\kappa}{\kappa^2-\lambda} & 0\\ 0 & \dfrac{\kappa}{1-\lambda}\end{pmatrix},$$

после чего эта система приобретет симметричный вид

$$\left(\begin{pmatrix}\dfrac{\kappa}{\kappa^2-\lambda} & 0\\ 0 & \dfrac{\lambda}{\kappa(1-\lambda)}\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\begin{pmatrix}\dfrac{\lambda\kappa}{\kappa^2-\lambda} & 0\\ 0 & \dfrac{\kappa}{1-\lambda}\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}. \tag{7}$$

Введем комплексную функцию $f=u+iv$ и сложим первое уравнение системы (7) со вторым, умноженным на мнимую единицу i. Получившееся уравнение можно записать в следующем виде:

$$\begin{gathered}(1-\kappa)(\kappa+\lambda)\partial^2 f(z)+(1+\kappa)(\kappa+\lambda)\partial\overline{\partial}f(z)+\\ +(1+\kappa)(\kappa-\lambda)\partial^2\overline{f(z)}+(1-\kappa)(\kappa-\lambda)\overline{\partial}\partial\overline{f(z)}=0,\end{gathered} \tag{8}$$

где $z=x+iy$; $\partial,\ \overline{\partial}$ — операторы Коши — Римана,

$$\partial = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \overline{\partial} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

При $\lambda \neq -\kappa$ уравнение (8) можно разделить на $(1+\kappa)(\kappa+\lambda)$ и, введя новые параметры

$$\tau = \frac{1-\kappa}{1+\kappa}, \qquad \sigma = \frac{\kappa-\lambda}{\kappa+\lambda}, \tag{9}$$

переписать его в виде

$$\mathcal{L}_{\tau,\sigma} f(z) := (\partial\overline{\partial} + \tau\partial^2) f(z) + \sigma(\tau\partial\overline{\partial} + \partial^2)\overline{f(z)} = 0. \tag{10}$$

Поскольку

$$\kappa = \frac{1-\tau}{1+\tau}, \quad \lambda = \frac{1-\sigma}{1+\sigma}\,\frac{1-\tau}{1+\tau},$$

сильноэллиптической системе соответствует уравнение (10) со значениями параметров $|\tau|<1,\ |\sigma|<1.$ Кроме того, сильная эллиптичность имеет место и при одновременном выполнении условий $|\tau|>1,\ |\sigma|>1.$ Этот случай сводится к первому посредством деления уравнения (10) на $\tau\sigma$ и замены $\tau \to 1/\tau,$ $\sigma \to 1/\sigma$ и $f \to \overline{f}.$ Отметим также, что симметризуемым системам (4) соответствует уравнение (10) с параметрами $|\sigma|>|\tau|.$

В случае сильной эллиптичности уравнение (10) можно рассматривать как возмущенное комплексное уравнение Лапласа $\Delta f(z) = 4\partial\overline{\partial} f(z) = 0$ с малыми параметрами τ и σ. Кроме того, специальный интерес представляют частные случаи системы (10), отвечающие нулевым значениям параметров σ или τ.

Значению $\sigma = 0$ соответствует система (10), которая называется *кососимметрической* [6, 7]. Она получается при сведении к каноническому виду системы (1) с матрицами следующего вида:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 & -b_2 \\ b_2 & b_1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} c_1 & -c_2 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix}.$$

Систему с такими матрицами можно записать в виде $af''_{xx} + 2bf''_{xy} + cf''_{yy} = 0,$ где $a = a_1 + ia_2,\ b = b_1 + ib_2,\ c = c_1 + ic_2$ — (постоянные) комплексные коэффициенты.

При значении параметра $\tau = 0$ система (10) превращается в хорошо известную *систему Ляме*, играющую важную роль в плоской теории упругости [8] с коэффициентом Пуассона μ, связанным с параметром σ соотношением $\sigma = 1/(4\mu - 5),$ а также в систему уравнений продольных деформаций пластинок (или плоского напряженного состояния [8]), для которой $\sigma = -(1+\mu)/(5+\mu).$ Поскольку коэффициент Пуассона принимает значение в интервале $\left(0, \frac{1}{2}\right),$ то и система Ляме, и система уравнений продольных деформаций пластинок являются сильноэллиптическими: для системы Ляме параметр $\sigma \in \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}\right)$, а для уравнений продольных деформаций $\sigma \in \left(-\frac{3}{11}, -\frac{1}{5}\right)$, так что в обоих случаях $|\sigma| < 1$.

Вид общего решения и фундаментальное решение. Рассмотрим дифференциальный оператор, фигурирующий в уравнении вида (10):

$$\mathcal{L}_{\tau,\sigma} = \left(\partial\overline{\partial} + \tau\partial^2\right)\mathcal{I} + \sigma\left(\tau\partial\overline{\partial} + \partial^2\right)\mathcal{C}, \tag{11}$$

где $\mathcal{I}$ — тождественный оператор, действующий в пространстве $\mathbb{C}$; $\mathcal{C}: z \mapsto \overline{z}$ — оператор комплексного сопряжения. При $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ с условием $|\alpha| \neq |\beta|$ определим линейный оператор $\mathcal{T}_{\alpha,\beta} := \alpha\mathcal{I} + \beta\mathcal{C}$, который обратим, причем $\mathcal{T}^{-1}_{\alpha,\beta} = \left(|\alpha|^2 - |\beta|^2\right)^{-1}\mathcal{T}_{\overline{\alpha},-\beta}$.

Уравнение (10) удобно записать в виде

$$\mathcal{L}_{\tau,\sigma} f(z) = \partial\mathcal{T}_{1,\sigma}\left(\overline{\partial} + \tau\partial\right) f(z) = 0. \tag{12}$$

Из эллиптичности уравнения (12) следует, что если U — открытое множество в $\mathbb{C}$, функция $f \in C(U)$ удовлетворяет на множестве U уравнению (12) в смысле теории обобщенных функций (распределений), то функция f является вещественно аналитической в U и удовлетворяет уравнению (12) в классическом смысле [5, глава III].

