УДК 517.977.1 DOI: 10.18698/1812-3368-2017-6-103-125

ДЕКОМПОЗИЦИЯ СИСТЕМ И ТЕРМИНАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Ю.С. Белинская usbelka@mail.ru
В.Н. Четвериков chetverikov.vl@yandex.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Рассмотрена задача терминального управления, которая состоит в определении программного движения, переводящего динамическую систему из заданного начального состояния в заданное конечное. Исследована возможность свести эту задачу к двум граничным задачам меньшей размерности. Подход основан на преобразовании системы в декомпозируемую форму. При этом использовано преобразование наиболее общего типа, когда зависимые и независимые переменные одной системы могут зависеть не только от зависимых и независимых переменных второй системы, но и от производных до некоторого конечного порядка зависимых переменных по независимым. Показано, что рассматриваемые декомпозиции систем с управлением определяются алгебрами Ли векторных полей на бесконечномерном многообразии. Получены условия на алгебры векторных полей, определяющие декомпозиции систем и декомпозиции задач терминального управления. Два разобранных примера демонстрируют возможность применения предлагаемого подхода к решению конкретных задач терминального управления

Ключевые слова

Плоские системы, задача терминального управления, декомпозиция систем с управлением

Поступила в редакцию 21.11.2016

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации поддержки ведущих научных школ НШ-53.2014.1 и грантов РФФИ № 16-07-01153 и № 14-01-00424

Введение. Задача терминального управления (*point-to-point steering problem*) заключается в определении программного движения, переводящего динамическую систему из заданного начального состояния в заданное конечное. Время движения из начального состояния в конечное может быть фиксированным или выбираться из каких-либо дополнительных соображений. Для нелинейных динамических систем нет общих методов решения этой задачи. В случае плоских систем с ограничением известно несколько работ, посвященных методам решения этой задачи (например, [1–4]). Тем не менее разработка новых методов решения представляет научный и инженерно-технический интерес.

Подход к решению задачи терминального управления для плоских систем с учетом ограничений без фиксирования времени движения предложен в работе [4].

Этот подход заключается в построении сначала пути в пространстве значений плоского выхода, а затем в построении зависимости параметра пути от времени. Путь следования на первом этапе выбирается в области, соответствующей точкам покоя системы управления. На втором этапе численно решается задача минимизации времени движения с учетом всех ограничений системы.

В указанной работе показывается, что предложенный в работе [4] подход можно интерпретировать как декомпозицию системы, преобразующую задачу терминального управления в две связанные граничные задачи: для пути следования и для зависимости параметра пути от времени. Далее введено понятие декомпозиции задачи терминального управления и исследован вопрос о ее построении для произвольной системы с управлением методами бесконечномерной геометрии [5, гл. 6]. В отличие от известных работ [6–15], касающихся декомпозиции систем управления, здесь использовано преобразование более общего типа, а именно, когда зависимые и независимые переменные одной системы выражаются не только через зависимые и независимые переменные второй системы, но и через производные до некоторого конечного порядка зависимых переменных по независимым. Применение более широкого класса преобразования расширяет класс декомпозируемых систем. В настоящей работе доказано, что для построения декомпозиции «общего вида» достаточно найти алгебру Ли векторных полей, удовлетворяющих ряду условий.

Декомпозиция систем с управлением. Рассмотрим систему с управлением общего вида

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

где t — независимая переменная; $x = (x_1, \dots, x_n)$ — вектор состояния; $u = (u_1, \dots, u_m)$ — вектор управления; $\mathcal{X}$, $\mathcal{U}$ — области изменения векторов; $f = (f_1, \dots, f_n)$ — гладкая векторная функция; $\dot{x} \equiv dx / dt$. Здесь и далее под гладкостью понимается бесконечная дифференцируемость.

Декомпозицией системы с управлением называют преобразование системы в систему вида

$$a(t, z, \dot{z}) = 0, \ \ a \in \mathbb{R}^{n_1}, \ \ z \in \mathbb{R}^{n_1 + m_1}; \tag{2}$$

$$a_1(t, \zeta, \dot{\zeta}, z, \dot{z}) = 0, \ \ a_1 \in \mathbb{R}^{n_2}, \ \ \xi \in \mathbb{R}^{n_2 + m_2}. \tag{3}$$

Декомпозиция позволяет решать систему в два этапа: сначала находить решение $z(t)$ системы (2), а затем решение $\zeta(t)$ системы

$$a_1(t, \zeta, \dot{\zeta}, z(t), \dot{z}(t)) = 0, \tag{4}$$

зависящей от решения $z(t)$.

Рассмотрим наиболее общий вид уравнений (2), (3) и наиболее общий вид преобразования из системы (1) в систему (2), (3). Такие преобразования в бесконечномерной геометрии дифференциальных уравнений называются $\mathcal{C}$-диффеоморфизмами [5, гл. 6]. Их точное определение будет приведено далее, а здесь отметим, что при таком преобразовании z и ζ могут быть функциями t, x, u $\dot{u}, \ldots, u^{(l)}$ для некоторого конечного l. Кроме того, независимая переменная t может изменяться и зависеть от аналогичного набора переменных. Преобразование должно быть обратимым, и обратное преобразование должно иметь аналогичный общий вид. Можно доказать, что $\mathcal{C}$-диффеоморфизмы сохраняют размерность управления: $m_1 + m_2 = m$, но могут не сохранять размерность состояния: $n_1 + n_2 \neq n$ (см., например, [16]).

Такой тип преобразований используется и в определении плоской системы [16], а именно пусть l — некоторое неотрицательное целое. Полагая переменные

$$t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m, \dot{u}_1, \ldots, \dot{u}_m, \ddot{u}_1, \ldots, u_m^{(l)} \tag{5}$$

независимыми, рассмотрим пространство с такими координатами. Обозначим какую-либо область этого пространства через $\mathcal{O}^{(l)}$.

Систему (1) называют (*дифференциально*) *плоской* в области $\mathcal{O}^{(l)}$, если на $\mathcal{O}^{(l)}$ определены функции

$$y_1 = h_1(t, x, u, \dot{u}, \ldots, u^{(l)}), \ldots, \; y_m = h_m(t, x, u, \dot{u}, \ldots, u^{(l)}), \tag{6}$$

удовлетворяющие двум условиям. Во-первых, переменные x и u выражаются через t, функции (6) и их производные в силу системы (1) до какого-то конечного порядка:

$$x = X\left(t, \; y_1, \; \dot{y}_1, \ldots, \; y_1^{(k_1)}, \; y_2, \ldots, y_m^{(k_m)}\right); \tag{7}$$

$$u = U\left(t, \; y_1, \; \dot{y}_1, \ldots, \; y_1^{(k_1+1)}, \; y_2, \ldots, \; y_m^{(k_m+1)}\right). \tag{8}$$

Во-вторых, любой конечный набор функций (6), их производных в силу системы (1) и функции t функционально независим. При этом набор функций (6) называют *плоским* (или *линеаризующим*) *выходом* системы (1).

Если в этом определении разрешить еще и преобразовывать независимую переменную, то получится определение *орбитально плоской* системы [16, 17].

Приведем пример декомпозиции «общего вида».

Пример 1. В основе подхода, предложенного в работе [4], лежит следующая декомпозиция произвольной плоской системы. Любое решение $(x(t), u(t))$ плоской системы (1) с плоским выходом (6) определяет кривую γ:

$$y_i = h_i(t, \; x(t), \; u(t), \; \dot{u}(t), \ldots, \; u^{(l)}(t)), \; i = 1, \ldots, m,$$

в пространстве $\mathbb{R}^m$ с координатами $y_1, \ldots, y_m$. Обратно, если кривая γ в $\mathbb{R}^m$ задана параметрическими уравнениями $y_i = y_i(\tau)$, $i = 1, \ldots, m$, с параметром τ, то для восстановления решения системы необходимо сначала задать зависимость $\tau(t)$ параметра от времени, а затем, используя соотношения (7) и (8), вычислить $x(t)$ и $u(t)$. Кривую γ и функцию $\tau(t)$ можно понимать как плоские выходы двух плоских систем $\mathcal{S}$ и $\mathcal{Y}$ соответственно. Пара систем $\mathcal{S}$ и $\mathcal{Y}$ (система $\mathcal{Y}$ зависит от решений системы $\mathcal{S}$) представляет собой декомпозицию системы (1).

Декомпозиция задач терминального управления. Рассмотрим систему (1), для которой поставлена задача терминального управления с граничными условиями

$$x(t_{\text{Н}}) = x_{\text{Н}}, \quad x(t_{\text{К}}) = x_{\text{К}}, \tag{9}$$

а именно требуется найти такое решение системы (1), которое удовлетворяет условиям (9). Если система (1) плоская, то условия (9) можно переписать в виде

$$X(t_{\text{Н}},\, y_1(t_{\text{Н}}),\ldots, y_m^{(k_m)}(t_{\text{Н}})) = x_{\text{Н}}, \quad X(t_{\text{К}},\, y_1(t_{\text{К}}),\ldots,\, y_m^{(k_m)}(t_{\text{К}})) = x_{\text{К}}.$$

Часть из этих условий не зависит от выбора функции $\tau(t)$ (см. пример 1) и, следовательно, представляет собой граничные условия на кривую γ. Остальные условия есть граничные условия на функцию $\tau(t)$.

Переменные плоского выхода могут иметь ограничения, которые возникают или из физической постановки задачи, или из ограничений на область значений функций (6). Часть из них есть ограничения на кривую γ (см. пример 1), а оставшаяся часть — на функцию $\tau(t)$. Таким образом, задача терминального управления (1), (9) сводится к двум граничным задачам: на кривую γ и функцию $\tau(t)$. Обе задачи есть задачи на решения плоских систем с ограничениями.

Рассмотрим теперь произвольную систему вида (1), которая имеет декомпозицию (2), (3). Предположим, что задача терминального управления на решения системы (1) с граничными условиями (9) сводится к двум граничным задачам: на решения $z(t)$ системы (2) и на решения $\zeta(t)$ системы (2). Такое разделение задачи терминального управления на две граничные задачи назовем *декомпозицией задачи терминального управления*.

