

НЕРАВЕНСТВО ЛУЗИНА ДЛЯ ДОПОЛНЕНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЭЛЛИпсоИДОВ В \mathbb{C}^n

А.С. Роткевич

rotkevichas@gmail.com

Санкт-Петербургский государственный университет,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

Аннотация

Получено обобщение интегрального неравенства площади для функций, определяемых в дополнение к комплексным эллипсоидам в \mathbb{C}^n сопряженными интегралами Коши — Лере — Фантаппье. Эти оценки могут быть применены для характеристики гладкости голоморфных функций с помощью псевдоаналитических продолжений и являются частью исследования, посвященного описанию пространств голоморфных функций через полиномиальные приближения. Методы исследования можно рассматривать как модельный пример применения векторнозначной T_1 -теоремы для доказательства нелинейных неравенств

Ключевые слова

Неравенство Лузина, интеграл Коши — Лере — Фантаппье, T_1 -теорема

Поступила в редакцию 25.09.2017
© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2018

Работа выполнена при поддержке РНФ (грант № 14-41-00010)

Введение. Рассмотрим область Радона $G \subset \mathbb{C}$ и для $z \in \partial G$ сектор $S(z) = \left\{ \xi \in G : \text{dist}(\xi, \partial G) \geq \frac{1}{2} |\xi - z| \right\}$. Известно [1, 2], что для функции f , голоморфной в области G ,

$$\|I_f\|_{L^p(\partial G)} \leq c(p, G) \|f\|_{L^p(\partial G)}, \quad 1 < p < \infty, \quad (1)$$

для некоторой постоянной $c(p, G)$, где I_f — интеграл Лузина,

$$I_f(z) = \left(\int_{S(z)} |f'(\xi)|^2 d\mu(\xi) \right)^{1/2},$$

$d\mu$ — мера Лебега в комплексной плоскости \mathbb{C} .

Обобщения неравенства (1) для областей в \mathbb{C}^n рассмотрены в работах [3–5]. Обобщение этого неравенства, в котором вместо голоморфной функции f рассмотрена функция, определенная ядром интегрального оператора Коши — Лере — Фантаппье в дополнение к строго выпуклой области в \mathbb{C}^n , предложено в работе [6]. *Цель настоящей работы* — распространить результаты работы [6] на комплексные эллипсоиды. В дальнейших исследованиях полученный результат планируется применять к задачам описания гладкости голоморфных функ-

ций через псевдоаналитические продолжения и полиномиальные приближения (см. [7]). Геометрия эллипсоида подробно изучена в работах [8–10], и здесь будут активно использоваться полученные в них результаты.

Основные обозначения. Для краткой записи неравенств введем символы \lesssim, \asymp , и будем утверждать, что $f \lesssim g$, если $f \leq cg$ для некоторой постоянной $c > 0$, не зависящей от основных аргументов величин f и g . Также $f \asymp g$, если $c^{-1}g \leq f \leq cg$ для некоторой постоянной $c > 1$.

Рассмотрим комплексный эллипсоид

$$B_t^p = \{z \in \mathbb{C}^n : \rho(z) = |z_1|^{2p_1} + \dots + |z_n|^{2p_n} - 1 < t\},$$

где $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{N}^n$. Полагаем $B^p = B_0^p$.

Примем $v(z, \xi) = \langle \partial\rho(\xi), \xi - z \rangle = \sum_{j=1}^n \frac{\partial\rho(\xi)}{\partial\xi_j} (z_j - \xi_j)$, тогда $|v(z, \xi)| \asymp |v(\xi, z)|$ и функция $d(\xi, z) = |v(z, \xi)| + |v(\xi, z)|$ определяет на ∂B^p квазиметрику. Шар в \mathbb{C}^n обозначим через $B = B^{(1, \dots, 1)}$, соответствующую квазиметрику — через d_B .