Необходимое представление для решений уравнения (10) нетрудно получить из (12) [10]. Примем $z_\tau = \mathcal{T}_{1,-\tau}(z) = z - \tau\overline{z}$.

Предложение 1. *Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^2$, а $f \in C(\Omega)$. Функция f удовлетворяет уравнению (10) в Ω (в обобщенном, а следовательно, и в классическом смысле) тогда и только тогда, когда она представима (в Ω) в виде*

$$\begin{aligned} f(z) &= F(z_\tau) + \overline{G(z)} - \frac{\sigma}{\tau}G(z), \qquad \tau \neq 0;\\ f(z) &= F(z) + \overline{G(z)} - \sigma\overline{z}G'(z), \qquad \tau = 0, \end{aligned} \tag{13}$$

где F, G — функции, голоморфные в областях $\mathcal{T}_{1,-\tau}\Omega$ и Ω соответственно.

Обозначим через $\Phi_{\tau,\sigma}$ фундаментальное решение для оператора $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}$. Напомним, что $\Phi_{\tau,\sigma}$ — такая обобщенная функция (распределение), что $\langle\mathcal{L}_{\tau,\sigma}\Phi_{\tau,\sigma}|\varphi\rangle = \langle\mathbf{d}_0|\varphi\rangle = \varphi(0)$ для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{C})$, где через $\langle F|\varphi\rangle$ обозначено действие распределения F на функцию φ; δ_0 — дельта-функция Дирака с центром в нуле. Далее понадобятся следующие явные формулы для фундаментального решения $\Phi_{\tau,\sigma}$ сильноэллиптического уравнения.

Предложение 2. *Для оператора $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}$ с параметрами $|\tau| < 1$, $|\sigma| < 1$ фундаментальное решение имеет вид*

$$\Phi_{\tau,\sigma}(z)=\frac{1}{(1-\sigma^2)\pi}\left(\log(z_\tau\overline{z})\mathcal{I}+\frac{\sigma}{\tau}\log\left(\frac{z_\tau}{z}\right)\mathcal{C}\right),\qquad \tau\neq 0;$$
$$\Phi_{0,\sigma}(z)=\frac{1}{(1-\sigma^2)\pi}\left(\log(z\overline{z})\mathcal{I}-\sigma\frac{\overline{z}}{z}\mathcal{C}\right). \tag{14}$$

Отметим, что в случае $\tau\neq 0$ существуют и фиксируются некоторые однозначные вещественно-аналитические в $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ ветви соответствующих многозначных логарифмов.

В предложении 2 фундаментальное решение $\Phi_{\tau,\sigma}$ имеет вид $F_1(z)\mathcal{I}+F_2(z)\mathcal{C}$, где F_1, F_2 — соответствующие (обобщенные) функции. Последнее означает, что $\langle\Phi_{\tau,\sigma}|\varphi\rangle=\langle F_1|\varphi\rangle+\langle F_2|\overline{\varphi}\rangle$.

В связи с формулировкой предложения 2 необходимо отметить, что приращение (полярного) аргумента у функций $z_\tau\overline{z}$ и z_τ/z при обходе вокруг точки $z=0$ равно нулю, а формулу для фундаментального решения при $\tau=0$ можно получить из формулы для случая $\tau>0$ формально, с помощью предельного перехода при $\tau\to 0$.

Интеграл Пуассона и функция Грина в круге. Первый основной результат настоящей работы — явное выражение для решения задачи Дирихле для уравнения $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}f(z)=0$ в случае $|\sigma|<1$, $|\tau|<1$ в единичном круге $\mathbb{D}$, являющееся обобщением классической формулы Пуассона для гармонических функций.

Теорема 1. *Пусть* $|\sigma|<1$, $|\tau|<1$. *Решение задачи Дирихле для уравнения* $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}f(z)=0$ *в единичном круге* $\mathbb{D}$ *с заданной граничной функцией* $h\in C(\mathbb{T})$ *имеет вид*

$$f(z)=\int_{\mathbb{T}}\mathcal{P}_{\tau,\sigma}(\zeta,z)h(\zeta)\,|d\zeta| \tag{15}$$

с ядром

$$\mathcal{P}_{\tau,\sigma}(\zeta,z)=\frac{1-|z|^2}{2\pi}\left(\frac{1}{|\zeta-z|^2}+\right.$$
$$\left.+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\sigma^n\tau^n(2\mathcal{C}^n\zeta+(-1)^{n+1}\tau^n z_\tau)\mathcal{C}^n(\tau+\sigma\mathcal{C})}{(\mathcal{C}^n\zeta_{\tau^{2n+1}}+(-1)^{n+1}\tau^n z_\tau)(\mathcal{C}^n\zeta+(-1)^{n+1}\tau^n z)(\mathcal{C}^n\zeta+(-1)^n\tau^{n+1}\overline{z})}\right). \tag{16}$$

◂ Функцию f, заданную формулами (15), (16), можно переписать в виде (13) с аналитическими компонентами

$$F(z_\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\left[\frac{h(\zeta)d\zeta_\tau}{\zeta_\tau-z_\tau}+\right.$$
$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\mathcal{C}^n h(\zeta)d(\mathcal{C}^{n+1}\zeta_{\tau^{2n-1}})}{\mathcal{C}^{n-1}\zeta_{\tau^{2n-1}}+(-1)^n\tau^{n-1}z_\tau}+\frac{\mathcal{C}^n h(\zeta)d(\mathcal{C}^n\zeta_{\tau^{2n+1}})}{\mathcal{C}^n\zeta_{\tau^{2n+1}}+(-1)^{n+1}\tau^n z_\tau}\right)\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^n\right] \tag{17}$$