Пример 2. Движение автомобиля при отсутствии проскальзывания описывается [17] системой

$$\dot{x} = u\cos\theta,\;\; \dot{z} = u\sin\theta,\;\; \dot{\theta} = \frac{u}{l}\operatorname{tg}\varphi, \tag{10}$$

где x, z — декартовы координаты середины задней оси автомобиля; u — скорость автомобиля; θ — угол между осью абсцисс и прямой, проходящей через середины двух осей; φ — угол поворота колес передней оси относительно указанной прямой; l — расстояние между серединами двух осей. Вектор (x, z, θ) является состоянием системы, вектор (u, φ) — ее управлением.

Система (10) плоская в области $\{u \neq 0\}$ с плоским выходом $y_1 = x, y_2 = z$ [17]. На переменные системы (10) налагаются естественные ограничения на скорость ($(|u| \leq u_0)$, на угол поворота передних колес $(|\varphi| \leq \varphi_0)$ и на ускорение $(|\dot{u}| \leq a)$.

Задача терминального управления для системы (10) с начальными значениями $x_{\text{Н}}, z_{\text{Н}}, \theta_{\text{Н}}$ и конечными значениями $x_{\text{К}}, z_{\text{К}}, \theta_{\text{К}}$ сводится к двум связанным задачам терминального управления. Первая задача состоит в поиске кривой (траектории автомобиля) с началом в точке $(x_{\text{Н}}, z_{\text{Н}})$ и концом в точке $(x_{\text{К}}, z_{\text{К}})$ с наклоном касательных $\theta_{\text{Н}}$ и $\theta_{\text{К}}$ в них. Если кривая, заданная параметрическими уравнениями $x = x(\tau)$, $z = z(\tau)$, $\tau \in [\tau_{\text{Н}}, \tau_{\text{К}}]$, есть решение этой задачи, то вторая задача состоит в поиске такой функции $\tau(t)$, $t \in [t_{\text{Н}}, t_{\text{К}}]$, что $\tau(t_{\text{Н}}) = \tau_{\text{Н}}$, $\tau(t_{\text{К}}) = \tau_{\text{К}}$. Скорость и ускорение системы зависят от выбора функции $\tau(t)$, тогда как угол φ не зависит, так как $\operatorname{tg}\varphi / l$ есть кривизна кривой. Поэтому ограничения на угол φ, а также на x и z учитываются при решении первой задачи, а ограничения на скорость и ускорение — при решении второй задачи. Получаем декомпозицию задачи терминального управления.

Для формулировки одного из подходов к построению декомпозиций систем и задач терминального управления понадобятся некоторые понятия и факты бесконечномерной геометрии систем с управлением.

Джеты кривых. Для построения геометрических моделей дифференциальных уравнений, как правило, используют широко известное понятие джета (струи) векторной функции. Однако для построения геометрических моделей уравнений на кривые (см. пример 1) необходимо использовать обобщение этого понятия [5], которое сформулируем здесь.

На произвольном гладком многообразии E размерности $n+1$ рассмотрим две гладкие регулярные кривые γ_1 и γ_2, пересекающиеся в точке $a \in E$. Пусть в координатах $(x_0, \ldots, x_n)$ в окрестности точки a кривые γ_1 и γ_2 задаются системами уравнений

$$x_i = g_{1i}(x_0),\ i = 1, \ldots, n, \ \text{и}\ x_i = g_{2i}(x_0),\ i = 1, \ldots, n, \tag{11}$$

соответственно. Если для каждого $i = 1, \ldots, n$ функции g_{1i} и g_{2i} в точке a имеют одинаковые производные до порядка k включительно, то утверждают, что кривые γ_1 и γ_2 *касаются в точке a с порядком k* (здесь $0 \le k \le \infty$).

Можно показать, что если кривые касаются в одной системе координат, то они касаются с тем же порядком в любой другой системе координат, в которой задаются уравнениями вида (11). Касание кривых в точке a с порядком k задает отношение эквивалентности на множестве гладких регулярных кривых в E, проходящих через точку a. Класс эквивалентности кривой γ относительно этого отношения эквивалентности обозначают через $[\gamma]_a^k$ и называют *k-джетом кривой γ в точке a.*

При $k < \infty$ множество k-джетов кривых в точке a обозначают через $J_a^k E$, а множество k-джетов кривых во всех точках E — через $J^k E$ и называют *пространством k-джетов кривых многообразия E.*

На множестве $J^k E$ вводится следующая структура гладкого многообразия. Пусть $(x_0, \ldots, x_n)$ — система координат в некоторой области U многообразия E. Область U есть подмногообразие в E, поэтому $J^k U$ есть подмножество в $J^k E$. Функции $x_0, \ldots, x_n$ на U определяют функции $x_0, \ldots, x_n$ на $J^k U$, которые в

k-джете $[\gamma]_a^k$ из $J^k U$ равны координатам точки a. Рассмотрим гладкие регулярные кривые в U, касательные векторы к которым имеют ненулевую координату при $\partial / \partial x_0$. Такие кривые задаются системами уравнений вида

$$x_j = g_j(x_0), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{12}$$

Множество k-джетов кривых вида (12) во всех точках $a \in U$ есть подмножество $\mathcal{V}$ в $J^k U$. Для $l = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, n$ определим на $\mathcal{V}$ функцию $x_j^{(l)}$, которая в точке $[\gamma]_a^k$, где γ — кривая в U, заданная системой уравнений (12), равна производной $d^l g_j / dx_0^l$ в соответствующей точке $x_0 \in \mathbb{R}$. Можно показать, что функции $(x_0, x_j, x_j^{(l)})$ определяют систему координат на множестве $\mathcal{V}$. Изменяя область U и выбор координаты x_0, получаем другие системы координат в $J^k E$. Поскольку регулярные кривые в каждой точке имеют ненулевые касательные векторы, в окрестности каждой точки $J^k E$ получаем систему координат. Такие системы координат в $J^k E$ называются *каноническими*.

При $k > q$ класс эквивалентности $[\gamma]_a^k \in J^k E$ однозначно определяет класс $[\gamma]_a^q \in J^q E$, поэтому можно определить проекции

$$\varpi_{k,q} : J^k E \to J^q E, \quad \varpi_{k,q}([\gamma]_a^k) = [\gamma]_a^q, \quad \forall k > q,$$

которые являются расслоениями. Джет нулевого порядка $[\gamma]_a^0$ можно отождествить с точкой a, поэтому $J^0 E = E$.

Каждое гладкое отображение $F : E_1 \to E_2$ однозначно определяет гладкие отображения $F^{(k)} : J^k E_1 \to J^k E_2$, $[\gamma]_a^k \mapsto [F(\gamma)]_{F(a)}^k$, называемые *поднятиями* F и являющиеся морфизмами расслоений $\varpi_{k,q}$:

$$\varpi_{k,q} \circ F^{(k)} = F^{(q)} \circ \varpi_{k,q}, \quad k > q. \tag{13}$$

Область определения поднятия $F^{(k)}$ может быть только частью пространства $J^k E_1$, так как множество $F(\gamma)$ может не быть гладкой регулярной кривой в окрестности точки $F(a)$. Однако, если касательные векторы к кривой γ в точке a не принадлежат ядру дифференциала отображения F, то существует такая окрестность V точки a, что образ $F(\gamma \cap V)$ есть гладкая регулярная кривая и можно определить $F^{(k)}([\gamma]_a^k) = [F(\gamma \cap V)]_{F(a)}^k$. В частности, поднятие любого диффеоморфизма из E_1 определено на всем $J^k E_1$.

Предположим, что на многообразии E задано расслоение $\pi : E \to \mathbb{R}$. Образ любого сечения этого расслоения есть кривая в E. *k-Джетом сечения s в точке $t \in \mathbb{R}$* называют k-джет образа s в точке $s(t)$ и обозначают $[s]_t^k$. Множество всех k-джетов сечений расслоения π во всех точках $t \in \mathbb{R}$ обозначают $J^k \pi$ и называют *пространством k-джетов расслоения* π.

Отметим, что $J^k \pi \subset J^k E$, а выбор координаты x_0 в $U \subset E$ при задании системы координат в $J^k E$ можно понимать как выбор расслоения $\pi : U \to \mathbb{R}$,

$\pi(x_0,\ldots,x_n)=x_0$. Таким образом, карты канонических координат на J^kE имеют вид $J^k\pi$ при соответствующем выборе расслоения π.

Геометрическая модель систем с управлением. Рассмотрим теперь систему вида (1). Любое ее решение $(x(t),\ u(t))$ будем понимать как сечение тривиального расслоения $\pi : E=\mathbb{R}\times\mathcal{X}\times\mathcal{U}\to\mathbb{R},\ \pi(t,x,u)=t,$ т. е. как отображение $s: t\mapsto(t,\ x(t),\ u(t))$ из $\mathbb{R}$ в E. Рассмотрим координаты $t,\ x_i,\ u_j$ в E и соответствующие координаты $t,\ x_i,\ x_i^{(1)},\ u_j,\ u_j^{(1)}$ в $J^1\pi\subset J^1E$. Отождествим переменные $t, x_i, u_j, \dot{x}_i$, входящие в запись системы (1), с соответствующими координатами в $J^1\pi$ ($\dot{x}_i=x_i^{(1)}$) и получим подмногообразие $\mathcal{E}\subset J^1\pi$. Сечение s расслоения π есть решение системы (1), если в произвольной точке t из области определения этого сечения 1-джет $[s]_t^1$ лежит в $\mathcal{E}$.

Поверхность $\mathcal{E}$ является инвариантным объектом по сравнению с ее записью в виде системы (1), так как аналитическая запись одной и той же системы может быть различной. Далее *системой дифференциальных уравнений* порядка k назовем любую поверхность $\mathcal{E}\subset J^k\pi$.

Каждая гладкая регулярная кривая γ в E определяет гладкую регулярную кривую $j_k(\gamma)=\{[\gamma]_a^k : a\in\gamma\}$ в J^kE. Будем называть ее *k-джетом кривой* γ.

