УДК 517.956 DOI: 10.18698/1812-3368-2018-1-4-15

ПОСТРОЕНИЕ МЕТОДОМ ПОДОБИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА КЕЛДЫША В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

О.Д. Алгазин mopi66@yandex.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Для эллиптического в полупространстве и вырождающегося на границе уравнения типа Келдыша методом подобия найдено автомодельное решение, являющееся аппроксимативной единицей в классе интегрируемых функций. Это решение представляет собой фундаментальное решение задачи Дирихле, т. е. решение задачи Дирихле с δ-функцией Дирака в граничном условии. Решение задачи Дирихле с произвольной функцией в граничном условии записывается в виде свертки этой функции с фундаментальным решением задачи Дирихле, если свертка существует. Для ограниченной и кусочно-непрерывной граничной функции свертка существует и записывается в виде интеграла, дающего классическое решение задачи Дирихле и являющегося обобщением интеграла Пуассона для уравнения Лапласа. В случае граничной функции, являющейся обобщенной функцией, свертка представляет собой обобщенное решение задачи Дирихле

Ключевые слова

Уравнение Келдыша, задача Дирихле, метод подобия, автомодельное решение, аппроксимативная единица, обобщенные функции

Поступила в редакцию 11.11.2016

Введение. М.В. Келдыш в работе [1] рассмотрел уравнение

$$u_{xx}+y^m u_{yy}+a(x,y)u_y+b(x,y)u_x+c(x,y)u=0,\quad c(x,y)\le 0, \tag{1}$$

которое эллиптично в верхней полуплоскости $y>0$ и параболически вырождается на прямой $y=0$. Для области, расположенной в верхней полуплоскости и имеющей в составе своей границы отрезок оси x, он доказал условия разрешимости задачи Дирихле с непрерывными данными на границе. Эти условия налагают ограничения на m и $a(x,0)$. Задача Дирихле разрешима, если

$$m<1 \text{ или } m=1,\ a(x,0)<1, \text{ или } 1<m<2,\ a(x,0)\le 0. \tag{2}$$

Во всей плоскости уравнение Келдыша, как и уравнение Трикоми, принадлежит к смешанному эллиптико-гиперболическому типу. Приложения таких уравнений описаны в работах [2, 3].

В настоящей работе рассмотрено многомерное обобщение уравнения Келдыша в полупространстве $y>0$

$$\Delta_x u + y^m u_{yy} + \alpha y^{m-1} u_y - \lambda^2 u = 0,\ m < 2,\ \alpha < 1, \tag{3}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$; $u = u(x, y)$ — функция переменных $(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$; $\Delta_x = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ — оператор Лапласа по переменным x.

Краевое условие Дирихле задается на границе полупространства

$$u(x, 0) = \psi(x). \tag{4}$$

Коэффициенты уравнения

$$a(x, y) = \alpha y^{m-1},\quad b(x, y) = 0,\quad c(x, y) = -\lambda^2, \tag{5}$$

такие, что условия Келдыша (2) выполняются.

Для построения ограниченного при $y \to +\infty$ решения задачи Дирихле (3), (4) достаточно найти фундаментальное решение задачи Дирихле, т. е. ограниченное при $y \to +\infty$ решение задачи с δ-функцией Дирака в краевом условии:

$$u(x, 0) = \delta(x). \tag{6}$$

Если обозначить фундаментальное решение задачи Дирихле (3), (4) через $P(x, y)$, то в силу инвариантности уравнения (3) относительно сдвигов по x, решением уравнения (3) с краевым условием $u(x, 0) = \delta(x - \xi)$ будет функция $P(x - \xi, y)$. В силу принципа суперпозиции, справедливого для линейных уравнений, решением уравнения (3) с краевым условием (4) будет свертка фундаментального решения задачи Дирихле с граничной функцией $u(x, y) = P(x, y) * \psi(x)$, если эта свертка существует. Для нахождения фундаментального решения задачи Дирихле применяем метод подобия [4, 5], используя симметрию уравнения, т. е. инвариантность уравнения относительно некоторых групп преобразований, что возможно вследствие специально выбранных коэффициентов (5).