и

$$G(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\mathcal{C}^{n+1}h(\zeta)d(\mathcal{C}^{n+1}\zeta)}{\mathcal{C}^{n+1}\zeta+(-1)^{n}\tau^{n+1}z}+\frac{\mathcal{C}^{n+1}h(\zeta)d(\mathcal{C}^{n}\zeta)}{\mathcal{C}^{n}\zeta+(-1)^{n+1}\tau^{n}z}\right)\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)^{n}. \tag{18}$$

Отметим, что все ряды в формулах (17), (18) сходятся равномерно при $(\zeta,z)\in\mathbb{T}\times\overline{\mathbb{D}}$ (в формуле (18) необходимо вынести из-под суммы слагаемое, соответствующее $n=0$, и рассматривать его отдельно). Приводя в (17) и (18) дроби к общему знаменателю, получаем

$$F(z_{\tau})=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\left[\frac{h(\zeta)d\zeta_{\tau}}{\zeta_{\tau}-z_{\tau}}+\right.$$
$$\left.+\frac{z_{\tau}}{\tau}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma^{n}(1+\tau^{2n})\mathcal{C}^{n}h(\zeta)d\zeta_{\tau}}{(\mathcal{C}^{n-1}\zeta_{\tau^{2n-1}}+(-1)^{n}\tau^{n-1}z_{\tau})(\mathcal{C}^{n}\zeta_{\tau^{2n+1}}+(-1)^{n+1}\tau^{n}z_{\tau})}\right];$$

$$G(z)=\frac{z}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\mathcal{C}^{n+1}h(\zeta)d\zeta_{\tau}}{(\mathcal{C}^{n+1}\zeta+(-1)^{n}\tau^{n+1}z)(\mathcal{C}^{n}\zeta+(-1)^{n+1}\tau^{n}z)}\sigma^{n},$$

Откуда легко заметить, что соответствующие ряды при $|\sigma|<1$ мажорируются сходящимися геометрическими прогрессиями.

Согласно (17), (18), функция f, определенная в (15), имеет вид (13) и, следовательно, удовлетворяет в единичном круге $\mathbb{D}$ уравнению $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}f=0$.

Можно проверить, что при любых ζ, $z\in\mathbb{T}$ с условием $\zeta\neq z$ выполнено $\mathcal{P}_{\tau,\sigma}(\zeta,z)=0$.

Для завершения доказательства теоремы остается показать, что если $h\equiv A$, $A\in\mathbb{C}$ — постоянная функция на $\mathbb{T}$, то формулы (13), (17), (18) дают решение соответствующей задачи Дирихле $f\equiv A$. Имея это утверждение, можно завершить доказательство теоремы тем же стандартным способом, который применяется для доказательства классической формулы Пуассона для уравнения Лапласа (см., например, работу [11]).

Итак, пусть $h(\zeta)=A$ при всех $\zeta\in\mathbb{T}$, тогда

$$F(z_{\tau})=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\left[\frac{Ad\zeta_{\tau}}{\zeta_{\tau}-z_{\tau}}+\right.$$
$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\mathcal{C}^{n}Ad(\mathcal{C}^{n+1}\zeta_{\tau^{2n-1}})}{\mathcal{C}^{n+1}\zeta_{\tau^{2n-1}}+(-1)^{n}\tau^{n-1}z_{\tau}}+\frac{\mathcal{C}^{n}Ad(\mathcal{C}^{n}\zeta_{\tau^{2n+1}})}{\mathcal{C}^{n}\zeta_{\tau^{2n+1}}+(-1)^{n+1}\tau^{n}z_{\tau}}\right)\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)^{n}\right]. \tag{19}$$

Согласно теореме о вычетах, при $n = 2m$

$$I_{n}:=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\frac{d\left(\mathcal{C}^{n}\zeta_{\tau^{2n+1}}\right)}{\mathcal{C}^{n}\zeta_{\tau^{2n+1}}+(-1)^{n+1}\tau^{n}z_{\tau}}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\frac{d\zeta_{\tau^{2n+1}}}{\zeta_{\tau^{2n+1}}-\tau^{n}z_{\tau}}=N,$$

где N — число различных решений уравнения $\zeta_{\tau^{2n+1}}-\tau^{n}z_{\tau}=0$ относительно неизвестного ζ при $\zeta,z\in\mathbb{D}$. Решим это уравнение. Выпишем отдельно вещественную и мнимую части уравнения, полагая $\zeta=\rho e^{i\theta}$, а $z=re^{i\varphi}$:

$$\begin{aligned} &\rho(1-\tau^{2n+1})\cos\theta = \tau^n r(1-\tau)\cos\varphi; \\ &\rho(1+\tau^{2n+1})\sin\theta = \tau^n r(1-\tau)\sin\varphi. \end{aligned} \tag{20}$$

Разделив второе уравнение на первое, найдем

$$\frac{1+\tau^{2n+1}}{1-\tau^{2n+1}}\operatorname{tg}\theta = \frac{1+\tau}{1-\tau}\operatorname{tg}\varphi,$$

отсюда

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{1+\tau+\tau^2+\ldots+\tau^{2n}}{1-\tau+\tau^2+\ldots+\tau^{2n}}\operatorname{tg}\varphi\right).$$

Возводя в квадрат каждое уравнение из (20), а затем складывая их, определяем

$$\rho = \tau^n r\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{\left(1+\tau+\tau^2+\ldots+\tau^{2n}\right)^2} + \frac{\sin^2\varphi}{\left(1-\tau+\tau^2+\ldots+\tau^{2n}\right)^2}} < 1.$$

Таким образом, уравнение $\zeta_{\tau^{2n+1}} - \tau^n z_\tau = 0$ имеет ровно одно решение в единичном круге, т. е. $N = 1$.