Касание с порядком l k-джетов $j_k(\gamma_1)$ и $j_k(\gamma_2)$ означает касание кривых γ_1 и γ_2 с порядком $k+l$. Поэтому система дифференциальных уравнений порядка k продолжается до эквивалентной ей системы дифференциальных уравнений порядка $k+l$. Для точного определения этой конструкции необходимо связать переменные x_i и $\dot{x}_i$, используя следующие геометрические понятия.

Пусть $\theta=[\gamma]_a^k$. Касательную в точке $\theta\in J^kE$ к k-джету $j_k(\gamma)$ кривой γ называют *R-прямой*.

Отметим, что R-прямая в точке $[\gamma]_a^k$ определяется $(k+1)$-джетом кривой γ. Кроме того, точку $\theta'\in J^{k+1}E$ можно рассматривать как пару, состоящую из точки $\theta=\varpi_{k+1,k}(\theta')\in J^kE$ и R-прямой $R_{\theta'}\subset T_\theta(J^kE)$, которая представляет собой касательную к k-джету такой кривой γ, что $[\gamma]_a^{k+1}=\theta'$. Другими словами, θ' — набор значений производных до порядка $k+1$, а прямая $R_{\theta'}\subset T_\theta(J^kE)$ определяется значениями первых производных от k-х производных.

Плоскостью Картана $\mathcal{C}_\theta^k(E)$ в точке $\theta\in J^kE$ называется линейная оболочка всех прямых $R_{\theta'}$ при $\theta'\in\varpi_{k+1,\,k}^{-1}(\theta)$, т. е. линейная оболочка всех касательных к k-джетам кривых, проходящих через θ. Соответствие $\mathcal{C}:\theta\mapsto\mathcal{C}_\theta^k(E)$ называется *распределением Картана* на J^kE.

В канонических координатах на J^kE распределение Картана задается набором 1-форм:

$$\omega_j^{(l)}=dx_j^{(l)}-x_j^{(l+1)}dt,\ \ l=0,\ldots,\ k-1,\ \ j=1,\ldots,n.$$

Любая $C^\infty(J^kE)$-линейная комбинация таких форм называется *формой Картана* на J^kE.

Рассмотрим проекцию $\pi_k : J^k\pi \to \mathbb{R}$, где $\pi_k([s]_t^k) = t$. Можно показать [5, гл. 3, теорема 1.1], что решение данного уравнения $\mathcal{E} \subset J^k\pi$ есть не что иное, как 1-мерное интегральное многообразие распределения Картана на $J^k\pi$, целиком лежащее на поверхности $\mathcal{E}$ и без вырождения проецирующееся отображением π_k на прямую $\mathbb{R}$.

Пусть $\mathcal{E} \subset J^k\pi$. Множество $\mathcal{E}^{(1)} \subset J^{k+1}\pi$, состоящее из таких точек $\theta' \in J^{k+1}\pi$, что R-прямая $R_{\theta'}$ касается уравнения $\mathcal{E}$ в точке $\theta = \varpi_{k+1,k}(\theta')$, называют *первым продолжением уравнения* $\mathcal{E}$. Продолжение $\mathcal{E}^{(l)}$ порядка l уравнения $\mathcal{E}$ определяется индуктивно как первое продолжение продолжения $\mathcal{E}^{(l-1)}$ порядка $l-1$: $\mathcal{E}^{(l)} = (\mathcal{E}^{(l-1)})^{(1)}$. Многообразие $\mathcal{E}^{(l)}$ лежит в $J^{k+l}\pi$ и задается всеми дифференциальными следствиями уравнения $\mathcal{E}$ вплоть до порядка l включительно.

Распределение Картана $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ на уравнении $\mathcal{E} \subset J^k\pi$ определяется как ограничение на $\mathcal{E}$ распределения Картана на J^kE, т. е. $\mathcal{C}_\theta(\mathcal{E}) = \mathcal{C}_\theta^k(E) \cap T_\theta(\mathcal{E})$ для $\theta \in \mathcal{E}$.

Бесконечные продолжения систем и отображений. *Пространство бесконечных джетов* $J^\infty E$ определяется как обратный предел цепочки проекций

$$J^0E \xleftarrow{\varpi_{1,0}} J^1E \longleftarrow \ldots \longleftarrow J^kE \xleftarrow{\varpi_{k+1,k}} J^{k+1}E \leftarrow \ldots,$$

а именно элементом $J^\infty E$ является последовательность таких точек $\theta_k \in J^kE$, $k \geq 0$, что

$$\theta_0 \xleftarrow{\varpi_{1,0}} \theta_1 \longleftarrow \ldots \longleftarrow \theta_k \xleftarrow{\varpi_{k+1,k}} \theta_{k+1} \longleftarrow \ldots$$

Для $l \geq 0$ определим отображение $\varpi_{\infty,l} : J^\infty E \to J^lE$ формулой $\varpi_{\infty,l}(\theta) = \theta_l$, где θ — последовательность $\{\theta_k\}_{k\geq 0}$. Канонические координаты на многообразиях конечных джетов порождают *канонические координаты* $(x_0, x_j, x_j^{(l)})$ на $J^\infty E$, где $j = 1, \ldots, n$; l — произвольное натуральное число.

Бесконечный джет $[\gamma]_a^\infty$ кривой γ в точке a можно понимать как последовательность ее k-джетов $[\gamma]_a^k$, $k \geq 0$. В частности, бесконечный джет $[s]_t^\infty$ сечения s расслоения π в точке t есть последовательность k-джетов $[s]_t^k$, $k \geq 0$. Кривую $j_\infty(s) = \{[s]_t^\infty : t \in \mathbb{R}\}$ в $J^\infty\pi$ называют *бесконечным джетом сечения* s.

На множестве $J^\infty E$ определяются аналоги основных дифференциально-геометрических понятий, встречающихся в дифференциальном исчислении на конечномерных многообразиях. Определим их кратко (подробнее см. работу [5, гл. 4]). *Касательный вектор* X_θ к многообразию $J^\infty E$ в точке $\theta = \{\theta_k\}_{k\geq 0} \in J^\infty E$ определяется как совокупность $\left\{X_{\theta_k}\right\}$ таких касательных векторов к многообразиям J^kE в точках θ_k соответственно, что

$$X_{\theta_0} \xleftarrow{(\varpi_{1,0})_*} X_{\theta_1} \longleftarrow X_{\theta_k} \xleftarrow{(\varpi_{k+1,k})_*} X_{\theta_{k+1}} \longleftarrow \dots \qquad (14)$$

По определению, касательное отображение $(\varpi_{\infty,l})_*$ проецирует вектор $\{X_{\theta_k}\}_{k\geq 0}$ в вектор X_{θ_l}.

Как и в случае конечномерных многообразий, касательный вектор к $J^\infty E$ интерпретируется как дифференцирование алгебры гладких функций со значениями в $\mathbb{R}$, а векторное поле — как дифференцирование этой алгебры. При этом гладкие функции на $J^\infty E$ определяются следующим образом. Обозначим через $\mathcal{F}_k(E)$ алгебру гладких функций на конечномерном многообразии $J^k E$. Для чисел k, l таких, что $k \geq l$, имеем вложение $(\varpi_{k,l})^* : \mathcal{F}_l(E) \to \mathcal{F}_k(E)$. Отождествляя функции $f \in \mathcal{F}_l(E)$ и $(\varpi_{k,l})^*(f) \in \mathcal{F}_k(E)$, примем $\mathcal{F}(E) = \bigcup_{k\geq 0} \mathcal{F}_k(E)$. Элементы $\mathcal{F}(E)$ называются *гладкими функциями* на $J^\infty E$. Аналогично *дифференциальные формы* на $J^\infty E$ определяются как элементы множества $\Lambda^i(J^\infty E) = \bigcup_{k\geq 0} \Lambda^i(J^k E)$.

В канонических координатах на $J^\infty E$ векторные поля, т. е. дифференцирования алгебры $\mathcal{F}(E)$, представляют собой $\mathcal{F}(E)$-линейные комбинации (возможно бесконечные) частных производных по координатам. Например, выражение

$$D_{x_0} = \frac{\partial}{\partial x_0} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{\infty} x_i^{(j+1)} \frac{\partial}{\partial x_i^{(j)}}$$

задает векторное поле на $J^\infty E$, которое называют *полной производной по переменной* x_0. Отметим следующее *определяющее свойство* векторного поля D_{x_0}. В произвольной точке $\theta = \{\theta_k\} \in J^\infty E$ вектор $D_{x_0}|_\theta$ представляет собой такой набор $\{X_{\theta_k} \in T_{\theta_k}(J^k E)\}$, что X_{θ_k} есть направляющий вектор R-прямой, соответствующей точке θ_{k+1}, а $X_{\theta_0} = \partial / \partial x_0 |_{\theta_0}$.

Распределения Картана на $J^k E$, $k \geq 0$, порождают *распределение Картана* $\mathcal{C}^\infty(E)$ на $J^\infty E$, а именно в точке $\theta = \{\theta_k\} \in J^\infty E$ вектор (14) принадлежит плоскости Картана $\mathcal{C}^\infty_\theta(E)$, если для любого натурального k вектор X_{θ_k} принадлежит плоскости Картана $\mathcal{C}^k_{\theta_k}(E)$. Распределение Картана на $J^\infty E$ 1-мерно и порождается полной производной по какой-либо переменной [5, гл. 4].

Определим *бесконечное продолжение* $\mathcal{E}^\infty$ (или *диффеотоп*) *уравнения* $\mathcal{E} \subset J^k \pi$ как подмножество $J^\infty \pi$, состоящее из таких точек $\theta = \{\theta_l\} \in J^\infty \pi$, что для любого натурального l точка θ_{k+l} принадлежит $\mathcal{E}^{(l)}$. Распределение Картана на $\mathcal{E}^\infty$ определяется как ограничение на $\mathcal{E}^\infty$ распределения Картана на $J^\infty \pi$. Полная производная D_t по независимой переменной t системы $\mathcal{E}$ касается $\mathcal{E}^\infty$. Поэтому определено ее ограничение $D_t|_{\mathcal{E}^\infty}$ на $\mathcal{E}^\infty$, следовательно, распределение Картана на $\mathcal{E}^\infty$ порождается векторным полем $D_t|_{\mathcal{E}^\infty}$.