Настоящая работа является продолжением работы [6], где рассмотрен случай $\alpha = 0,\ \lambda = 0$. Полученные методом преобразования Фурье фундаментальные решения задачи Дирихле для случаев $n = 1,\ \alpha = 0,\ m < 2$ и $n = 1,\ \alpha = m < 1$ приведены в работе [7]. Методом подобия в работах [8–10] найдены фундаментальные решения оператора Трикоми, в работе [11] — оператора типа Келдыша (решения неоднородных уравнений с δ-функцией в правой части).

Постановка задачи. Аппроксимативная единица. В уравнении (3) и краевом условии (6) выполним замену переменных

$$\xi = x,\ \eta = \frac{2}{2 - m} y^{\frac{2-m}{2}},$$

получим (заменяя величину ξ величиной x и величину η величиной y) уравнение

$$\Delta_x u + u_{yy} + \frac{\beta}{y} u_y - \lambda^2 u = 0, \quad \beta = \frac{2\alpha - m}{2 - m} < 1, \quad y > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{7}$$

и краевое условие

$$u(x, 0) = \delta(x), \; x \in \mathbb{R}^n. \tag{8}$$

Будем искать решение P уравнения (7), которое является δ-образным семейством функций $x \in \mathbb{R}^n$ с параметром $y \to +0$, или аппроксимативной единицей. Для этого достаточно, чтобы при $y > 0$ выполнялись условия: 1) $P(x, y) > 0$; 2) $\int\limits_{\mathbb{R}^n} P(x, y)\,dx = 1$; 3) $\forall \delta > 0$, $\lim\limits_{y \to +0} \int\limits_{|x| \geq \delta} P(x, y)\,dx = 0$. Если перечисленные условия выполняются, то для любой ограниченной кусочно-непрерывной функции $f(x)$ существует свертка

$$f(x) * P(x, y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(t) P(x - t, y)\,dt = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x - t) P(t, y)\,dt$$

и в точке x, в которой функция $f(x)$ непрерывна, $\lim\limits_{y \to +0} f(x) * P(x, y) = f(x)$. Действительно,

$$\left| f(x) * P(x, y) - f(x) \right| = \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x - t) P(t, y)\,dt - f(x) \int\limits_{\mathbb{R}^n} P(t, y)\,dt \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \big(f(x - t) - f(x) \big) P(t, y)\,dt \right| \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left| f(x - t) - f(x) \right| P(t, y)\,dt =$$

$$= \int\limits_{|t| < \delta} \left| f(x - t) - f(x) \right| P(t, y)\,dt + \int\limits_{|t| \geq \delta} \left| f(x - t) - f(x) \right| P(t, y)\,dt \leq$$

$$\leq \varepsilon \int\limits_{\mathbb{R}^n} P(t, y)\,dx + 2M \int\limits_{|t| \geq \delta} P(t, y)\,dx < 2\varepsilon$$

для значений y, достаточно близких к нулю, поскольку $\int\limits_{|t| \geq \delta} P(t, y)\,dx < \dfrac{\varepsilon}{2M}$ в силу условия 3, а $\left| f(x - t) - f(x) \right| < \varepsilon$ для достаточно малого δ в силу непрерывности.