При $n = 2m+1$ имеем

$$I_n := \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{d\left(\mathcal{C}^n\zeta_{\tau^{2n+1}}\right)}{\mathcal{C}^n\zeta_{\tau^{2n+1}} + (-1)^{n+1}\tau^n z_\tau} = -\mathcal{C}\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{d\zeta_{\tau^{2n+1}}}{\zeta_{\tau^{2n+1}} + \tau^n\overline{z}_\tau} = -N,$$

где N — число различных решений уравнения $\zeta_{\tau^{2n+1}} + \tau^n\overline{z}_\tau = 0$ относительно неизвестного ζ при $\zeta, z \in \mathbb{D}$. С помощью выкладок, аналогичных изложенным выше, нетрудно проверить, что и в рассматриваемом случае $N = 1$, так что для произвольного номера n получаем $I_n = (-1)^n$.

Следовательно,

$$F(z_\tau) = A\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{d\zeta_\tau}{\zeta_\tau - z_\tau} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(I_{n-1} + I_n\right)\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)^n \mathcal{C}^n A = A.$$

Кроме того, при $h(\zeta) = A$ для всех $\zeta \in \mathbb{T}$, с учетом того, что $\mathcal{C}^n i = (-1)^n i$ и применением теоремы о вычетах, для компоненты G находим

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\mathcal{C}^{n+1}Ad(\mathcal{C}^{n+1}\zeta)}{\mathcal{C}^{n+1}\zeta + (-1)^n\tau^{n+1}z} + \frac{\mathcal{C}^{n+1}Ad(\mathcal{C}^n\zeta)}{\mathcal{C}^n\zeta + (-1)^{n+1}\tau^n z}\right)\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^{n+1}\mathcal{C}^{n+1}\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{Ad\zeta}{\zeta + (-1)^n\tau^{n+1}\mathcal{C}^{n+1}z} + \right.$$

$$\left. + (-1)^n\mathcal{C}^n\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{\overline{A}d\zeta}{\zeta + (-1)^{n+1}\tau^n\mathcal{C}^n z}\right)\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)^n = \mathcal{C}^{n+1}A\sum_{n=0}^{\infty}((-1)^{n+1} + (-1)^n)\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)^n = 0.$$

В результате получаем $f(z) = A$, $z \in \mathbb{D}$. Таким образом, теорема доказана. ►

Следует отметить, что решение рассматриваемой задачи Дирихле также можно записать в виде

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} d_\zeta\left[\log\frac{\zeta-z}{1-\zeta\overline{z}}+\right.$$

$$\left.+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)^n\log\frac{(\mathcal{C}^n\zeta)(\mathcal{C}^n\zeta_{\tau 2n+1}+(-1)^{n+1}\tau^n z_\tau)}{\left(\mathcal{C}^n\zeta+(-1)^{n+1}\tau^n z)(\mathcal{C}^n\zeta+(-1)^n\tau^{n+1}\overline{z}\right)}\mathcal{C}^n\left(\mathcal{I}+\frac{\sigma}{\tau}\mathcal{C}\right)\right]h(\zeta) \qquad (21)$$

или в виде

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} h(\zeta)d_\zeta P(\zeta,z), \qquad (22)$$

где, в свою очередь, ядро формулы P представляется как сумма ряда

$$P(\zeta,z)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\zeta,z)\sigma^n \qquad (23)$$

по параметру σ с коэффициентами

$$\begin{gathered}P_0(\zeta,z)=\log\frac{\zeta_\tau-z_\tau}{(\overline{\zeta}-\overline{z})(\zeta+\tau\overline{z})};\\ P_n(\zeta,z)=\frac{1}{\tau^n}\sum_{k=n-1}^{n}\log\frac{\mathcal{C}^k\zeta_{\tau 2k+1}+(-1)^{k+1}\tau^k z_\tau}{\left(\mathcal{C}^k\zeta+(-1)^{k-1}\tau^k z\right)\left(\mathcal{C}^k\zeta+(-1)^k\tau^{k+1}\overline{z}\right)}\mathcal{C}^n, \qquad n\ge 1,\end{gathered} \qquad (24)$$

который сходится равномерно при $\zeta\in\mathbb{T}$, $z\in\overline{\mathbb{D}}$. Из формул (23), (24) следует представление функции f в виде

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(z)\sigma^n, \qquad (25)$$

где

$$f_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} d_\zeta P_n(\zeta,z)h(\zeta), \qquad (26)$$

причем функции f_n удовлетворяют уравнениям

$$\begin{gathered}\left(\partial\overline{\partial}+\tau\partial^2\right)f_0(z)=0;\\ \left(\partial\overline{\partial}+\tau\partial^2\right)f_n(z)=-\left(\tau\partial\overline{\partial}+\tau\partial^2+\partial^2\right)\mathcal{C}f_{n-1}(z), \quad n=1,2,\ldots,\end{gathered}$$

и граничным условиям $f_0|_{\mathbb{T}}=h$, $f_n|_{\mathbb{T}}=0$, $n\ge 2$. При этом ядра P_n при всех фиксированных значениях $\zeta\in\mathbb{T}$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{gathered}\left(\partial\overline{\partial}+\tau\partial^2\right)P_0(\zeta,z)=0;\\ \left(\partial\overline{\partial}+\tau\partial^2\right)P_n(\zeta,z)=\left(\tau\partial\overline{\partial}+\partial^2\right)\mathcal{C}P_{n-1}(\zeta,z), \quad n\ge 1,\end{gathered} \qquad (27)$$

(дифференцирование относится к переменной z) и граничным условиям

$$P_n(\zeta,z)=0, \quad z\in\mathbb{T}. \qquad (28)$$

Путем последовательного решения уравнений (27) при граничных условиях (28) можно построить приведенное в теореме 1 решение рассматриваемой задачи Дирихле. Отметим, что ядро P_0 было найдено в работе [9], где построен интеграл Пуассона для оператора $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}$ для случая $\sigma=0$; этот результат получен путем разложения решения по параметру τ.