На диффеотопе системы (1) определены координаты

$$t, x_1, \dots, x_n, u_1^{(0)}, \dots, u_m^{(0)}, u_1^{(1)}, \dots, u_m^{(1)}, u_1^{(2)}, \dots, \qquad (15)$$

которые называются *каноническими координатами* данного диффеотопа. В этих координатах полная производная по независимой переменной t системы (1) имеет вид

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{l=1}^{n} f_l(t,x,u)\frac{\partial}{\partial x_l} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{\infty} u_i^{(j+1)} \frac{\partial}{\partial u_i^{(j)}}.$$

Область $\mathcal{O}^{(l)}$, в которой определен плоский выход (6) плоской системы (1), можно понимать как область диффеотопа этой системы.

Совокупность ограничений на $\mathcal{E}^{(l)}$ гладких функций, определенных на объемлющем пространстве $J^{k+l}\pi$, обозначим через $\mathcal{F}_l(\mathcal{E})$. Для любого $l \geq 0$ имеем вложение $\mathcal{F}_l(\mathcal{E}) \subset \mathcal{F}_{l+1}(\mathcal{E})$. Элементы множества $\mathcal{F}(\mathcal{E}) = \bigcup_{l=0}^{\infty} \mathcal{F}_l(\mathcal{E})$ называют *гладкими функциями на диффеотопе* $\mathcal{E}^{\infty}$.

Гладким отображением диффеотопов называют такое отображение

$$F : \mathcal{E}^{\infty} \to \mathcal{S}^{\infty}, \tag{16}$$

для которого индуцированное отображение F^{*} отображает гладкие функции в гладкие, т. е. $F^{*}(\mathcal{F}(\mathcal{S})) \subset \mathcal{F}(\mathcal{E})$, где $F^{*}(g) = g \circ G$. Отображение (16) называется *диффеоморфизмом*, если оно гладкое, взаимно однозначное и обратное отображение также является гладким.

Произвольное гладкое отображение диффеотопов не сохраняет дифференциальные связи между переменными. Распределение Картана есть та геометрическая структура, которая определяет эти связи. Поэтому интерес представляют гладкие отображения, сохраняющие распределение Картана. Например, семейство $\{F^{(k)} : J^k E_1 \to J^k E_2\}_{k \in \mathbb{N}}$ продолжений отображения $F : E_1 \to E_2$ определяет гладкое отображение $F^{\infty} : J^{\infty}E_1 \to J^{\infty}E_2$, которое точку $\theta = \{\theta_l\} \in J^{\infty}E$ отображает в точку

$$F^{\infty}(\theta) = \{F^{(l)}(\theta_l),\, l \geq 0\}.$$

Действительно, последовательность $F^{\infty}(\theta)$ есть точка в $J^{\infty}E_2$, так как из формулы (13) и определения θ следует, что

$$\varpi_{k,q}(F^{(k)}(\theta_k)) = F^{(q)}(\varpi_{k,q}(\theta_k)) = F^{(q)}(\theta_q).$$

Назовем отображение F^{∞} *бесконечным продолжением отображения* F. Из определений следует, что отображение F^{∞} отображает распределение Картана на $J^{\infty}E_1$ в распределение Картана на $J^{\infty}E_2$.

Диффеоморфизм (16) называется *$\mathcal{C}$-диффеоморфизмом* (или *изоморфизмом Ли — Бэклунда*), если

$$F_{*}(\mathcal{C}_{\theta}(\mathcal{E})) = \mathcal{C}_{F(\theta)}(\mathcal{S}), \quad \forall \theta \in \mathcal{E}^{\infty}. \tag{17}$$

При этом *$\mathcal{C}$-диффеоморфными* называются системы, чьи диффеотопы связаны $\mathcal{C}$-диффеоморфизмом. Определение $\mathcal{C}$-диффеоморфизма в окрестности точки $\theta \in \mathcal{E}^\infty$ получается, если многообразия $\mathcal{E}^\infty$ и $\mathcal{S}^\infty$ в приведенных здесь определениях заменить окрестностями точек $\theta \in \mathcal{E}^\infty$ и $F(\theta) \in \mathcal{S}^\infty$ соответственно. Поскольку интегральные кривые распределения Картана совпадают с графиками решений соответствующей системы, то из условия (17) следует, что любой $\mathcal{C}$-диффеоморфизм отображает графики решений одной системы в графики решений другой системы. Таким образом, $\mathcal{C}$-диффеоморфные системы — эквивалентные системы.

Теорема 1 [16]. *Система дифференциально плоская в области $\mathcal{O}^{(l)}$ тогда и только тогда, когда существует такой $\mathcal{C}$-диффеоморфизм F из $\mathcal{O}^{(l)}$ в открытое подмножество $\mathcal{U}$ пространства бесконечных джетов, который сохраняет независимую переменную, т. е. $F^*(t_{\mathcal{U}}) = t_{\mathcal{O}}$, где $t_{\mathcal{U}}$ и $t_{\mathcal{O}}$ — независимые переменные на $\mathcal{U}$ и $\mathcal{O}^{(l)}$ соответственно.*

Отметим, что так как распределение Картана порождается полной производной по независимой переменной, условие (17) означает, что $F_*(D_{\mathcal{E}}) = aD_{\mathcal{S}}$, где $D_{\mathcal{E}}$ и $D_{\mathcal{S}}$ — полные производные по независимым переменным на $\mathcal{E}^\infty$ и $\mathcal{S}^\infty$, $a \in \mathcal{F}(\mathcal{S})$. Нетрудно заметить, что

$$a = ((F^{-1})^* \circ D_{\mathcal{E}} \circ F^*)(t_{\mathcal{S}}) = \frac{1}{D_{\mathcal{S}}((F^{-1})^*(t_{\mathcal{E}}))}, \qquad (18)$$

где $t_{\mathcal{E}}$ и $t_{\mathcal{S}}$ — независимые переменные на $\mathcal{E}^\infty$ и $\mathcal{S}^\infty$. Поэтому, если F сохраняет независимую переменную, то $a \equiv 1$.

Систему (1) называют *(орбитально) плоской* в области $\mathcal{O}^{(l)}$, если существует $\mathcal{C}$-диффеоморфизм из $\mathcal{O}^{(l)}$ в некоторое открытое подмножество пространства бесконечных джетов.

INDV-преобразования. Рассмотрим систему $\mathcal{E}$ уравнений с зависимыми переменными $z_1, \ldots, z_m$ и набор функций $g_1, \ldots, g_s \in \mathcal{F}_l(\mathcal{E})$. Введем новые зависимые переменные $v_1, \ldots, v_s$ равенствами

$$v_1 = g_1(t, z, z^{(1)}, \ldots, z^{(l)}), \ldots, v_s = g_s(t, z, z^{(1)}, \ldots, z^{(l)}). \qquad (19)$$

С одной стороны, дополнение уравнений (19) к уравнениям системы $\mathcal{E}$ дает новую систему $\mathcal{S}$ с независимой переменной t и зависимыми переменными $x_1, \ldots, z_m$, $v_1, \ldots, v_s$. С другой стороны, равенства (19) определяют $\mathcal{C}$-диффеоморфизм (см. [18, теорема 1]), который называется INDV-преобразованием. В работе [18] дано точное определение и описание этого понятия, а также рассмотрены такие кольца $\mathcal{K}$ функций на произвольном диффеотопе $\mathcal{E}^\infty$, что $\mathcal{F}_0(\mathcal{E}) \subset \mathcal{K} \subset \mathcal{F}_l(\mathcal{E})$ для некоторого целого $l \geq 0$, приведено определение точки общего положения такого кольца, показано, что множества таких точек есть открытое всюду плотное подмножество диффеотопа $\mathcal{E}^\infty$ ([18], предложение 4).

Теорема 2 [18]. *Пусть $\mathcal{K}$ — такое кольцо функций на диффеотопе $\mathcal{E}^\infty$ системы (1), что $\mathcal{F}_0(\mathcal{E}) \subset \mathcal{K} \subset \mathcal{F}_l(\mathcal{E})$ для некоторого целого $l \geq 0$. Тогда существу-*

ет такое INDV-преобразование F *из некоторой окрестности* $\mathcal{U}^\infty \subset \mathcal{E}^\infty$ *точки общего положения кольца* $\mathcal{K}$ *в диффеотоп* $\mathcal{S}^\infty$ *некоторой другой системы, что* $\mathcal{K} \subset F^*(\mathcal{F}_0(\mathcal{S}))$ *и любой элемент из* $F^*(\mathcal{F}_0(\mathcal{S}))$ *представляет собой функцию конечного числа элементов* $\mathcal{K}$.

Построение декомпозиций систем с управлением. Рассмотрим систему вида

$$a(t, z, \dot{z}) = 0, \ \ a \in \mathbb{R}^{n_1}, \ \ z \in \mathbb{R}^{n_1+m_1}; \tag{20}$$

$$\dot{\zeta} = b(t, \zeta, z, \xi), \ \ \zeta \in \mathbb{R}^{n_2}, \ \ \xi \in \mathbb{R}^{m_2}. \tag{21}$$

Отметим, что полная производная по независимой переменной системы (20), (21) имеет вид

$$D = D_2 + b(t, \zeta, z, \xi)\frac{\partial}{\partial \zeta} + \sum_{\alpha=0}^{\infty} \xi^{(\alpha+1)} \frac{\partial}{\partial \xi^{(\alpha)}},$$

где D_2 — полная производная по независимой переменной системы (20). Нетрудно заметить, что столбец $X = \left(\partial / \partial \zeta_1, \ldots, \partial / \partial \zeta_q\right)^{\text{т}}$ векторных полей на диффеотопе этой системы удовлетворяет равенству

$$[X, D] = AX. \tag{22}$$

Здесь $[X, D]$ — столбец коммутаторов $[\partial / \partial \zeta_i, D]$, $i = 1, \ldots, q$; AX — произведение матрицы функций $A = \left(\partial b_i / \partial \zeta_j\right)_{i, j=1,\ldots,q}$ и столбца X.