В частности, для бесконечно дифференцируемых финитных функций $\varphi(x)$ из пространства $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ [12] имеем $\lim\limits_{y \to +0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) P(x, y)\,dx = \varphi(0) = \langle \delta(x), \varphi(x) \rangle$, т. е. $P(x, y)$ при $y \to +0$ сходится к δ-функции в пространстве обобщенных функций $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Вследствие непрерывности свертки для обобщенной функции $f(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, для которой существует свертка с $P(x, y)$, верно равенство $\lim\limits_{y \to +0} f(x) * P(x, y) = f(x) * \delta(x) = f(x)$. Условие 3 можно заменить условием 3^*:

$$\forall\delta > 0,\ \lim_{y\to+0} \sup_{|x|\geq\delta} P(x,y) = 0.$$

Из условия 3^* следует условие 3. Действительно,

$$\int\limits_{|x|\geq\delta} P(x,y)\,dx = \int\limits_{\delta\leq|x|\leq\Delta} P(x,y)\,dx + \int\limits_{|x|\geq\Delta} P(x,y)\,dx \leq$$

$$\leq \int\limits_{\delta\leq|x|\leq\Delta} \sup_{|x|\geq\delta} P(x,y)\,dx + \int\limits_{|x|\geq\Delta} P(x,y)\,dx.$$

Первый интеграл будет мал при малом y за счет условия 3^*, а второй интеграл — при достаточно большом Δ как остаток сходящегося интеграла (условие 2).

Условие 2 можно заменить условием 2^*:

$$\lim_{y\to+0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} P(x,y)\,dx = 1.$$

Действительно, обозначим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} P(x,y)\,dx = g(y) > 0,\quad \lim_{y\to+0} g(y) = 1,\ P^*(x,y) = \frac{P(x,y)}{g(y)}.$$

Тогда $P^*(x,y)$ будет удовлетворять условиям 1–3, т. е. являться аппроксимативной единицей, а

$$\lim_{y\to+0} P^*(x,y) = \lim_{y\to+0} P(x,y).$$

Случай $\lambda = 0$. Рассмотрим задачу Дирихле

$$\Delta_x u + u_{yy} + \frac{\beta}{y} u_y = 0,\ \ \beta < 1,\ \ y > 0,\ \ x \in \mathbb{R}^n, \tag{9}$$

$$u(x,0) = \delta(x),\ \ x \in \mathbb{R}^n. \tag{10}$$

Уравнение (8) инвариантно относительно группы растяжений $\overline{x} = tx$, $\overline{y} = ty$, $\overline{u} = t^k u$, $t > 0$, где k — любое число. В связи с этим рассмотрим решения уравнения (9), инвариантные относительно указанной группы преобразований, т. е. являющиеся однородными функциями $u(tx,\, ty) = t^{-k} u(x,y)$. Переходя к пределу при $y \to +0$, получаем $(tx, 0) = t^{-k} u(x,0)$, но в силу граничного условия (10) должно иметь место равенство $\delta(tx) = t^{-k}\delta(x)$. Откуда следует, что $k = n$, поскольку $\delta(x)$ в $\mathbb{R}^n$ является однородной функцией степени $-n$ [12, 13]: $\delta(tx) = t^{-n}\delta(x)$. Будем искать автомодельное решение уравнения (9) в виде однородной функции степени $-n$:

$$u = \frac{1}{y^n}\varphi\left(\frac{|x|}{y}\right), \;\; |x| = r.$$

Уравнение (9) запишется в виде

$$u_{rr} + \frac{n-1}{r}u_r + u_{yy} + \frac{\beta}{y}u_y = 0.$$

Подставляя в него функцию $u = \dfrac{1}{y^n}\varphi\left(\dfrac{r}{y}\right)$ и обозначая $\dfrac{r}{y} = \xi$, для функции $\varphi(\xi)$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\left(1+\xi^2\right)\varphi''(\xi) + \left(\frac{n-1}{\xi} + (2n+2-\beta)\xi\right)\varphi'(\xi) +$$
$$+\left(n^2 + n - \beta n\right)\varphi(\xi) = 0.$$

Выполним замену переменных $1+\xi^2 = \eta$ и, обозначая функцию $\varphi\left(\sqrt{\eta-1}\right)$ через $\overline{\varphi}(\eta)$, запишем уравнение

$$\eta(1-\eta)\overline{\varphi}''(\eta) + \left(\frac{n}{2} + \frac{3-\beta}{2} - \left(n + \frac{3-\beta}{2}\right)\eta\right)\overline{\varphi}'(\eta) -$$
$$-\left(\frac{n^2}{4} + \frac{n(1-\beta)}{4}\right)\overline{\varphi}(\eta) = 0.$$