Интеграл Пуассона (15), (16) существенно упрощается при значениях параметров $\tau=0$ или $\sigma=0$.

Следствие 1. *Решение задачи Дирихле для уравнения* $\mathcal{L}_{\tau,0}f(z)=0$ *с параметром* $|\tau|<1$ *в единичном круге* $\mathbb{D}$ *с граничной функцией* $h\in C(\mathbb{T})$ *представляется интегралом*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\frac{(1-|z|^2)\left(\zeta+\tau\overline{\zeta}\right)}{(\zeta_\tau-z_\tau)\left(\overline{\zeta}-\overline{z}\right)(\zeta+\tau\overline{z})}h(\zeta)\,|d\zeta|. \tag{29}$$

Следствие 2. *Решение задачи Дирихле для уравнения* $\mathcal{L}_{0,\sigma}f(z)=0$ *в единичном круге* $\mathbb{D}$ *с заданной граничной функцией* $h\in C(\mathbb{T})$ *записывается в следующем виде:*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}(1-|z|^2)\left(\frac{1}{|\zeta-z|^2}\mathcal{I}+\sigma\frac{2-\overline{\zeta}z}{(\zeta-z)^2}\mathcal{C}\right)h(\zeta)\,|d\zeta|. \tag{30}$$

Теорема 2. *Пусть функция* f *удовлетворяет в единичном круге* $\mathbb{D}$ *уравнению* $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}f=g$, *где* $g\in C(\overline{\mathbb{D}})$ *и* $|\tau|<1$, $|\sigma|<1$, *а на его границе совпадает с функцией* $h\in C(\mathbb{T})$. *Тогда в* $\mathbb{D}$ *функция* f *представляется в виде (*dA *— элемент площади)*

$$f(z)=\int_{\mathbb{T}}\mathcal{P}_{\tau,\sigma}(\zeta,z)h(\zeta)\,|d\zeta|+\int_{\mathbb{D}}\mathcal{G}_{\tau,\sigma}(\zeta,z)g(\zeta)\,dA(\zeta) \tag{31}$$

с ядром Пуассона $\mathcal{P}_{\tau,\sigma}$, *определенным согласно (15), и функцией Грина*

$$\mathcal{G}_{\tau,\sigma}(\zeta,z)=\Phi_{\tau,\sigma}(\zeta-z)+F(\zeta_\tau,z)+\left(\mathcal{C}-\frac{\sigma}{\tau}\mathcal{I}\right)G(\zeta,z), \tag{32}$$

где $\Phi_{\tau,\sigma}$ *— фундаментальное решение, заданное формулой (14),*

$$F(\zeta_\tau,z)=\frac{1}{(1-\sigma^2)\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{\sigma}{\tau}\right)^n\times$$
$$\times\log\frac{(1-\tau^{2n})^2+(-1)^n\tau^{n-1}(1+\tau^{2n})\zeta_\tau\mathcal{C}^n z_\tau-\tau^{2n-1}(\zeta_\tau^2+\mathcal{C}^n z_\tau^2)}{(1+(-1)^n\tau^{n-1}\zeta_\tau\mathcal{C}^n z-\tau^{2n-1}\mathcal{C}^n z^2)(1+(-1)^{n+1}\tau^n\zeta_\tau\mathcal{C}^{n+1}z-\tau^{2n+1}\mathcal{C}^{n+1}z^2)}\times$$
$$\times\,\mathcal{C}^n\left(\mathcal{I}+\frac{\sigma}{\tau}\mathcal{C}\right) \tag{33}$$

и

$$G(\zeta,z)=\frac{1}{(1-\sigma^2)\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{\sigma}{\tau}\right)^n\times$$
$$\times\log\frac{(1+(-1)^n\tau^{n+1}\zeta\mathcal{C}^n z)(1+(-1)^n\tau^{n-1}\zeta\mathcal{C}^n z_\tau-\tau^{2n-1}\zeta^2)}{(1+(-1)^n\tau^{n-1}\zeta\mathcal{C}^n z)(1+(-1)^{n+1}\tau^n\zeta\mathcal{C}^{n+1}z_\tau-\tau^{2n+1}\zeta^2)}\mathcal{C}^{n+1}, \tag{34}$$

причем в формулах (33), (34) при $n=0$ под знаком логарифма целиком игнорируется содержимое тех скобок, внутри которых встречается параметр τ в отрицательной степени.

◄ Формулы (32)–(34) выводят следующим образом. Функцию Грина $\mathcal{G}_{\tau,\sigma}(\zeta,z)$, удовлетворяющую при всех $z\in\mathbb{D}$ условиям

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}_{\tau,\sigma}(\zeta)\mathcal{G}_{\tau,\sigma}(\zeta,z)=\delta_0(\zeta-z), \quad \zeta\in\mathbb{D};\\ &\mathcal{G}_{\tau,\sigma}(\zeta,z)=0, \quad \zeta\in\mathbb{T},\end{aligned} \tag{35}$$

ищем в виде суммы

$$\mathcal{G}_{\tau,\sigma}(\zeta,z)=\Phi_{\tau,\sigma}(\zeta-z)+\widetilde{\mathcal{G}}_{\tau,\sigma}(\zeta,z), \tag{36}$$

а оператор $\widetilde{\mathcal{G}}_{\tau,\sigma}$ удовлетворяет, как следует из (35), условиям

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}_{\tau,\sigma}(\zeta)\widetilde{\mathcal{G}}_{\tau,\sigma}(\zeta,z)=0, \quad \zeta\in\mathbb{D};\\ &\widetilde{\mathcal{G}}_{\tau,\sigma}(\zeta,z)=-\Phi_{\tau,\sigma}(\zeta-z), \quad \zeta\in\mathbb{T}.\end{aligned} \tag{37}$$