Теорема Лере позволяет выписать воспроизводящую формулу для голоморфных в эллипсоиде B^p функций в явном виде, точнее для функции $f \in H^1(B^p)$:

$$f(z) = Kf(z) = \int_{\partial B^p} f(\xi) K(\xi, z) dS(\xi), \quad z \in \partial B^p. \quad (2)$$

Здесь $K(\xi, z) = \langle \partial\rho(\xi), \xi - z \rangle^{-n}$; $dS(\xi) = (2\pi i)^{-n} \partial\rho(\xi) \wedge (\bar{\partial}\rho(\xi))^{n-1}$ — форма, определяющая меру Леви — Лере, причем $dS \sim wd\sigma$, где $w(\xi) = \prod_{j=1}^n p_j^2 |\xi_j|^{2(p_j-1)}$;

$d\sigma$ — индуцированная мера Лебега на границе ∂B_t^p . Далее полагаем, что пространства Лебега L^p на ∂B^p определены относительно меры dS и определяем $L^p(\partial B^p) = L^p(\partial B^p, dS)$.

Квазишары $B(z, \delta) = B(z, \delta, t) = \{w \in \partial B_t^p : d(w, z) < \delta\}$ в квазиметрике d имеют меру, сравнимую с δ^n , $|B(z, \delta)| = dS_t(B(z, \delta)) \asymp \delta^n$ равномерно по $t \in [0, \varepsilon]$ для любого значения $\varepsilon > 0$. Таким образом, $\{\partial B_t^p, d, dS_t\}$ является пространством однородного типа.

Для $z \in \mathbb{C}^n$ определим проекцию \hat{z} на эллипсоид ∂B^p формулой $z_j = (1 + \rho(z))^{1/(2p_j)} \hat{z}_j$. В работе Т. Ханссона [9, леммы 2, 3] приведены следующие оценки:

$$|v(w, z)| \asymp \rho(w) + |v(\hat{w}, z)|, \quad w \in (B^p)^c, \quad z \in \partial B^p; \quad (3)$$

$$|v(w, z)| \asymp |v(\hat{w}, \hat{z})|, \quad w, z \in (B^p)^c. \quad (4)$$

Кроме того, для $\gamma = \frac{1}{2 \max(p_j)}$ и некоторой постоянной $C > 0$

$$\begin{aligned} |v(w, \xi) - v(z, \xi) + v(z, w)| &\lesssim d(w, z)^\gamma d(z, w)^{1-\gamma} + d(w, \xi)^{1-\gamma} d(z, w)^\gamma, \quad z, \xi, w \in \partial B^p; \\ |v(w, \xi) - v(z, \xi)| + |v(\xi, w) - v(\xi, z)| &\lesssim \varepsilon^\gamma d(\xi, z_0)^{1-\gamma}, \quad z, \xi, w \in \partial B^p, \\ z, w \in B(z_0, \varepsilon), \quad \xi &\in \partial B^p \setminus B(z_0, C\varepsilon). \end{aligned}$$

Пусть X, Y — нормированные пространства. Пространство ограниченных линейных операторов из X в Y обозначим через $\mathcal{L}(X, Y)$, пространства Шварца на ∂B^p — через $\mathcal{S}(\partial B^p)$, $\mathcal{S}(\partial B^p, X)$, пространство, сопряженное к пространству Шварца $\mathcal{S}(\partial B^p, X)$, — через $\mathcal{S}'(\partial B^p, X) = \mathcal{L}(\mathcal{S}(\partial B^p), X)$. Более подробно это рассмотрено в работе [11].

Внешние угловые области Корани. Для точки $\xi \in \mathbb{C}^n$ определим точку $\hat{\xi}_t$ формулой $(\hat{\xi}_t)_j = (1 - \rho(\xi) + t)^{1/(2p_j)} \xi_j$. В этом случае, если $\xi \in \partial B^p$, то $\hat{\xi}_t \in \partial B_t^p$. Для $\xi \in \partial B^p$ примем

$$D_t(\xi, \eta) = \left\{ \tau \in \mathbb{C}^n \setminus B^p : \rho(\tau) = t, d(\tau, \hat{\xi}_t) < \eta t \right\}.$$