Это гипергеометрическое уравнение

$$\eta(1-\eta)\overline{\varphi}''(\eta) + \left(c - (1+a+b)\eta\right)\overline{\varphi}'(\eta) - ab\overline{\varphi}(\eta) = 0,$$

где $a = \dfrac{n}{2}$; $b = \dfrac{n}{2} + \dfrac{1-\beta}{2}$; $c = 1 + \dfrac{n}{2} + \dfrac{1-\beta}{2}$. Его общее решение имеет вид

$$\overline{\varphi}(\eta) = C_1 F(a, b; c; \eta) + C_2\eta^{1-c}F(b-c+1, \; a-c+1; \; 2-c; \; \eta).$$

Здесь F — гипергеометрическая функция. Поскольку $b-c+1=0$,

$$F(b-c+1, \; a-c+1; \; 2-c; \; \eta) = 1.$$

Возьмем частное решение

$$\overline{\varphi}(\eta) = C_n\eta^{1-c} = \frac{C_n}{\eta^{n/2+(1-\beta)/2}}.$$

Возвращаясь к старым переменным, получаем

$$\varphi(\xi) = \frac{C_n}{\left(1+\xi^2\right)^{n/2+(1-\beta)/2}}, \;\; u = \frac{1}{y^n}\varphi\left(\frac{r}{y}\right) = \frac{C_n y^{1-\beta}}{\left(y^2+r^2\right)^{n/2+(1-\beta)/2}}.$$

Константу C_n выберем такой, чтобы интеграл функции $\varphi(|x|)$, $|x|=r$, по всему пространству $\mathbb{R}^n$ был равен единице. Обозначив через σ_{n-1} площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$, определим

$$C_n^{-1}=\sigma_{n-1}\int_0^\infty \varphi(r)r^{n-1}dr=\sigma_{n-1}\int_0^\infty \frac{r^{n-1}dr}{\left(1+r^2\right)^{n/2+(1-\beta)/2}}=$$

$$=\frac{\sigma_{n-1}}{2}\int_0^\infty \frac{t^{n/2-1}}{\left(1+t\right)^{n/2+(1-\beta)/2}}dt=\frac{\sigma_{n-1}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\beta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1-\beta}{2}\right)}=\frac{\pi^{n/2}\Gamma\left(\frac{1-\beta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1-\beta}{2}\right)}.$$

Решением уравнения (9) будет функция

$$P_0(x,y)=C_n\frac{y^{1-\beta}}{\left(y^2+|x|^2\right)^{n/2+(1-\beta)/2}},\quad C_n=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1-\beta}{2}\right)}{\pi^{n/2}\Gamma\left(\frac{1-\beta}{2}\right)}. \tag{11}$$

Функция (11) удовлетворяет условиям 1–3 и, следовательно, является фундаментальным решением задачи Дирихле для уравнения (9). Решением задачи Дирихле для уравнения (9) с произвольной функцией в граничном условии $u(x,0)=\psi(x)$ будет свертка (если она существует)

$$u(x,y)=\psi(x)*P_0(x,y). \tag{12}$$

Если $\psi(x)$ — обобщенная функция и свертка (12) существует, то она дает обобщенное решение задачи Дирихле:

$$\lim_{y\to+0}u(x,y)=\psi(x) \text{ в } \mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^n\right),$$