Отметим, что равенство (22) при $A \equiv 0$ в одномерном случае означает, что X есть высшая симметрия системы (20), (21) (полное описание высших симметрий систем с управлением дано в работе [19]). Следующая теорема есть обобщение теоремы 2.5, приведенной в работе [5, гл. 4], характеризующей высшие симметрии пространства джетов.

Теорема 3 [20]. *Столбец* X *вертикальных полей* $X_1, \ldots, X_q$ *на пространстве бесконечных джетов* $J^\infty \pi$ *удовлетворяет равенству (22), где* A *— матрица функций на* $J^\infty \pi$, *тогда и только тогда, когда в координатах* $(t, x_j^{(l)})$ *на* $J^\infty \pi$ *столбец* X *имеет вид*

$$X = \sum_{s=0}^{\infty} (D + A)^s (\varphi) \frac{\partial}{\partial x^{(s)}}, \tag{23}$$

где $\varphi = (\varphi_{ij})$, $i = 1, \ldots, q, j = 1, \ldots, n$ *— матрица произвольных функций на* $J^\infty \pi$; $\partial / \partial x^{(s)}$ *— столбец производных* $\partial / \partial x_1^{(s)}, \ldots, \partial / \partial x_n^{(s)}$; *правая часть равенства (23) представляет собой сумму произведений матриц и столбцов.*

Набор векторных полей $X_1, \ldots, X_q$ на диффеотопе $\mathcal{E}^\infty$ системы $\mathcal{E}$ назовем *f-набором* системы $\mathcal{E}$, если

1) существует такое кольцо $\mathcal{K}$ функций на $\mathcal{E}^\infty$, что $\mathcal{F}_0(\mathcal{E}) \subset \mathcal{K} \subset \mathcal{F}_l(\mathcal{E})$ для некоторого целого $l \geq 0$ и $X_i(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$ для любого $i = 1, \ldots, q$;

2) в окрестности каждой точки $\theta \in \mathcal{E}^\infty$ существуют такие функции $g_1, \ldots, g_q \in \mathcal{K}$, что матрица $(X_i(g_j)(\theta))$ невырождена;

3) $\operatorname{span}_{\mathcal{F}(\mathcal{E})}\{X_1, \ldots, X_q\}$ есть алгебра Ли;

4) выполняется равенство (22), где A — матрица функций из $\mathcal{K}$.

Пример 3. Рассмотрим векторное поле Y в пространстве E расслоения π. Его фазовый поток $\{B_\tau : \tau \in I\}$ продолжается до фазового потока $\{B_\tau^{(\infty)} : \tau \in I\}$ некоторого поля $Y^{(\infty)}$ в $J^\infty\pi$. Если $\mathcal{E}$ — система дифференциальных уравнений на сечения расслоения π, а поле $Y^{(\infty)}$ касается диффеотопа $\mathcal{E}^\infty \subset J^\infty\pi$, то ограничение $Y^{(\infty)}$ на $\mathcal{E}^\infty$ есть векторное поле на диффеотопе $\mathcal{E}^\infty$, которое называют *классической (инфинитезимальной) симметрией системы* $\mathcal{E}$. Координатное представление классических симметрий можно найти в работе [5, гл. 3, теорема 3.4].

Набор π-вертикальных классических симметрий системы $\mathcal{E}$ удовлетворяет условиям 1 и 4 определения *f*-набора: для них $\mathcal{K} = \mathcal{F}_0(\mathcal{E})$, а $A \equiv 0$. Поэтому алгебра Ли таких симметрий образует *f*-набор в окрестности точек, где выполняется условие 2.

Точкой общего положения f-набора назовем точку общего положения соответствующего кольца $\mathcal{K}$ (см. условие 1 определения *f*-набора).

Теорема 4. *1. Набор векторных полей $\partial/\partial\zeta_1, \ldots, \partial/\partial\zeta_q$ есть f-набор системы (20), (21).*

2. Любой f-набор системы $\mathcal{E}$ в окрестности точки общего положения определяет для системы $\mathcal{E}$ декомпозицию вида (20), (21).

◄ 1. Для полей $\partial/\partial\zeta_1, \ldots, \partial/\partial\zeta_q$ в качестве кольца $\mathcal{K}$ можно взять кольцо гладких функций от $t, \zeta, z, \dot{z}, \ldots, z^{(s)}, \xi$. Условие 2 определения *f*-набора также выполняется для указанных полей, так как в качестве функций $g_1, \ldots, g_q \in \mathcal{K}$ можно взять функции $\zeta_1, \ldots, \zeta_q$. Данные поля коммутируют, поэтому их $\mathcal{F}(\mathcal{E})$-линейная оболочка есть алгебра Ли (здесь $\mathcal{E}$ есть система (20), (21)). То, что для этих полей выполняется равенство (22), было отмечено ранее. Таким образом, указанные поля образуют *f*-набор системы (20), (21).

2. Искомый $\mathcal{C}$-диффеоморфизм из заданной системы $\mathcal{E}$ в систему вида (20), (21) будем строить так, чтобы независимая переменная и зависимые переменные z системы (20) были общими первыми интегралами векторных полей *f*-набора.

Пусть $\theta \in \mathcal{E}^\infty$ — точка общего положения *f*-набора $X_1, \ldots, X_q$ системы $\mathcal{E}$, а $\mathcal{K}$ — соответствующее кольцо. По теореме 2 существуют такие окрестность $\mathcal{U}^\infty \subset \mathcal{E}^\infty$ точки θ, система $\mathcal{S} \subset J^p\tilde{\pi}$ и INDV-преобразование $F : \mathcal{U}^\infty \to \mathcal{S}^\infty$, что $\mathcal{K} \subset F^*(\mathcal{F}_0(\mathcal{S}))$ и любой элемент из $F^*(\mathcal{F}_0(\mathcal{S}))$ представляет собой функцию конечного числа элементов $\mathcal{K}$. Учитывая указанные свойства $\mathcal{K}$ и соотношение $X_i(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$, получаем вложение $F_*(X_i)(\mathcal{F}_0(\mathcal{S})) \subset \mathcal{F}_0(\mathcal{S})$ для $i = 1, \ldots, q$, следовательно, отображение $\tilde{\pi}_{\infty,0}|_{\mathcal{S}^\infty}$ проецирует поля $F_*(X_1), \ldots, F_*(X_q)$ в некоторые поля $Z_1, \ldots, Z_q$ на $J^0\tilde{\pi}$.

Рассмотрим подкольцо $\mathcal{K}_1$ в $\mathcal{F}_{l+1}(\mathcal{E})$, порожденное элементами из $\mathcal{K}$ и из $D(\mathcal{K}) = \{D(g) | g \in \mathcal{K}\}$. Для любого $i = 1, \ldots, q$ имеем $X_i(\mathcal{K}_1) \subset \mathcal{K}_1$, так как из равенства (22) следует, что $X_i(Dg) = D(X_i g) + \sum\limits_j a_{ij} X_j(g) \in \mathcal{K}_1$, где $g \in \mathcal{K}$; a_{ij} — элемент матрицы A.

INDV-преобразование F сохраняет независимую переменную и поэтому отображает D в D, тогда $\mathcal{K}_1 \subset F^*(\mathcal{F}_1(\mathcal{S}))$ и любой элемент из $F^*(\mathcal{F}_1(\mathcal{S}))$ представляет собой функцию конечного числа элементов $\mathcal{K}_1$. Как и $\tilde{\pi}_{\infty,0}|_{\mathcal{S}^\infty}$ отображение $\tilde{\pi}_{\infty,1}|_{\mathcal{S}^\infty}$ проецирует поля $F_*(X_1), \ldots, F_*(X_q)$ в некоторые поля $Z_1^1, \ldots, Z_q^1$ на $J^1\tilde{\pi}$. Поскольку $\tilde{\pi}_{\infty,0}|_{\mathcal{S}^\infty} = \tilde{\pi}_{1,0}|_{\mathcal{S}^1} \circ \tilde{\pi}_{\infty,1}|_{\mathcal{S}^\infty}$, где $\mathcal{S}^1 = \tilde{\pi}_{\infty,1}(\mathcal{S}^\infty)$, $\tilde{\pi}_{1,0}|_{\mathcal{S}^1}$ проецирует поля $Z_1^1, \ldots, Z_q^1$ в поля $Z_1, \ldots, Z_q$.

Пусть $g_1, \ldots, g_q$ — такие функции из $\mathcal{K}$, определенные в окрестности точки θ, что матрица $(X_i(g_j)(\theta))$ невырождена (условие 2 определения *f*-набора). Тогда $(F^{-1})^*(g_j) \in \mathcal{F}_0(\mathcal{S})$ (свойства кольца $\mathcal{K}$) для $j = 1, \ldots, q$ и в точке $\theta_0' = \tilde{\pi}_{\infty,0}|_{\mathcal{S}^\infty}(F(\theta)) \in J^0\tilde{\pi}$ имеем

$$Z_i((F^{-1})^*(g_j))(\theta_0') = X_i(g_j)(\theta), \quad i, j = 1, \ldots, q, \tag{24}$$

следовательно, матрица с элементами (24) невырождена. Поэтому распределение, порожденное полями $Z_1, \ldots, Z_q$, регулярно в некоторой окрестности точки $\theta_0' \in J^0\tilde{\pi}$.

Поля $X_1, \ldots, X_q$ проецируются при отображении $\tilde{\pi}_{\infty,0}|_{\mathcal{S}^\infty} \circ F$ в поля $Z_1, \ldots, Z_q$, а их коммутаторы проецируются в коммутаторы полей $Z_1, \ldots, Z_q$. Последние есть поля на $J^0\tilde{\pi}$, поэтому из условия 3 определения *f*-набора следует, что векторные поля $Z_1, \ldots, Z_q$ порождают инволютивное распределение в некоторой окрестности точки θ_0'. По теореме Фробениуса указанное распределение интегрируемо и обладает полным набором первых интегралов. Аналогичными свойствами обладает распределение на $\mathcal{S}^1$, порожденное полями $Z_1^1, \ldots, Z_q^1$.