Для решения задачи (37) удобнее всего применить формулу (21), предварительно записав при $\zeta\in\mathbb{T}$

$$\Phi_{\tau,\sigma}(\zeta,z)=\frac{1}{(1-\sigma^2)\pi}\left[\log(\zeta_\tau-z_\tau)\left(\mathcal{I}+\frac{\kappa}{\tau}\mathcal{C}\right)+\log\left(\overline{\zeta}-\overline{z}\right)-\frac{\sigma}{\tau}\log(\zeta-z)\mathcal{C}\right]=$$
$$=\frac{1}{(1-\sigma^2)\pi}\left[\log\left((\zeta-z)-\tau\left(\overline{\zeta}-\overline{z}\right)\right)\left(\mathcal{I}+\frac{\sigma}{\tau}\mathcal{C}\right)+\log\left(\overline{\zeta}-\overline{z}\right)-\frac{\sigma}{\tau}\log(\zeta-z)\mathcal{C}\right]=$$
$$=\frac{1}{(1-\sigma^2)\pi}\left[\log\left(\left(1-\overline{\zeta}z\right)-\tau\overline{\zeta}\left(\overline{\zeta}-\overline{z}\right)\right)\left(\mathcal{I}+\frac{\sigma}{\tau}\mathcal{C}\right)+\log(1-\zeta\overline{z})-\frac{\sigma}{\tau}\log\left(1-\overline{\zeta}z\right)\mathcal{C}\right].$$

Найдя функцию $\widetilde{\mathcal{G}}_{\tau,\sigma}$ и подставляя в (36), получаем функцию Грина $\mathcal{G}_{\tau,\sigma}$. ►

Следствие 3. *При значении параметра $\sigma=0$ функция Грина для единичного круга принимает вид*

$$\mathcal{G}_{\tau,0}(\zeta,\ z)=\frac{1}{\pi}\log\frac{(\zeta_\tau-z_\tau)\left(\overline{\zeta}-\overline{z}\right)\left(1+\tau\overline{\zeta}\,\overline{z}\right)}{(1-\zeta_\tau\overline{z}-\tau\overline{z}^2)\left(1-\overline{\zeta}z_\tau-\tau\overline{\zeta}^2\right)}, \tag{38}$$

а при $\tau=0$

$$\mathcal{G}_{0,\sigma}(\zeta,z)=\frac{2}{\pi}\log\left|\frac{\zeta-z}{1-\zeta\overline{z}}\right|+\frac{1}{\pi}\sigma\frac{\left(1-|\zeta|^2\right)\left(1-|z|^2\right)}{1-\zeta\overline{z}}\left(\sigma\frac{2-\zeta\overline{z}}{1-\zeta\overline{z}}+\frac{\overline{\zeta}\,\overline{z}(\zeta-z)-\left(\overline{\zeta}-\overline{z}\right)}{\left(1-\overline{\zeta}z\right)(\zeta-z)}\mathcal{C}\right). \tag{39}$$

Дополнение. С помощью полученного решения задачи Дирихле в единичном круге $\mathbb{D}$ для сильноэллиптических операторов $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}$ удается построить решение и в специальных эллипсах вида

$$\mathbb{E}_\tau=\{(x,y):(1-\tau)^2x^2+(1+\tau)^2y^2<1\}$$

с границей $\mathcal{E}_\tau=\{(x,y):(1-\tau)^2x^2+(1+\tau)^2y^2=1\}$.

Конструкция решения основана на следующем вспомогательном факте.

Лемма 1. *Пусть функция* f *удовлетворяет на множестве* $U \subset \mathbb{C}$ *уравнению* $\mathcal{L}_{\tau,\sigma} f = 0$, *где* $0 < |\tau| < 1$. *Тогда функция* $\psi = \mathcal{T}_{1,\frac{\sigma}{\tau}} \circ f \circ \mathcal{T}_{-\tau,1}^{-1}$ *удовлетворяет на множестве* $U' = \mathcal{T}_{-\tau,1} U$ *уравнению* $\mathcal{L}_{-\tau,\sigma} \psi = 0$.

◄ В самом деле поскольку $\mathcal{L}_{\tau,\sigma} f = 0$ на множестве U, то функция f на этом множестве представляется в виде (13), откуда получаем

$$\tilde{\psi}(z) := \mathcal{T}_{1,\frac{\sigma}{\tau}} f(z) = f(z) + \frac{\sigma}{\tau}\overline{f(z)} = F(z_\tau) + \frac{\sigma}{\tau}\overline{F(z_\tau)} + \left(1 - \frac{\sigma^2}{\tau^2}\right)\overline{G(z)}. \qquad (40)$$

Пусть $U' \ni z' = \mathcal{T}_{-\tau,1}(z) = \bar{z} - \tau z$ и обратно $U \ni z = \mathcal{T}_{-\tau,1}^{-1}(z') = \dfrac{\tau z' + \overline{z'}}{1-\tau^2}$. Легко проверить, что

$$z_\tau = \overline{z'}, \qquad \bar{z} = \frac{z'_{-\tau}}{1-\tau^2}.$$

Тогда из (40) находим

$$\psi(z') = \tilde{\psi} \circ \mathcal{T}_{-\tau,1}^{-1}(z') = F(\overline{z'}) + \frac{\sigma}{\tau}\overline{F(\overline{z'})} + \left(1 - \frac{\sigma^2}{\tau^2}\right)\overline{G\left(\frac{\overline{z'}_{-\tau}}{1-\tau^2}\right)}. \qquad (41)$$

Обозначив

$$F_\psi(z'_{-\tau}) = \left(1 - \frac{\sigma^2}{\tau^2}\right)\overline{G\left(\frac{\overline{z'}_{-\tau}}{1-\tau^2}\right)}, \qquad G_\psi(z') = \overline{F(\overline{z'})},$$