т. е. для $\forall\varphi(x)\in\mathcal{D}\left(\mathbb{R}^n\right)$ $\lim\limits_{y\to+0}\int\limits_{\mathbb{R}^n}u(x,y)\varphi(x)dx=\left\langle\psi(x),\,\varphi(x)\right\rangle$. Если $\psi(x)$ — кусочно-непрерывная ограниченная функция, то свертка (12) существует и записывается в виде интеграла

$$u(x,y)=C_n\int_{\mathbb{R}^n}\frac{y^{1-\beta}\psi(t)dt}{\left(y^2+|x-t|^2\right)^{n/2+(1-\beta)/2}},\ C_n=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1-\beta}{2}\right)}{\pi^{n/2}\Gamma\left(\frac{1-\beta}{2}\right)},$$

который дает классическое решение задачи Дирихле, т. е. в каждой точке непрерывности функции $\psi(x)$ $\lim\limits_{y\to+0}u(x,y)=\psi(x)$.

Заменяя в (11) y отношением $\frac{2}{2-m}y^{(2-m)/2}$ и β отношением $\frac{2\alpha-m}{2-m}$, получаем фундаментальное решение задачи Дирихле:

$$Q_0\left(x,y\right)=C_n^*\frac{y^{1-\alpha}}{\left(y^{2-m}+\left(\frac{2-m}{2}\right)^2\left|x\right|\right)^{\frac{n}{2}+\frac{1-\alpha}{2-m}}},\quad C_n^*=\frac{\left(2-m\right)^n\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1-\alpha}{2-m}\right)}{2^n\pi^{n/2}\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2-m}\right)}$$

для уравнения (3), при $\lambda=0$:

$$\Delta_x u+y^m u_{yy}+\alpha y^{m-1}u_y=0,\quad y>0,\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad m<2,\quad \alpha<1.$$

Случай $\lambda\neq 0$. Будем искать фундаментальное решение уравнения

$$\Delta_x u+u_{yy}+\frac{\beta}{y}u_y-\lambda^2 u=0 \tag{13}$$

в том же виде, что и найденное фундаментальное решение (11) для уравнения (9):

$$u=y^{1-\beta}f\left(y^2+|x|^2\right),\quad |x|=r.$$

Подставляя функцию $u=y^{1-\beta}f\left(y^2+r^2\right)$ в уравнение

$$u_{rr}+\frac{n-1}{r}u_r+u_{yy}+\frac{\beta}{y}u_y-\lambda^2 u=0,\quad \beta<1,$$

и обозначая $\xi=y^2+r^2$, получаем для функции $f(\xi)$ обыкновенное дифференциальное уравнение $4\xi f''\left(\xi\right)+\left(6+2n-2\beta\right)f'\left(\xi\right)-\lambda^2 f\left(\xi\right)=0.$ Это уравнение сводится к уравнению Бесселя и имеет стремящееся к нулю на бесконечности решение [14]

$$f\left(\xi\right)=C_n\frac{K_\nu\left(\lambda\sqrt{\xi}\right)}{\left(\sqrt{\xi}\right)^\nu},\quad \nu=\frac{1+n-\beta}{2},$$

где K_ν — функция Макдональда. Возвращаясь к старым переменным, запишем

$$u(x,y)=C_n\frac{y^{1-\beta}K_\nu\left(\lambda\sqrt{r^2+y^2}\right)}{\left(\sqrt{r^2+y^2}\right)^\nu},\quad r=|x|,\quad \nu=\frac{1+n-\beta}{2}.$$

Постоянную C_n выберем так, чтобы интеграл $u(x,y)$ по всему пространству $\mathbb{R}^n$ стремился к единице при $y\to+0$. Переходя к сферическим координатам, получаем [15]

$$\int_{\mathbb{R}^n}u\left(x,y\right)dx=C_n\sigma_{n-1}y^{1-\beta}\int_0^\infty\frac{r^{n-1}K_\nu\left(\lambda\sqrt{r^2+y^2}\right)}{\left(\sqrt{r^2+y^2}\right)^\nu}dr=$$

$$= C_n \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^{n/2} y^{(1-\beta)/2} K_{(1-\beta)/2}(\lambda y).$$