Независимая переменная t системы $\mathcal{S}$ является функцией на $J^0\tilde{\pi}$ (напомним, отождествляем функцию $g \in \mathcal{F}_l(\mathcal{S})$ с функцией $(\tilde{\pi}_{\infty,l}|_{\mathcal{S}^\infty})^*(g) \in \mathcal{S}^\infty$). Если $Z_j(t) \not\equiv 0$ для некоторого $j = 1, \ldots, q$, то выберем новую независимую переменную τ системы $\mathcal{S}$ следующим образом. В точке θ_0' рассмотрим *R*-прямую $R_{\theta_1'}$, соответствующую точке $\theta_1' = \tilde{\pi}_{\infty,1}|_{\mathcal{S}^\infty}(F(\theta)) \in \mathcal{S}^1$. Пусть τ — такой общий первый интеграл векторных полей $Z_1, \ldots, Z_q$, что указанная *R*-прямая не касается поверхности уровня τ в точке θ_0'. Функцию $(\tilde{\pi}_{\infty,0}|_{\mathcal{S}^\infty})^*(\tau)$ обозначим также через τ. Из определяющего свойства полной производной D_t следует, что проекция вектора $D_t|_{\theta'}, \theta' = F(\theta)$, на $J^0\tilde{\pi}$ есть направляющий вектор *R*-прямой, соответствующий точке θ_1'. Поэтому $D_t(\tau)(\theta')$ равно производной функции τ вдоль направляющего вектора *R*-прямой $R_{\theta_1'}$, следовательно, $D_t(\tau)(\theta') \neq 0$ и в окрестности точки θ' функция τ может быть выбрана в качестве независимой переменной системы $\mathcal{S}$ (см. (18)).

Отметим, что если g — общий первый интеграл полей $F_*(X_1),\ldots,\ F_*(X_q)$, то из равенства (22) следует, что $D_t(g)$ есть также их общий первый интеграл. Функция τ является общим первым интегралом этих полей по построению. Поэтому этим же свойством обладает и функция $D_t(\tau)$. Полная производная D_τ по новой независимой переменной τ (см. (18))

$$D_\tau = \frac{1}{D_t(\tau)} D_t.$$

Поэтому D_τ также отображает первые интегралы в первые интегралы *f*-набора.

Дополним τ функциями $\phi_1,\ldots,\phi_s \in C^\infty(\mathcal{S}^1)$ до максимального функционально независимого набора общих первых интегралов полей $Z_1^1,\ldots,Z_q^1$. Поскольку матрица с элементами (24) невырождена, функции $\tau,\phi_1,\ldots,\phi_s,\ (F^{-1})^*(g_1),\ldots,(F^{-1})^*(g_q)$ образуют систему координат в окрестности точки $\theta_{1'} \in \mathcal{S}^1$. Обозначим через $\zeta_1,\ldots,\zeta_q$ функции $(F^{-1})^*(g_1),\ldots,(F^{-1})^*(g_q)$. Их производные $D_\tau(\zeta_1),\ldots,D_\tau(\zeta_q)$ есть функции на $\mathcal{S}^1$, следовательно, есть функции $\tau,\phi_1,\ldots,\phi_s,\ \zeta_1,\ldots,\zeta_q$. Получаем уравнения вида

$$D_\tau(\zeta) = b(\tau,\zeta,\phi). \tag{25}$$

Остальные уравнения системы $\mathcal{S}$ есть уравнения на общие первые интегралы полей $F_*(X_1),\ldots,F_*(X_q)$. Действительно, функции $\tau,\phi_1,\ldots,\ \phi_s,\ \zeta_1,\ldots,\zeta_q$ образуют систему координат на $\mathcal{S}^1$, поэтому любое уравнение системы $\mathcal{S}$ можно записать в виде $G_0(\tau,\phi,\zeta,D_\tau(\phi),D_\tau(\zeta),\ldots,D_\tau^l(\phi),D_\tau^l(\zeta)) = 0$. Удалив из этого уравнения производные $D_\tau^i(\zeta)$, используя соотношения (25), получаем уравнение вида $G(\tau,\phi,\zeta,D_\tau(\phi),\ldots,D_\tau^l(\phi)) = 0$. Производная этого уравнения вдоль поля $F_*(X_i)$ имеет вид $\sum_{j=1}^{q} G'_{\zeta_j} Z_i(\zeta_j) = 0$. Поскольку матрица $(Z_i(\zeta_j))_{i,\,j=1,\ldots,q}$ невырождена, то $G'_{\zeta_j} \equiv 0,\ j=1,\ldots,q,$ таким образом, функция G не зависит от ζ и

$$G(\tau,\phi,D_\tau(\phi),\ldots,D_\tau^l(\phi)) = 0. \tag{26}$$

Применим аналогичные рассуждения к остальным уравнениям системы $\mathcal{S}$. Если ни функция ϕ_i, ни ее производные $D_\tau(\phi_i),\ldots,D_\tau^{l-1}(\phi_i)$ не входят ни в одно уравнение системы $\mathcal{S}$ вида (26), то обозначаем ее ξ_{i_1} с соответствующим номером i_1. Иначе обозначаем функции $\phi_i,\ D_\tau(\phi_i),\ldots,\ D_\tau^{l_i-1}(\phi_i)$ через $z_{i_2},\ldots,z_{i_3}$, где l_i — порядок старшей производной этой функции, входящей в уравнения системы $\mathcal{S}$ вида (26). Тогда уравнения (26) принимают вид (20), а уравнения (25) — вид (21). ►

Если *f*-набор X системы $\mathcal{E}$ определяет декомпозицию (20), (21), то систему (20) называют *факторизацией* системы $\mathcal{E}$ вдоль X.

Построение декомпозиций задач терминального управления. Рассмотрим произвольную систему вида (1) и задачу терминального управления (9) для нее. Граничные условия (9) вырезают на диффеотопе $\mathcal{E}^\infty$ системы (1) два множества $M_\text{Н}$ и $M_\text{К}$, которые в координатах (15) задаются системами уравнений $\{t = t_\text{Н},\ x = x_\text{Н}\}$ и $\{t = t_\text{К},\ x = x_\text{К}\}$ соответственно. На бесконечномерном геометрическом языке поставленная задача терминального управления состоит в поиске такого решения системы (1), график которого в $\mathcal{E}^\infty$ проходит и через $M_\text{Н}$, и через $M_\text{К}$.

Рассмотрим теперь какой-либо f-набор системы (1), соответствующую ему декомпозицию (20), (21) и $\mathcal{C}$-диффеоморфизм F из системы (1) в систему (20), (21). $\mathcal{C}$-Диффеоморфизм F отображает множества $M_\text{Н}$ и $M_\text{К}$ в множества $F(M_\text{Н}) = \{(F^{-1})^*(t) = t_\text{Н}, (F^{-1})^*(x) = x_\text{Н}\}$ и $F(M_\text{К}) = \{(F^{-1})^*(t) = t_\text{К}, (F^{-1})^*(x) = x_\text{К}\}$ соответственно. Любая функция $g(t,\ z,\ \xi,\ \dot{z},\ \dot{\xi}, \ldots)$, не зависящая от $\zeta_1, \ldots, \zeta_q$ и постоянная на $F(M_\text{Н})$ или на $F(M_\text{К})$, определяет граничные условия для системы (20) (здесь полагаем, что ξ — переменные системы (20)). Возникает граничная задача для системы (20). Решение этой задачи $(z(t), \xi(t))$ определяет систему

$$\dot{\zeta} = b(t,\ \zeta,\ z(t),\ \xi(t)). \tag{27}$$

Диффеотоп $\mathcal{Y}^\infty$ этой системы вкладывается в диффеотоп системы (20), (21). Для системы (27) возникает граничная задача с граничными множествами $\mathcal{Y}^\infty \cap F(M_\text{Н})$ и $\mathcal{Y}^\infty \cap F(M_\text{К})$. Какое-либо решение этой задачи определяет одно из решений задачи терминального управления (20), (21), а именно, чтобы получить это решение, достаточно в записи решения $(z(t), \xi(t), \zeta(t))$ перейти от переменных t, ζ, z, ξ к переменным t, x, u, используя обратное отображение F^{-1}. Таким образом, поставленная задача терминального управления сводится к двум граничным задачам для систем (20) и (27). Нетрудно проверить, что число граничных условий новых двух задач в сумме равно числу граничных условий первоначальной задачи.

В случае когда множество $\mathcal{Y}^\infty \cap F(M_\text{К})$ совпадает со всем слоем $\{t = t_\text{К}\}$ в $\mathcal{Y}^\infty$, конечных условий задачи для системы $\mathcal{Y}$ нет, следовательно, это задача Коши. Аналогично, если $\mathcal{Y}^\infty \cap F(M_\text{Н}) = \{t = t_\text{Н}\}$, то задача для системы $\mathcal{Y}$ есть задача Коши с начальным условием в точке $t = t_\text{К}$ в сторону уменьшения времени. Таким образом, поставленная задача терминального управления сводится к задаче Коши и терминальной задаче с меньшим числом граничных условий. Равенство $\mathcal{Y}^\infty \cap F(M_\text{Н}) = \{t = t_\text{Н}\}$ означает, что поля из f-набора касаются множества $M_\text{Н}$. Аналогично для $M_\text{К}$. Таким образом, если поля из f-набора касаются множества $M_\text{Н}$ или множества $M_\text{К}$, то граничные задачи соответствующей декомпозиции имеют решения.

Пример 4. Система вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 f_1(t, x_1, x_2, u) + u f_2(t, x_2, x_1 - x_2 u); \\ \dot{x}_2 &= f_2(t, x_2, x_1 - x_2 u), \end{aligned} \tag{28}$$

где f_1, f_2 — произвольные гладкие функции, имеет классическую симметрию $X = x_2\partial/\partial x_1 + \partial/\partial u$. Факторизация системы (28) вдоль X имеет вид

$$\dot{y}_1 = vy_2, \quad \dot{y}_2 = f_2(t, y_2, y_1). \tag{29}$$

Здесь $y_2 = x_2$, $y_1 = x_1 - x_2 u$, $v = f_1(t, x_1, x_2, u) - \dot{u}$.