Определяем внешнюю область Корани как множество

$$D(\xi, \eta) = D(\xi, \eta, \varepsilon) = \bigcup_{0 \leq t \leq \varepsilon} D_t(\xi, \eta).$$

Отметим, что $|D_t(\xi, \eta)| \asymp t^n$, следовательно, для любой функции F , суммируемой в $D(\xi, \eta, \varepsilon)$,

$$\int_{B_\varepsilon^p \setminus B^p} |F(z)| d\mu(z) \asymp \int_{\partial B^p} dS(\xi) \int_{D(\xi, \eta, \varepsilon)} |F(\tau)| \frac{d\mu(\tau)}{\rho(\tau)^n}.$$

Кроме того, если $F(w) = \tilde{F}(\rho(w))$, то

$$\int_{D(\xi, \eta, \varepsilon)} |F(\tau)| d\mu(\tau) \asymp \int_0^\varepsilon |\tilde{F}(t)| t^n dt. \tag{5}$$

Уточним оценку (3) величины $|v(\tau, z)|$ для точек $\tau \in D(z, \eta, \varepsilon)$.

Лемма 1. Пусть $\varepsilon, \eta > 0$. Тогда

$$|v(\tau, w)| \asymp \rho(\tau) + d(z, w), \quad z, w \in \partial B^p, \tau \in D(z, \eta, \varepsilon).$$

◀ Предположим, что $\rho(\tau) = t$. Согласно оценке (4), $|v(\tau, \hat{z}_t)| \asymp |v(\hat{\tau}, z)|$ и, согласно оценке (3),

$$|v(\tau, w)| \lesssim |v(\hat{\tau}, w)| + t \lesssim |v(z, w)| + |v(\hat{\tau}, z)| \lesssim t + |v(z, w)|.$$

Однако из гладкости функции $v(\tau, w)$ по $\tau, w \in \mathbb{C}^n$ получаем равномерную по $w \in \partial B^p$ оценку $|v(\hat{\tau}, w) - v(\tau, w)| \lesssim |\tau - \hat{\tau}| \lesssim t$. Следовательно,

$$\rho(\tau) + |v(z, w)| \lesssim \rho(\tau) + |v(\hat{\tau}, z)| + |v(\hat{\tau}, w)| \lesssim \rho(\tau) + |v(\tau, \hat{z}_t)| + |v(\hat{\tau}, w)| \lesssim \rho(\tau) + |v(\tau, w)|,$$

что заканчивает доказательство. ►

Для дальнейших рассуждений понадобятся отображения областей Корани $D(\xi, \eta, \varepsilon)$ на некоторую универсальную область Корани D_0 для шара, и выберем покрытие $\{\Gamma_j\}_{j=1}^N$ множества $B_{2\varepsilon}^p \setminus B^p$ со следующими свойствами:

- 1) $\Gamma_j \cap \partial B^p \neq \emptyset$;
- 2) отображение $z \in \Gamma_j \rightarrow z^{(p)} = (z_1^{p_1}, \dots, z_n^{p_n})$ голоморфно и инъективно;
- 3) на $\Gamma_j^p = \{z^{(p)} : z \in \Gamma_j\}$ можно задать голоморфную замену $A(w) : \mathbb{C}^n \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$, $w \in \Gamma_j^p$ так, что $A(w)w = e_n = (0, \dots, 0, 1)$ и $\|A(w) - A(w')\| \lesssim |w - w'|$;
- 4) пусть $\varphi_j = A(w)z^{(p)} : \Gamma_j \times \Gamma_j \rightarrow \{1 < |w| < 1 + 2\varepsilon\}$ и $\Gamma_j^0(w) = A(w)\Gamma_j^p$. Обозначим обратное отображение через $\psi_j(w, \cdot)$. Можно полагать, что для некоторой постоянной $\eta_1 > 0$ отображение $\psi_j(w, \cdot)$ определено во внешней области Корани для шара

$$D_0 = D_0(\eta_1, \varepsilon) = \{\tau \in \mathbb{C}^n : 1 < |\tau| < 1 + \varepsilon, d_B(\tau, |\tau|e_n) \leq \eta_1 (|\tau| - 1)\}$$