Учитывая асимптотику функции Макдональда

$$K_\mu(z) \sim \frac{1}{2}\Gamma(\mu)\left(\frac{z}{2}\right)^{-\mu}, \quad z \to 0,$$

имеем

$$\lim_{y \to +0} y^{(1-\beta)/2} K_{(1-\beta)/2}(\lambda y) = \frac{\Gamma((1-\beta)/2)}{2^{(1+\beta)/2}\lambda^{(1-\beta)/2}}$$

и

$$C_n = \frac{\lambda^\nu}{2^{\nu-1}\pi^{n/2}\Gamma((1-\beta)/2)}.$$

Фундаментальным решением задачи Дирихле для уравнения (12) будет функция

$$P_\lambda(x, y) = \frac{\lambda^\nu}{2^{\nu-1}\pi^{n/2}\Gamma((1-\beta)/2)} \frac{y^{1-\beta} K_\nu\left(\lambda\sqrt{|x|^2 + y^2}\right)}{\left(\sqrt{|x|^2 + y^2}\right)^\nu},$$

поскольку она удовлетворяет условиям 1, 2^* и 3, определяющим аппроксимативную единицу.

Переходя к пределу при λ, стремящемся к нулю, с учетом асимптотики функции Макдональда получаем фундаментальное решение (11) задачи Дирихле для уравнения (9)

$$P_0(x, y) = \frac{\Gamma(\nu)}{\pi^{n/2}\Gamma((1-\beta)/2)} \frac{y^{1-\beta}}{\left(|x|^2 + y^2\right)^\nu}, \quad \nu = \frac{1+n-\beta}{2}.$$

Заменяя в $P_\lambda(x, y)$ y соотношением $\dfrac{2}{2-m} y^{\frac{2-m}{2}}$ и β соотношением $\dfrac{2\alpha - m}{2-m}$, получаем фундаментальное решение задачи Дирихле для уравнения (3).

Пример. Рассмотрим задачу Дирихле

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \ y > 0, \ x \in \mathbb{R}^1, \ u(x, 0) = x_+^{-3/2}, \ u(x, y) \text{ ограничена при } y \to +\infty.$$

Здесь

$$x_+^{-3/2} = \begin{cases} x^{-3/2}, & x > 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Эта функция имеет неинтегрируемую особенность в нуле, поэтому она порождает сингулярную обобщенную функцию, действующую на основные функции $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ по правилу [13]

$$\left\langle x_+^{-3/2},\ \varphi(x)\right\rangle=\int\limits_0^\infty\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^{3/2}}dx.$$

Уравнение Лапласа получается из уравнения (3) при $n=1,\ m=0,\ \alpha=0,\ \lambda=0,$ и фундаментальным решением задачи Дирихле для него будет ядро Пуассона

$$P(x,y)=\frac{y}{\pi\left(x^2+y^2\right)}.$$

Решением задачи Дирихле является свертка

$$u(x,y)=x_+^{-3/2}*P(x,y).$$

Чтобы вычислить эту свертку, рассмотрим сначала задачу Дирихле с краевым условием $u(x,0)=-2x_+^{-1/2}$. Эта функция локально интегрируема и порождает регулярную обобщенную функцию, обобщенная производная которой равна $x_+^{-3/2}$ [13]. Для функции $-2x_+^{-1/2}$ свертка с ядром Пуассона записывается интегралом

$$-2x_+^{-1/2}*P(x,y)=-\frac{2y}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{dt}{\sqrt{t}\left((x-t)^2+y^2\right)}=-\frac{\sqrt{2}\,y}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}-x}}.$$

Теперь, используя свойство дифференцирования свертки, находим

$$u(x,y)=x_+^{-3/2}*P(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-2x_+^{-1/2}*P(x,y)\right)=$$

$$=\frac{y\left(3x\sqrt{x^2+y^2}-3x^2-y^2\right)}{\sqrt{2}\left(x^2+y^2\right)^{3/2}\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)^{3/2}}.$$