Если для системы (28) поставлена задача терминального управления

$$x_1(t_{\text{Н}}) = x_{1,\text{Н}},\ x_2(t_{\text{i}}) = x_{2,\text{Н}},\quad x_1(t_{\text{К}}) = x_{1,\text{К}},\quad x_2(t_{\text{К}}) = 0, \tag{30}$$

то для системы (29) возникает граничная задача

$$y_2(t_{\text{Н}}) = x_{2,\text{Н}}, \quad y_1(t_{\text{К}}) = x_{1,\text{К}}, \quad y_2(t_{\text{К}}) = 0.$$

Пусть $(y_1(t), y_2(t), v(t))$ — решение этой задачи. В качестве переменной ζ возьмем функцию u. Тогда соответствующая система (27) имеет вид $\dot{u} = f_1(t, y_1(t) + y_2(t)u, y_2(t), u) - v(t)$. Из граничных условий (30) следует только одно условие на решения последнего уравнения: $u(t_{\text{Н}}) = (x_{1,\text{Н}} - y_1(t_{\text{Н}}))/x_{2,\text{Н}}$, тогда как $u(t_{\text{К}})$ произвольно. Таким образом, одна из задач этой декомпозиции есть задача Коши, а вторая — задача терминального управления с меньшим числом граничных условий, чем первоначальная (3 вместо 4).

Если для системы (28) поставлена задача с $x_2(t_{\text{К}}) = x_{2,\text{К}} \neq 0$, то, используя дважды указанную декомпозицию, можно перевести систему из состояния $(x_{1,\text{Н}}, x_{2,\text{Н}})$ в состояние $(x_{1,\text{К}}, 0)$, а потом из состояния $(x_{1,\text{К}}, 0)$ в состояние $(x_{1,\text{К}}, x_{2,\text{К}})$.

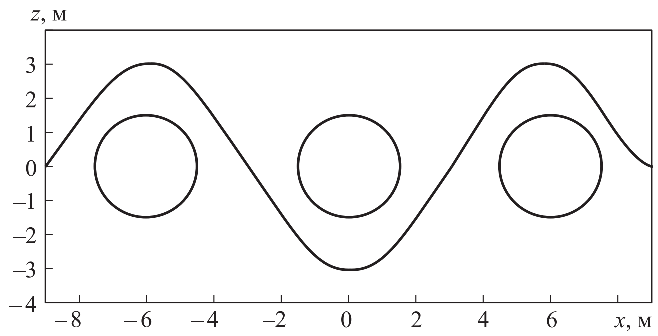
Случай, когда не все поля f-набора касаются множества $M_{\text{Н}}$ или множества $M_{\text{К}}$, также представляет интерес, если декомпозиция по ним имеет вид (20), (21) с $m_1, m_2 > 0$ (обе системы имеют управления). Тогда обе граничные задачи есть задачи терминального управления, которые, как правило, разрешимы.

Пример 5. Рассмотрим задачу объезда автомобилем трех столбиков (маневр «змейка»). Введем такую систему координат на плоскости, что столбики расположены в точках $(-x_0, 0)$, $(0,0)$ и $(x_0, 0)$. Обозначим через r_0 радиус столбиков, а через d — максимальное расстояние от середины задней оси автомобиля до точки корпуса автомобиля. Тогда $r = r_0 + d$ — минимально допустимое расстояние от середины задней оси до центров столбиков. Таким образом, область допустимых значений переменных плоского выхода x, z (см. пример 2) ограничена неравенствами

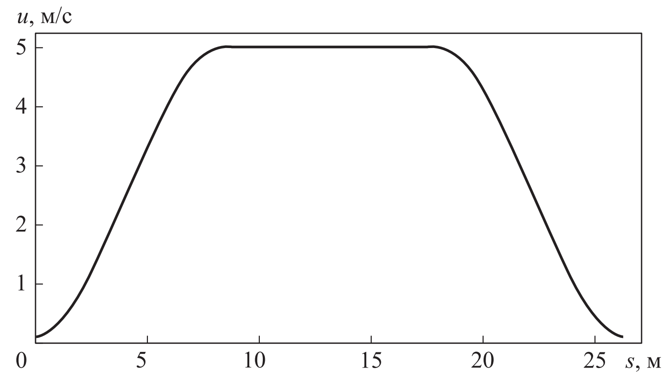
$$(x - x_0)^2 + z^2 > r^2,\ x^2 + z^2 > r^2,\ (x + x_0)^2 + z^2 > r^2.$$

Используем декомпозицию, описанную в примере 1. Для построения траектории автомобиля выбираем на желаемом пути массив точек (x_i, z_i), $i = 1, \ldots, n$, причем $(x_1 = x_{\text{Н}}, z_1 = 0)$ — начальная, а $(x_n = -x_{\text{К}}, z_n = 0)$ — конечная точки. Параметризуем кривую так, чтобы значения параметра τ в точках (x_i, z_i) были целыми числами от 0 до $n-1$. На переменную z наложим условие $z'_\tau(t_{\text{Н}}) = 0$. Таким образом, имеем n условий на функцию $x(\tau)$ и $n+1$ условие на функцию $z(\tau)$.

Находим многочлены $x(\tau)$ и $z(\tau)$ порядка $n-1$ и n, удовлетворяющие условиям $x(i-1)=x_i$, $z(i-1)=z_i$, $i=1,\ldots,n$, и $z'_\tau(0)=0$. Если кривая $(x(\tau),z(\tau))$ выходит за пределы допустимой области или ее кривизна превышает допустимое значение, то добавляем дополнительные точки (x_i,z_i) на желаемом пути так, чтобы эти условия выполнялись, и повторяем вычисления. Полученная кривая приведена на части *а* рисунка.



а



б

Траектория (*а*) и скорость (*б*)

Для решения второй задачи декомпозиции (вычисления функции $\tau(t)$, $t\in[t_{\text{Н}},t_{\text{К}}]$) определяем зависимость скорости u от пройденного пути *s*. Для этого, используя результаты предыдущего этапа, вычисляем зависимость пройденного пути *s* и угла φ от параметра τ и длину S_a всего пути. Требуем, чтобы автомобиль сначала набирал скорость, потом двигался с постоянной скоростью $u_1=5$ м/с, а затем плавно тормозил и останавливался. Отметим, что вопрос об изменении скорости автомобиля на этапах разгона и торможения не тривиален и не входит в задачи настоящей работы. Выбираем функцию *u*(*s*) так (часть *б* рисунка), чтобы выполнялось ограничение на ускорение.

Для вычисления функции $\tau(t)$ вспоминаем, что скорость *u* равна производной пути s по времени t: $u=\dot{s}(t)=s'(\tau)\dot{\tau}(t)$, где $s'(\tau)$ — производная s по τ. Поэтому $\tau(t)$ есть решение задачи Коши $\dot{\tau}(t)=u(s(\tau))/s'(\tau)$, $\tau(t_{\text{Н}})=0$. Найдя $\tau(t)$, получаем $u=u(s(\tau(t)))$ и $\varphi=\varphi(\tau(t))$, где $\varphi(\tau)$ — зависимость, полученная на первом этапе. Результаты моделирования показали, что при полученной зависимости управлений u и φ от t автомобиль движется по траектории, приведенной на части *а* рисунка.

Заключение. Условия 1–3 определения f-набора инвариантны относительно всех $\mathcal{C}$-диффеоморфизмов, а условие 4 — только относительно $\mathcal{C}$-диффеоморфизмов, сохраняющих независимую переменную. Поэтому из части 1 теоремы 4 следует, что если система с управлением приводится к виду (20), (21) $\mathcal{C}$-диффеоморфизмом, сохраняющим независимую переменную, то она обладает f-набором и декомпозиция строится указанным в доказательстве теоремы 4 способом. В случае произвольного $\mathcal{C}$-диффеоморфизма не всякая декомпозиция определяется f-набором. Для того чтобы обобщить приведенную конструкцию на все декомпозиции, необходимо заменить условие 4 условием, инвариантным относительно всех $\mathcal{C}$-диффеоморфизмов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Online* control customization via optimization-based control / R.M. Murrey, J. Hauser, A. Jadbabie, M.B. Milam, et al. // Software-enabled control: Information technology for dynamical systems. John Wiley & Sons, 2003. P. 1–21.

2. *Mahadevan C.R., Doyle III F.G.* Efficient optimization approaches to nonlinear model predictive control // International Journal of Robust and Nonlinear Control. 2003. Vol. 13. P. 309–329.

3. *Faulwasser T., Hagenmeyer V., Findeisen R.* Optimal exact path-following for constrained differentially flat systems // IFAC Proceedings Volumes. 2011. Vol. 44. No. 1. P. 9875–9880.

4. *Faulwasser T., Hagenmeyer V., Findeisen R.* Constrained reachability and trajectory generation for flat systems // Automatica. 2014. Vol. 50. Iss. 4. P. 1151–1159.
DOI: 10.1016/j.automatica.2014.02.011

5. *Симметрии* и законы сохранения уравнений математической физики / А.В. Бочаров, А.М. Вербовецкий, А.М. Виноградов и др. / под ред. А.М. Виноградова, И.С. Красильщика. М.: Факториал, 2005. 474 с.