и для некоторой постоянной $c > 0$ при $0 < \eta < c\eta_1$

$$\psi_j(w, D_0(\eta, \varepsilon)) \subset \Gamma_j \cap D(w, c\eta, c\varepsilon); \quad \varphi_j(w, D(w, \eta, \varepsilon)) \subset D_0(c\eta, c\varepsilon).$$

Далее предположим, что выбрано разбиение единицы для покрытия $\{\Gamma_j\}_{j=1}^N$

$$\chi_j \in C^\infty(\Gamma_j), \quad 0 \leq \chi_j \leq 1, \quad \text{supp } \chi_j \subset \Gamma_j, \quad \sum_{j=1}^N \chi_j(z) = 1, \quad z \in \partial B^p.$$

Основная теорема. Пусть $\eta, \varepsilon > 0$, для функции $g \in L^1(\partial B^p)$ и $l \in \mathbb{N}_0$ определим функцию

$$I_l(g, z) = \left(\int_{D(z, \eta, \varepsilon)} \left| \int_{\partial B^p} \frac{g(w) dS(w)}{v(\tau, w)^{n+l}} \right|^2 dv_l(\tau) \right)^{1/2}, \quad (6)$$

где $dS(w) = (2\pi i)^{-n} \bar{\partial} \rho(w) \wedge (\bar{\partial} \partial \rho(w))^{n-1}$ (см. (2)) и $dv_l(\tau) = \frac{d\mu(\tau)}{\rho(\tau)^{n-2l-1}}$.

Теорема 1. Пусть $g \in L^p(\partial B^p)$, $1 < p < \infty$, $l \in \mathbb{N}_0$. Тогда

$$\int_{\partial B^p} I_l(g, z)^p dS(z) \leq c(p, l) \int_{\partial B^p} |g(z)|^p dS(z)$$

для некоторой постоянной $c(p, l) > 0$.

Отметим, что при $n = 1$ интеграл (6) является голоморфной функцией, и результат теоремы следует из статьи Е.М. Дынькина [2].

Основная идея доказательства этой теоремы заключается в том, что оператор I_l можно рассмотреть как сумму операторов со значениями в некотором модельном пространстве L^2 .

Зафиксируем параметры $0 < \varepsilon, \eta, \eta_1 < \varepsilon_0$, обозначим через $J_j(z, \tau)$ комплексный дифференциал отображения ψ_j , тогда

$$I_l(g, z)^2 = \sum_{j=1}^N \chi_j(z) \int_{D(z, \eta, \varepsilon)} \left| \int_{\partial B^p} \frac{g(w) J_j(z, \tau) dS(w)}{\nu(\psi_j(z, \tau), w)^{n+l}} \right|^2 \frac{d\mu(\tau)}{\operatorname{Re}(\tau_n)^{n-2l+1}} \lesssim \sum_{j=1}^N \int_{D_0} \left| \int_{\partial B^p} \frac{g(w) \chi_j^{1/2}(z) J_j(z, \tau) dS(w)}{\nu(\psi_j(z, \tau), w)^{n+l}} \right|^2 \frac{d\mu(\tau)}{\operatorname{Re}(\tau_n)^{n-2l+1}}. \tag{7}$$

Рассмотрим функцию

$$K_j(z, w)(\tau) = \frac{\chi_j^{1/2}(z) J_j(z, \tau)}{\nu(\psi_j(z, \tau), w)^{n+l}}$$

как отображение $\partial B^p \times \partial B^p \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}, L^2(D_0, d\nu_l))$ такое, что его значениями являются операторы домножения $\zeta \in \mathbb{C} \rightarrow \zeta K_j(\xi, w) \in L^2(D_0, d\nu_l)$, где $d\nu_l(\tau) = \frac{d\mu(\tau)}{\operatorname{Im}(\tau_n)^{n-2l+1}}$ мера на множестве D_0 . Далее полагаем, что числа j, l зафиксированы. Норму функции F в пространстве $L^2(D_0, d\nu_l)$ обозначим через $\|F\|$.