переписываем (41) в виде $\psi(z') = F_\psi(z'_{-\tau}) + \overline{G_\psi(z')} + \dfrac{\sigma}{\tau} G_\psi(z')$ с голоморфными функциями F_ψ и G_ψ, из которого ясно, что функция ψ удовлетворяет уравнению $\mathcal{L}_{-\tau,\sigma}\psi = 0$ на множестве U'. ►

Теорема 3. *Решение задачи Дирихле для уравнения* $\mathcal{L}_{\tau,\sigma} f(z) = 0$ *с параметрами* $|\tau| < 1$, $|\sigma| < 1$ *во внутренности* $\mathbb{E}_\tau$ *эллипса* $\mathcal{E}_\tau$ *при заданной граничной функции* $h \in C(\mathcal{E}_\tau)$ *дается формулой*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{E}_\tau} d_\zeta \left[\log\frac{(\zeta_\tau - z_\tau)(\bar{\zeta}_\tau - \tau z_\tau)}{\bar{\zeta} - \bar{z}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)^n \log\frac{\left(\mathcal{C}^{n+1}\zeta_\tau - \tau^{n-1} z_\tau\right)\left(\mathcal{C}^{n+1}(\zeta_\tau)_{-\tau^{2n+1}} - \tau^n(1-\tau^2)\bar{z}\right)}{\left(\mathcal{C}^{n+1}\zeta_\tau - \tau^{n+1} z_\tau\right)\left(\mathcal{C}^{n+1}(\zeta_\tau)_{-\tau^{2n-1}} - \tau^{n-1}(1-\tau^2) z\right)}\mathcal{C}^n\right] h(\zeta). \qquad (42)$$

◄ Пусть сначала $|\sigma| \neq |\tau|$ и функция f удовлетворяет уравнению $\mathcal{L}_{\tau,\sigma} f = 0$ в области $\mathbb{E}_\tau$. Тогда, согласно лемме, функция $\psi = \mathcal{T}_{1,\frac{\sigma}{\tau}} \circ f \circ \mathcal{T}_{-\tau,1}^{-1}$ удовлетворяет уравнению $\mathcal{L}_{-\tau,\sigma}\psi = 0$ в единичном круге $\mathbb{D} = \mathcal{T}_{-\tau,1}\mathbb{E}_\tau$, поэтому она может быть найдена по формуле (21) с заменой в ней параметра τ параметром $-\tau$. Тогда функция f находится по обратной формуле (имеющей место при $|\sigma| \neq |\tau|$) $f = \mathcal{T}^{-1}_{1,\frac{\sigma}{\tau}} \circ \psi \circ \mathcal{T}_{-\tau,1}$, причем интеграл по окружности $\mathbb{T}$ заменяется соответствующим интегралом по эллипсу $\mathcal{E}_\tau$, что приводит к формуле (42), которая остается верной и при $|\sigma| = |\tau|$.

Отметим, что при $\tau = 0$ область $\mathbb{E}_\tau$ совпадает с единичным кругом $\mathbb{D}$, а формула (43) с помощью предельного перехода превращается в (30). ►

Теорема 4. *Пусть функция f удовлетворяет во внутренности $\mathbb{E}_\tau$ эллипса $\mathcal{E}_\tau$ уравнению $\mathcal{L}_{\tau,\sigma} f = g$, где $g \in C(\overline{\mathbb{E}}_\tau)$ и $|\tau| < 1$, $|\sigma| < 1$, а на самом эллипсе $\mathcal{E}_\tau$ совпадает с функцией $h \in C(\mathcal{E}_\tau)$. Тогда в области $\mathbb{E}_\tau$ функция f записывается в виде* $f(z) = -\int\limits_{\mathcal{E}_\tau} \mathcal{P}_{-\tau,\sigma}(\overline{\zeta}_\tau, \overline{z}_\tau) h(\zeta) |d\zeta_\tau| + \int\limits_{\mathbb{E}_\tau} \mathcal{G}_{-\tau,\sigma}(\overline{\zeta}_\tau, \overline{z}_\tau) g(\zeta) dA(\zeta)$.

Заключение. Приведено каноническое представление для эллиптических систем (1), имеющее вид возмущения уравнения Лапласа по двум параметрам, которые являются малыми в случае сильной эллиптичности. Для эллиптических систем канонического вида приведены явные формулы для общего и для фундаментального решений. Для сильноэллиптических систем найдены интеграл Пуассона и функция Грина в круге и эллипсе специального вида. Эти результаты получены методом решения задачи Дирихле по степеням одного из малых параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Agmon S., Douglis A., Nirenberg L.* Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions // Comm. Pure Appl. Math. 1964. Vol. 17. Iss. 1. P. 35–92. DOI: 10.1002/cpa.3160170104

2. *Somigliana C.* Sui sisteme simmetrici di equazioni a derivate parziali // C. Annali di Matematica. 1894. Vol. 22. Iss. 1. P. 143–156. DOI: 10.1007/BF02353934
URL: https://doi.org/10.1007/BF02353934

3. *Вишик М.И.* О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений // Матем. сборник. 1951. Т. 29. № 3. С. 615–676.

4. *Ding S.K., Wang K.T., Ma J.N., Shun Ch.L., Chang T.* On the definition of the second order elliptic system of partial differential equations with constant coefficients // Acta Math. Sinica. 1960. Vol. 10. P. 276–287.

5. *Петровский И.Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Физматгиз, 1961. 400 с.

6. *Keng H.L., Wei L., Wu C.Q.* Second-order systems of partial differential equations in the plane. Boston, London, Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program, 1985. 292 p.

7. *Verchota G.C., Vogel A.L.* Nonsymmetric systems on nonsmooth planar domains // Transactions of the American Mathematical Society. 1997. Vol. 349. No. 11. P. 4501–4535.

8. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 248 с.