Для произвольной обобщенной функции в граничном условии задачи Дирихле, для которой существует свертка с фундаментальным решением задачи Дирихле, можно гарантировать только сходимость этой свертки к граничной функции при $y\to+0$ в слабом смысле, т. е. сходимость в $\mathcal{D}'$. Однако для такой функции существует обычный предел

$$\lim_{y\to+0}u(x,y)=0 \text{ при } x<0 \text{ и } \lim_{y\to+0}u(x,y)=\frac{1}{x^{3/2}} \text{ при } x>0.$$

Заключение. Для многомерного эллиптического уравнения в полупространстве с параболическим вырождением на границе, являющегося обобщением уравнения Келдыша, найдено фундаментальное решение задачи Дирихле методом подобия. Решение задачи Дирихле с произвольной граничной функцией записано в виде свертки этой функции с фундаментальным решением задачи Дирихле.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Келдыш М.В.* О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области // ДАН СССР. 1951. Т. 77. № 2. С. 81–83.

2. *Берс Л.* Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. М.: Изд-во Иностранной литературы, 1961. 208 с.

3. *Otway T.H.* Dirichlet problem for elliptic-hyperbolic equations of Keldysh type. Berlin—Heidelberg: Springer-Verlag, 2012. 214 p.

4. *Ибрагимов Н.Х.* Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений и принцип инвариантности в математической физике (к 150-летию со дня рождения Софуса Ли) // Успехи математических наук. 1992. Т. 47. № 4. С. 83–144.

5. *Bluman G.W., Cole J.D.* Similarity methods for differential equations. New York—Heidelberg—Berlin: Springer-Verlag, 1974. 333 p.

6. *Алгазин О.Д.* Точное решение задачи Дирихле для вырождающегося на границе эллиптического уравнения типа Трикоми — Келдыша в полупространстве // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2016. № 5. С. 4–17.
DOI: 10.18698/1812-3368-2016-5-4-17

7. *Парасюк Л.С., Парасюк І.Л.* Властивості фундаментальних розв'язків основних крайових задач для деяких диференціальних рівнянь другого порядку змішаного типу // Наукові записки. 1999. № 1. С. 126–129.

8. *Barros-Neto J., Gelfand I.M.* Fundamental solutions for the Tricomi operator // Duke Math. J. 1999. Vol. 98. No. 3. P. 465–483. DOI: 10.1215/S0012-7094-99-09814-9

9. *Barros-Neto J., Gelfand I.M.* Fundamental solutions for the Tricomi operator, II // Duke Math. J. 2002. Vol. 111. No. 3. P. 561–584. DOI: 10.1215/S0012-7094-02-11137-5

10. *Barros-Neto J., Gelfand I.M.* Fundamental solutions for the Tricomi operator, III // Duke Math. J. 2005. Vol. 128. No. 1. P. 119–140. DOI: 10.1215/S0012-7094-04-12815-5

11. *Chen Sh.* The fundamental solution of the Keldysh type operator // Science in China Series A: Mathematics. 2009. Vol. 52. Iss. 9. P. 1829–1843. DOI: 10.1007/s11425-009-0069-8

12. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979. 320 с.

13. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1959. 470 с.

14. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. 576 с.

15. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.

Алгазин Олег Дмитриевич — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Алгазин О.Д. Построение методом подобия фундаментального решения задачи Дирихле для уравнения типа Келдыша в полупространстве // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2018. № 1. С. 4–15. DOI: 10.18698/1812-3368-2018-1-4-15

SIMILARITY METHOD IN CONSTRUCTING FUNDAMENTAL SOLUTION OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR EQUATION OF KELDYSH TYPE IN HALF-SPACE