Покажем, что интегральный оператор T_j , определенный ядром K_j , непрерывно отображает пространство $L^p(\partial B^p)$ в пространство $L^p(\partial B^p, L^2(D_0, d\nu_l))$. Для этого адаптируем $T1$ -теорему для интегральных операторов с операторно-значными ядрами [11] для рассматриваемого контекста.

Определение 1. Функцию $f \in C_0^\infty(\partial B^p)$ называем *випр-функцией*, ассоциированной с квазишаром $B(w_0, r)$, если $\operatorname{supp} f \subset B(w_0, r)$, $|f| \leq 1$, и

$$|f(\xi) - f(z)| \leq \frac{d(\xi, z)^\gamma}{r^\gamma}, \quad \xi, z \in \partial B^p.$$

Множество *випр-функций*, ассоциированных с квазишаром $B(w_0, r)$, обозначим $A(\gamma, w_0, r)$.

Теорема 2. Предположим, что ядро $K: \partial B^p \times \partial B^p \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}, L^2(D_0, d\nu_l))$ удовлетворяет оценкам

$$\|K(z, w)\| \lesssim \frac{1}{d(z, w)^n}; \tag{8}$$

$$\|K(z, w) - K(\xi, w)\| \lesssim \frac{d(z, \xi)^\gamma}{d(z, w)^{n+\gamma}}, \quad d(z, w) > Cd(z, \xi); \tag{9}$$

$$\|K(z, w) - K(z, w')\| \lesssim \frac{d(w, w')^\gamma}{d(z, w)^{n+\gamma}}, \quad d(z, w) > Cd(w, w') \tag{10}$$

для $\xi, z, w \in \partial B^p$ и некоторых постоянных $C > 0$.

Предположим, что оператор $T: \mathcal{S}(\partial B^p) \rightarrow \mathcal{S}'(\partial B^p, \mathcal{L}(\mathbb{C}, L^2(D_0, d\nu_l)))$ с ядром K удовлетворяет следующим условиям:

1) $T1, T'1 \in \text{ВМО}(\partial B^p, L^2(D_0, dv_1))$, где T' формально сопряженный к T оператор;

2) оператор T является слабо ограниченным, т. е. для произвольных витр-функций $f, g \in A(\gamma, w_0, r)$

$$\|(g, Tf)\| \leq Cr^{-n},$$

где $(g, Tf) \in \mathcal{L}(\mathbb{C}, L^2(D_0, dv_1))$ — действие $Tf \in \mathcal{S}'(\partial B^p, \mathcal{L}(\mathbb{C}, L^2(D_0, dv_1)))$ на функцию $g \in \mathcal{S}(\partial B^p)$. Тогда $T \in \mathcal{L}(L^p(\partial B^p), L^p(\partial B^p, L^2(D_0, dv_1)))$ при $p \in (1, \infty)$.

Подробные определения, связанные с этой теоремой, и ее доказательство приведены в работе [11]. Отметим, что пространство $L^p(\partial B^p, L^2(D_0, dv_1))$ определяется относительно меры Лере — Леви dS .

В следующие четыре леммах докажем, что ядра K_j и соответствующие им операторы T_j удовлетворяют условиям $T1$ -теоремы. В частности, в леммах 2, 3 докажем, что $T1, T'1 \in L^\infty(\partial B^p, L^2(D_0, dv_1)) \subset \text{ВМО}(\partial B^p, L^2(D_0, dv_1))$.

Лемма 2. Ядро K_j удовлетворяет оценкам (7)–(9).