9. *Багапш А.О.* Интеграл Пуассона и функция Грина для одной сильно эллиптической системы уравнений в круге и эллипсе // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2016. Т. 56. № 12. С. 2065–2072.

10. *Багапш А.О., Федоровский К.Ю.* C^1-аппроксимация функций решениями эллиптических систем второго порядка на компактах в $\mathbb{R}^2$ // Комплексный анализ и его приложения. Сб. статей. Труды МИАН. Т. 298. М., 2017. С. 42–57.

11. *Шабат Б.В.* Функции одного переменного // Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1985. С. 13–258.

Багапш Астамур Олегович — ассистент кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1), младший научный сотрудник Вычислительного центра ФИЦ «Информатика и управление» РАН (Российская Федерация, 119333, Москва, ул. Вавилова, д. 44, корп. 2).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Багапш А.О. Функция Грина и интеграл Пуассона в круге для сильноэллиптических систем с постоянными коэффициентами // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2017. № 6. С. 4–18. DOI: 10.18698/1812-3368-2017-6-4-18

GREEN'S FUNCTION AND POISSON INTEGRAL IN A CIRCLE FOR STRONGLY ELLIPTIC SYSTEMS WITH CONSTANT COEFFICIENTS

A.O. Bagapsh a.bagapsh@gmail.com

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
Computing Center FRC Informatics and Management, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

Abstract

The paper deals with Dirichlet problem for a homogeneous strongly elliptic second-order system with constant coefficients, in other words, for a partial differential equation of the following kind $\mathcal{L}_{\tau,\sigma} f = 0$, where f is a complex-valued function, and $\mathcal{L}_{\tau,\sigma} = (\partial\overline{\partial} + \tau\partial^2)\mathcal{I} + \sigma(\tau\partial\overline{\partial} + \partial^2)\mathcal{C}$. Here ∂, $\overline{\partial}$ are Cauchy — Riemann operators; $\mathcal{I}$ is an identity operator; $\mathcal{C}: z \mapsto \overline{z}$ is a complex conjugation operator; τ, σ are such parameters, that $\tau, \sigma \in (-1,1)$. For such systems, integral formulas of the Poisson type, Green's function and solutions of Dirichlet problem in a circle and an ellipse of a special form are obtained. The $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}$ operator is a perturbation of Laplace operator Δ, and the Dirichlet problem solution for the equation $\mathcal{L}_{\tau,\sigma} f = 0$ is obtained as a sum of a series in powers of the parameter σ. Functions that are coefficients of the corresponding series can be found by solving the "recurrent" sequence of Dirichlet problems for the ordinary Laplace and Poisson equations

Keywords

Elliptic systems, strong ellipticity, Dirichlet problem, Poisson integral, Green's function, skew-symmetric systems, Lame system

Received 25.05.2017

REFERENCES

[1] Agmon S., Douglis A., Nirenberg L. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1964, vol. 17, iss. 1, pp. 35–92. DOI: 10.1002/cpa.3160170104

[2] Somigliana C. Sui sisteme simmetrici di equazioni a derivate parziali. *C. Annali di Matematica,* 1894, vol. 22, iss. 1, pp. 143–156. DOI: 10.1007/BF02353934
Available at: https://doi.org/10.1007/BF02353934

[3] Vishik M.I. On strongly elliptic systems of differential equations. *Matem. Sbornik*, 1951, vol. 29, no. 3, pp. 615–676 (in Russ.).

[4] Ding S.K., Wang K.T., Ma J.N., Shun Ch.L., Chang T. On the definition of the second order elliptic system of partial differential equations with constant coefficients. *Acta Math. Sinica*, 1960, vol. 10, pp. 276–287.

[5] Petrovskiy I.G. Lektsii ob uravneniyakh s chastnymi proizvodnymi [Lectures on equations with two derivatives]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1961. 400 p.

[6] Keng H.L., Wei L., Wu C.Q. Second-order systems of partial differential equations in the plane. Boston, London, Melbourne, Pitman Advanced Publishing Program, 1985. 292 p.

[7] Verchota G.C., Vogel A.L. Nonsymmetric systems on nonsmooth planar domains. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1997, vol. 349, no. 11, pp. 4501–4535.

[8] Landau L.D., Lifshits E.M. Teoreticheskaya fizika. T. 7. Teoriya uprugosti [Theoretical physic. Vol. 7. Elasticity theory]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 248 p.

[9] Bagapsh A.O. The Poisson integral and Green's function for one strongly elliptic system of equations in a circle and an ellipse. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2016, vol. 56, iss. 12, pp. 2035–2042. DOI: 10.1134/S0965542516120046

[10] Bagapsh A.O., Fedorovskiy K.Yu. C^1-approksimatsiya funktsiy resheniyami ellipticheskikh sistem vtorogo poryadka na kompaktakh v $\mathbb{R}^2$ [C^1-approximation of functions by elliptic systems solutions of second order on compacts in $\mathbb{R}^2$]. *Kompleksnyy analiz i ego prilozheniya. Sbornik statey. Trudy MIAN. T. 298* [Complex analysis and its application. Collection of articles. Trudy MIAN. Vol. 298]. Moscow, 2017, pp. 42–57 (in Russ.).

[11] Shabat B.V. Funktsii odnogo peremennogo. Vvedenie v kompleksnyy analiz [Functions of one variable. In: Introduction to complex analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1985, pp. 13–258 (in Russ.).

Bagapsh A.O. — Assistant of Applied Mathematics Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation), Senior Research Scientist of Computing Center FRC Informatics and Management, Russian Academy of Sciences (Vavilova ul. 44, korp. 2, Moscow, 119333 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Bagapsh A.O. Green's Function and Poisson Integral in a Circle Disk for Strongly Elliptic Systems with Constant Coefficients. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2017, no. 6, pp. 4–18 (in Russ.). DOI: 10.18698/1812-3368-2017-6-4-18