6. *Krener A.J.* A decomposition theory for differentiable systems // SIAM J. Control Optim. 1977. Vol. 15. Iss. 5. P. 813–829. DOI: 10.1137/0315052

7. *Isidori A., Krener A.J., Gori-Giorgi C., Monaco S.* Nonlinear decoupling via feedback: A differential-geometric approach // IEEE Transactions on Automatic Control. 1981. Vol. 26. No. 2. P. 331–345. DOI: 10.1109/TAC.1981.1102604

8. *Hirshorn R.M.* $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-invariant distributions and disturbance decoupling of nonlinear systems // SIAM J. Control Optim. 1982. Vol. 19. Iss. 1. P. 1–19. DOI: 10.1137/0319001

9. *Respondek W.* On decomposition of nonlinear control systems // Systems & Control Letters. 1982. Vol. 1. Iss. 5. P. 301–308. DOI: 10.1016/S0167-6911(82)80027-3

10. *Nijmeijer H.* Feedback decomposition of nonlinear control systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1983. Vol. 28. No. 8. P. 861–862. DOI: 10.1109/TAC.1983.1103330

11. *Nijmeijer H., Van der Schaft A.J.* Partial symmetries for nonlinear systems // Math. Systems Theory. 1985. Vol. 18. Iss. 1. P. 79–96. DOI: 10.1007/BF01699462

12. *Fliess M.* Cascade decomposition of nonlinear systems, foliations and ideals of transitive Lie algebras // Systems & Control Letters. 1985. Vol. 5. Iss. 4. P. 263–265.
DOI: 10.1016/0167-6911(85)90019-2

13. *Grizzle G.W., Markus S.I.* The structure of nonlinear control systems possessing symmetries // IEEE Transactions on Automatic Control. 1985. Vol. 30. No. 3. P. 248–258.
DOI: 10.1109/TAC.1985.1103927

14. *Канатников А.Н., Крищенко А.П.* Симметрии и декомпозиция нелинейных систем // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30. № 11. С. 1880–1891.

15. *Isidori A.* Nonlinear control systems. Berlin: Springer, 1995. 549 p.

16. *Fliess M., Lévine J., Martin Ph., Rouchon P.* A Lie — Bäcklund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems // IEEE Trans. Automat. Contr. 1999. Vol. 44. No. 5. P. 922–937. DOI: 10.1109/9.763209

17. *Martin P., Murray R.M., Rouchon P.* Flat systems // Plenary Lectures and Minicourses. 4th European Control Conference. 1997. P. 211–264.

18. *Chetverikov V.N.* On the structure of integrable $\mathcal{C}$-fields // Differential Geom. Appl. 1991. Vol. 1. Iss. 4. P. 309–325. DOI: 10.1016/0926-2245(91)90011-W

19. *Четвериков В.Н.* Высшие симметрии и инфинитезимальная форма Бруновского систем с управлением // Дифференциальные уравнения. 2002. Т. 38. № 11. С. 1525–1532.

20. *Четвериков В.Н.* Динамически линеаризуемые системы управления и накрытия // Наука и образование: научное издание. 2013. № 9. С. 251–264. DOI: 10.7463/0913.0601455
URL: http://old.technomag.edu.ru/doc/601455.html

21. *Sira-Ramirez H., Castro-Linares R., Liceaga-Castro E.* A Liouvillian systems approach for the trajectory planning-based control of helicopter models // Int. J. Robust Nonlinear Control. 2000. Vol. 10. Iss. 4. P. 301–320.
DOI: 10.1002/(SICI)1099-1239(20000415)10:4<301::AID-RNC474>3.0.CO;2-Q

22. *Белинская Ю.С., Четвериков В.Н., Ткачев С.Б.* Автоматический синтез программного движения вертолета вдоль горизонтальной прямой // Наука и образование: научное издание. 2013. № 10. С. 285–298. DOI: 10.7463/1013.0660675
URL: http://technomag.bmstu.ru/doc/660675.html

Белинская Юлия Сергеевна — аспирантка кафедры «Математическое моделирование» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Четвериков Владимир Николаевич — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Математическое моделирование» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Белинская Ю.С., Четвериков В.Н. Декомпозиция систем и терминальное управление // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2017. № 6. С. 103–125.
DOI: 10.18698/1812-3368-2017-6-103-125

DECOMPOSITION OF SYSTEMS AND POINT-TO-POINT CONTROL

Yu.S. Belinskaya usbelka@mail.ru
V.N. Chetverikov chetverikov.vl@yandex.ru

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

The paper studies the point-to-point steering problems, which consists in determining the program motion that transfers a dynamic system from a given initial state to a given final state. We examined the possibility of reducing this problem to two boundary problems of smaller dimension. The approach is based on the transformation of the system into a decomposable form. In this case, the most general type of transformation is used, where the dependent and independent variables of one system can depend not only on those of the second system, but also on the derivatives of up to some finite order of dependent variables over independent ones. Findings of the research show that the decompositions of control systems under consideration are determined by Lie algebras of vector fields on an infinite-dimensional manifold. We obtained the conditions on algebras of vector fields that determine the decomposition of the systems and the decomposition of the point-to-point steering problems. Two analyzed examples demonstrate the possibility of applying the proposed approach to solving specific point-to-point steering problems

Keywords

Flat systems, point-to-point steering problems, control systems decomposition

Received 21.11.2016

REFERENCES

[1] Murrey R.M., Hauser J., Jadbabie A., Milam M.B., Petit N., Dunbar W.B., Franz R. Online control customization via optimization-based control. In: Software-enabled control: Information technology for dynamical systems. John Wiley & Sons, 2003, pp. 1–21.

[2] Mahadevan C.R., Doyle III F.G. Efficient optimization approaches to nonlinear model predictive control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2003, vol. 13, pp. 309–329.

[3] Faulwasser T., Hagenmeyer V., Findeisen R. Optimal exact path-following for constrained differentially flat systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 2011, vol. 44, no. 1, pp. 9875–9880.

[4] Faulwasser T., Hagenmeyer V., Findeisen R. Constrained reachability and trajectory generation for flat systems. *Automatica*, 2014, vol. 50, iss. 4, pp. 1151–1159.
DOI: 10.1016/j.automatica.2014.02.011

[5] Bocharov A.V., Verbovetskiy A.M., Vinogradov A.M., et al. Simmetrii i zakony sokhraneniya uravneniy matematicheskoy fiziki [Simmetry and conservation law for the equations of mathematical physics]. Moscow, Faktorial Publ., 2005. 474 p.

[6] Krener A.J. A decomposition theory for differentiable systems. *SIAM J. Control Optim.*, 1977, vol. 15, iss. 5, pp. 813–829. DOI: 10.1137/0315052

[7] Isidori A., Krener A.J., Gori-Giorgi C., Monaco S. Nonlinear decoupling via feedback: A differential-geometric approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1981, vol. 26, no. 2, pp. 331–345. DOI: 10.1109/TAC.1981.1102604

[8] Hirshorn R.M. (A, $\mathcal{B}$)-invariant distributions and disturbance decoupling of nonlinear systems. *SIAM J. Control Optim.*, 1982, vol. 19, iss. 1, pp. 1–19. DOI: 10.1137/0319001

[9] Respondek W. On decomposition of nonlinear control systems. *Systems & Control Letters*, 1982, vol. 1, iss. 5, pp. 301–308. DOI: 10.1016/S0167-6911(82)80027-3

[10] Nijmeijer H. Feedback decomposition of nonlinear control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1983, vol. 28, no. 8, pp. 861–862. DOI: 10.1109/TAC.1983.1103330

[11] Nijmeijer H., Van der Schaft A.J. Partial symmetries for nonlinear systems. *Math. Systems Theory*, 1985, vol. 18, iss. 1, pp. 79–96. DOI: 10.1007/BF01699462`

[12] Fliess M. Cascade decomposition of nonlinear systems, foliations and ideals of transitive Lie algebras. *Systems & Control Letters*, 1985, vol. 5, iss. 4, pp. 263–265.
DOI: 10.1016/0167-6911(85)90019-2

[13] Grizzle G.W., Markus S.I. The structure of nonlinear control systems possessing symmetries. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1985, vol. 30, no. 3, pp. 248–258.
DOI: 10.1109/TAC.1985.1103927

[14] Kanatnikov A.N., Krishchenko A.P. Symmetries and the decomposition of nonlinear systems. *Differential Equations*, 1994, vol. 30, no. 11, pp. 1735–1745.

[15] Isidori A. Nonlinear control systems. Berlin, Springer, 1995. 549 p.

[16] Fliess M., Lévine J., Martin Ph., Rouchon P. A Lie – Bäcklund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1999, vol. 44, no. 5, pp. 922–937.
DOI: 10.1109/9.763209

[17] Martin P., Murray R.M., Rouchon P. Flat systems. *Plenary Lectures and Minicourses. 4th European Control Conference*, 1997, pp. 211–264.

[18] Chetverikov V.N. On the structure of integrable $\mathcal{C}$-fields. *Differential Geom. Appl.*, 1991, vol. 1, iss. 4, pp. 309–325. DOI: 10.1016/0926-2245(91)90011-W

[19] Chetverikov V.N. Higher symmetries and the Brunovskii infinitesimal form of controlled systems. *Differential Equations*, 2002, vol. 38, iss. 11, pp. 1619–1627.
DOI: 10.1023/A:1023645207154

[20] Chetverikov V.N. Dynamically linearizable control systems and coverings. *Nauka i obrazovanie: nauchnoe izdanie* [Science and Education: Scientific Publication], 2013, no. 9, pp. 251–264 (in Russ.). DOI: 10.7463/0913.0601455 Available at: http://old.technomag.edu.ru/doc/601455.html

[21] Sira-Ramirez H., Castro-Linares R., Liceaga-Castro E. A Liouvillian systems approach for the trajectory planning-based control of helicopter models. *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 2000, vol. 10, iss. 4, pp. 301–320.
DOI: 10.1002/(SICI)1099-1239(20000415)10:4<301::AID-RNC474>3.0.CO;2-Q

[22] Belinskaya Yu.S., Chetverikov V.N., Tkachev S.B. Automatic synthesis of the helicopter programmed motion along the horizontal line. *Nauka i obrazovanie: nauchnoe izdanie* [Science and Education: Scientific Publication], 2013, no. 10, pp. 285–298 (in Russ.).
DOI: 10.7463/1013.0660675 Available at: http://technomag.bmstu.ru/doc/660675.html

Belinskaya Yu.S. — post-graduate student of Mathematical Simulation Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Chetverikov V.N. — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor of Mathematical Simulation Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Belinskaya Yu.S., Chetverikov V.N. Decomposition of Systems and Point-to-Point Control. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2017, no. 6, pp. 103–125 (in Russ.).
DOI: 10.18698/1812-3368-2017-6-103-125