◀ Пусть $D(z) = D(z, c\eta)$. Согласно лемме 1, $|v(\tau, w)| \asymp \rho(\tau) + d(z, w)$, $z, w \in \partial B^p$, $\tau \in D(z)$. Следуя правилу (5), получаем

$$\|K_j(z, w)\|^2 \lesssim \int_{D(z)} \frac{dv_1(\tau)}{(\rho(\tau) + d(z, w))^{2n+2l}} \lesssim \int_0^\infty \frac{t^{2l-1} dt}{(t + d(z, w))^{2n+2l}} \lesssim \frac{1}{d(z, w)^{2n}}.$$

Для доказательства свойства (9) введем обозначение $\tau_z = \psi_j(z, \tau)$. Тогда $(A(z)\tau_k) = (\tau_z)_k^{pk}$, $k = 1, \dots, n$, отсюда для некоторой постоянной $C > 0$ (см. [9]) при $d(z, w) > Cd(z, \xi)$

$$|v(\tau_z, w) - v(\tau_\xi, w)| \lesssim |v(\tau_\xi, w)|^{1-\gamma} |v(\xi, z)|^\gamma.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{v(\tau_z, w)^m} - \frac{1}{v(\tau_\xi, w)^m} \right| &= \frac{|v(\tau_z, w) - v(\tau_\xi, w)| \sum_{j=0}^{m-1} |v(\tau_z, w)|^j |v(\tau_\xi, w)|^{m-1-j}}{v(\tau_z, w)^m v(\tau_\xi, w)^m} \lesssim \\ &\lesssim \frac{|v(z, \xi)|^\gamma |v(\tau_\xi, w)|^{1-\gamma}}{|v(\tau_\xi, w)|^{m+1}} \lesssim \frac{|v(z, \xi)|^\gamma}{|v(\tau_\xi, w)|^{m+\gamma}}. \end{aligned}$$

Окончательно

$$\begin{aligned} \|K_j(z, w) - K_j(\xi, w)\|^2 &\lesssim \int_{D(z)} \frac{|\chi_j(z)^{1/2} - \chi_j(\xi)^{1/2}|^2}{|v(\tau, w)^{2n+2l}|} \frac{d\mu(\tau)}{\rho(\tau)^{n-2l+1}} + \\ + \chi_j(\xi) \int_{D_0} \frac{|v(z, \xi)|^{2\gamma}}{|v(\tau_z, w)|^{2n+2l+2\gamma}} \frac{d\mu(\tau)}{|\tau|^{n-2l+1}} &\lesssim \frac{|v(z, \xi)|^{2\gamma}}{|v(z, w)|^{2n+2\gamma}} \lesssim \frac{|v(z, \xi)|^{2\gamma}}{|v(z, w)|^{2n+2\gamma}} \lesssim \frac{d(z, \xi)^{2\gamma}}{d(z, w)^{2n+2\gamma}}. \end{aligned}$$

Свойство (10) доказывается аналогично. ▶

Лемма 3. Пусть $\tau_z = \psi_j(z, \tau)$, тогда

$$\left\| \int_{\partial B^p} \frac{dS(w)}{\langle \partial\rho(\tau_z), \tau_z - w \rangle^{n+1}} \right\| \lesssim 1,$$

следовательно, $\|T_j(1)\| \lesssim 1$.

◀ Функция $v(\tau_z, w) = \langle \partial\rho(\tau_z), \tau_z - w \rangle$ голоморфна в B^p относительно w , отсюда

$$T_j(1)(\tau) = \int_{\partial B^p} \frac{\chi_j(z)^{1/2} J_j(z, \tau) dS(w)}{\langle \partial\rho(\tau_z), \tau_z - w \rangle^{n+1}} = \int_{B^p} \frac{\chi_j(z)^{1/2} J_j(z, \tau) dV(w)}{\langle \partial\rho(\tau_z), \tau_z - w \rangle^{n+1}},$$

где $dV(w) = (\bar{\partial}\partial\rho(\xi))^n$.