O.D. Algazin mopi66@yandex.ru

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

The purpose of this research was to use the similarity method for the equation of Keldysh type, which is elliptic in half-space and degenerating on the boundary. As a result, we found a self-similar solution, which is the approximate identity in the class of integrable functions. It is a fundamental solution of the Dirichlet problem, i. e. the solution of the Dirichlet problem with the Dirac δ-function in the boundary condition. The solution of the Dirichlet problem with an arbitrary function in the boundary condition can be written as the convolution of the function with the fundamental solution of the Dirichlet problem if the convolution exists. For a bounded and piecewise continuous boundary function the convolution exists and is written in the form of an integral, which gives the classical solution of the Dirichlet problem, and is a generalization of the Poisson integral for the Laplace equation. If the boundary function is a generalized function, the convolution is a generalized solution of the Dirichlet problem

Keywords

Equation of Keldysh type, Dirichlet problem, similarity method, self-similar solution, approximate identity, generalized functions

Received 11.11.2016

REFERENCES

[1] Keldysh M.V. On some instances of elliptical equation degeneration at the area boundary. *DAN SSSR*, 1951, vol. 77, no. 2, pp. 81–83 (in Russ.).

[2] Bers L. Mathematical aspects of subsonic and transonic gas dynamics. New York, Wiley, 1958. 164 p.

[3] Otway T.H. Dirichlet problem for elliptic-hyperbolic equations of Keldysh type. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2012. 214 p.

[4] Ibragimov N.Kh. Group analysis of ordinary differential equations and the invariance principle in mathematical physics (for the 150th anniversary of Sophus Lie). *Russian Mathematical Surveys*, 1992, vol. 47, no. 4, pp. 89–156. DOI: 10.1070/RM1992v047n04ABEH000916

[5] Bluman G.W., Cole J.D. Similarity methods for differential equations. New York, Heidelberg, Berlin, Springer-Verlag, 1974. 333 p.

[6] Algazin O.D. Exact solution to the Dirichlet problem for degenerating on the boundary elliptic equation of Tricomi — Keldysh type in the half-space. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2016, no. 5, pp. 4–17 (in Russ.). DOI: 10.18698/1812-3368-2016-5-4-17

[7] Parasyuk L.S., Parasyuk I.L. Properties of elementary solutions of the main boundary problems for the mixed types second-order differential equations. *Naukovi zapiski* [Scientific Papers], 1999, no. 1, pp. 126–129.

[8] Barros-Neto J., Gelfand I.M. Fundamental solutions for the Tricomi operator. *Duke Math. J.*, 1999, vol. 98, no. 3, pp. 465–483. DOI: 10.1215/S0012-7094-99-09814-9

[9] Barros-Neto J., Gelfand I.M. Fundamental solutions for the Tricomi operator, II. *Duke Math. J.*, 2002, vol. 111, no. 3, pp. 561–584. DOI: 10.1215/S0012-7094-02-11137-5

[10] Barros-Neto J., Gelfand I.M. Fundamental solutions for the Tricomi operator, III. *Duke Math. J.*, 2005, vol. 128, no. 1, pp. 119–140. DOI: 10.1215/S0012-7094-04-12815-5

[11] Chen Sh. The fundamental solution of the Keldysh type operator. *Science in China Series A: Mathematics*, 2009, vol. 52, iss. 9, pp. 1829–1843. DOI: 10.1007/s11425-009-0069-8

[12] Vladimirov V.S. Obobshchennye funktsii v matematicheskoy fizike [Generalised functions in mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 320 p.

[13] Gelfand I.M., Shilov G.E. Obobshchennye funktsii i deystviya nad nimi [Generalised functions and operations with them]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1959. 470 p.

[14] Kamke E. Spravochnik po obyknovennym differentsialnym uravneniyam [Handbook on the ordinary differential equations]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 576 p.

[15] Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedeniy [Tables of integrals, sums, series and products]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 1108 p.

Algazin O.D. — Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Professor of Computational Mathematics and Mathematical Physics Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Algazin O.D. Similarity Method in Constructing Fundamental Solution of the Dirichlet Problem for Equation of Keldysh Type in Half-Space. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2018, no. 1, pp. 4–15 (in Russ.). DOI: 10.18698/1812-3368-2018-1-4-15