Аналогично лемме 1

$$|\langle \partial\rho(\tau_z), \tau_z - w \rangle| \asymp \rho(\tau) + |\rho(w)| + |\langle \partial\rho(z), z - \hat{w} \rangle|.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |T_j(1)(\tau)| &\lesssim \int_{B^p} \frac{d\mu(z)}{|\nu(\tau_z, w)|^{n+1}} \lesssim \int_0^T dt \int_{\partial B^p_t} \frac{d\sigma_t}{(t + \rho(\tau) + v(z, \hat{w}))^{n+1}} \lesssim \\ &\lesssim \int_0^T dt \int_0^\infty \frac{v^{n-1} dv}{(t + \rho(\tau) + v)^{n+1}} \lesssim \int_0^T \frac{dt}{(t + \rho(\tau))^l} \lesssim \rho(\tau)^{l-1} \ln\left(1 + \frac{1}{\rho(\tau)}\right) \end{aligned}$$

и

$$\int_{D_0} |T_j(1)(\tau)|^2 d\nu_l(\tau) \lesssim \int_{D_0} \rho(\tau)^{2-2l} \ln^2\left(1 + \frac{1}{\text{Re}(\tau_n)}\right) d\nu_l(\tau) \lesssim \int_0^\varepsilon \ln^2\left(1 + \frac{1}{s}\right) s ds \lesssim 1.$$

Это заканчивает доказательство теоремы. ▶

Лемма 4. $\|T_j'(1)\| \lesssim 1$.

◀ Рассмотрим

$$\begin{aligned} \overline{T_j'(1)(w)}(\tau) &= \int_{\partial B^p} \frac{\chi_j(z)^{1/2} J_j(z, \tau) dS(z)}{|\nu(\tau_z, w)|^{n+1}} = \int_{\partial B^p} \frac{\chi_j(z)^{1/2} J_j(z, \tau) (dS(z) - dS(\tau_z))}{|\nu(\tau_z, w)|^{n+1}} + \\ &+ \int_{\partial B^p} \frac{\chi_j(z)^{1/2} J_j(z, \tau) dS(\tau_z)}{|\nu(\tau_z, w)|^{n+1}} = L_1 + L_2. \end{aligned}$$

Отметим, что $|dS(z) - dS(\tau_z)| \lesssim \rho(\tau_z) d\sigma(z)$ и

$$|L_1| \lesssim \int_{\partial B^p} \frac{\rho(\tau_z) d\sigma(z)}{|\nu(\tau_z, w)|^{n+1}} \lesssim \int_0^\infty \frac{\rho(\tau_z) v^{n-1} dv}{(\rho(\tau_z) + v)^{n+1}} \lesssim \frac{1}{\text{Re}(\tau_n)^{l-1}}.$$

Следовательно,

$$\int_{D_0} |L_1|^2 d\nu_l(\tau) \lesssim \int_{D_0} \frac{1}{\rho(\tau_z)^{2l-2}} \frac{d\mu(\tau)}{\rho(\tau_z)^{n-2l+1}} \lesssim \int_0^\varepsilon \frac{t^n dt}{t^{n-1}} \lesssim 1. \quad (11)$$

Чтобы оценить L_2 , напомним, что $d_{\xi} \frac{dS(\xi)}{\langle \partial\rho(\xi), \xi - z \rangle^n} = 0$, $z \in \partial B^p$, $\xi \in \mathbb{C}^n \setminus B^p$,

отсюда

$$d_{\xi} \frac{dS(\xi)}{\nu(\xi, z)^{n+l}} = \frac{(\bar{\partial}\partial\rho(\xi))^n}{\nu(\xi, z)^{n+l}} - (n+l) \frac{(\bar{\partial}_{\xi}(v(\xi, z)) \wedge \bar{\partial}\partial\rho(\xi))^{n-1}}{\nu(\xi, z)^{n+l}} = -\frac{l}{n} \frac{dV(\xi)}{\nu(\xi, z)^{n+l}}.$$

По теореме Стокса

$$\begin{aligned} L_2 &= \int_{\partial B^p} \frac{\chi_j(z)^{1/2} J_j(z, \tau) dS(\tau_z)}{\nu(\tau_z, w)^{n+l}} = \int_{B_{\varepsilon_1}^p \setminus B^p} \frac{\bar{\partial}_z (\chi_j(z)^{1/2} J_j(z, \tau)) \wedge dS(\tau_z)}{\nu(\tau_z, w)^{n+l}} - \\ &\quad - \frac{l}{n} \int_{B_{\varepsilon_1}^p \setminus B^p} \frac{\chi_j(z)^{1/2} J_j(z, \tau) dV(\tau_z)}{\nu(\tau_z, w)^{n+l}}. \end{aligned}$$

Аналогично лемме 1 оцениваем $|\nu(\tau_z, w)| \asymp \rho(\tau) + \rho(z) + |\nu(\hat{z}, w)|$, где $\hat{z} = \text{pr}_{\partial B^p}(z)$, откуда $\|L_2\| \lesssim 1$ аналогично лемме 3. Объединяя это с оценкой (11), получаем $\|T_j(1)\| \lesssim 1$. \blacktriangleright

Лемма 5. *Оператор T_j слабо ограничен.*

◀ Пусть $f, g \in A\left(\frac{1}{2}, w_0, r\right)$, введем обозначение $\tau_z = \psi_j(z, \tau)$, тогда

$$\|(g, T_j f)\|^2 \lesssim \int_{D_0} d\nu_l(\tau) \left(\int_{B(w_0, r)} |g(z)| dS(z) \left| \int_{B(w_0, r)} \frac{f(w) dS(w)}{\langle \partial\rho(\tau_z), \tau_z - w \rangle^{n+l}} \right| \right)^2.$$

Обозначим $t := \inf_{w \in \partial B^p} |\nu(\tau_z, w)|$ и определим множество

$$W(z, \tau, r) := \{w \in \partial B^p : |\nu(\tau_z, w)| < t + r\}.$$

Отметим, что $\text{supp } f \subset B(w_0, r) \subset W(z, \tau, cr) \subset B(z, c^2 r)$ для некоторой постоянной $c > 0$, отсюда

$$\begin{aligned} \left| \int_{B(w_0, r)} \frac{f(w) dS(w)}{\nu(\tau_z, w)^{n+l}} \right| &= \left| \int_{W(z, \tau, cr)} \frac{f(w) dS(w)}{\nu(\tau_z, w)^{n+l}} \right| \lesssim \int_{W(z, \tau, cr)} \frac{|f(z) - f(w)|}{|\nu(\tau_z, w)|^{n+l}} dS(w) + \\ &+ |f(z)| \left(\left| \int_{\partial B^p \setminus W(z, \tau, cr)} \frac{dS(w)}{\nu(\tau_z, w)^{n+l}} \right| + \left| \int_{\partial B^p} \frac{dS(w)}{\nu(\tau_z, w)^{n+l}} \right| \right) = \\ &= L_1(z, \tau) + |f(z)| (L_2(z, \tau) + L_3(z, \tau)). \end{aligned}$$

Из оценки $|f(z) - f(w)| \leq \frac{d(w, z)^\gamma}{r^\gamma}$ следует, что

$$L_1(z, \tau) \lesssim \frac{1}{r^\gamma} \int_{B(z, c^2 r)} \frac{v(w, z)^\gamma dS(w)}{(\rho(\tau) + v(w, z))^{n+l}} \lesssim \frac{1}{r^\gamma} \int_0^{c^2 r} \frac{t^{n+\gamma-1} dt}{(\rho(\tau) + t)^{n+l}} \lesssim \frac{1}{r^\gamma} \int_0^{c^2 r} \frac{dt}{(\rho(\tau) + t)^{l-\gamma+1}} \lesssim$$

$$\lesssim \frac{1}{r^\gamma} \left(\frac{1}{\rho(\tau)^{l-\gamma}} - \frac{1}{(\rho(\tau) + r)^{l-\gamma}} \right) = \frac{1}{r^\gamma} \frac{(\rho(\tau) + r)^{l-\gamma} - \rho(\tau)^{l-\gamma}}{\rho(\tau)^{l-\gamma} (\rho(\tau) + r)^{l-\gamma}}.$$

Таким образом,

$$L_1(z, \tau) \lesssim \frac{1}{r^\gamma} \frac{r^{l-\gamma}}{\rho(\tau)^{l-\gamma} (\rho(\tau) + r)^{l-\gamma}}, \rho(\tau) \leq r;$$

$$L_1(z, \tau) \lesssim \frac{1}{r^\gamma} \frac{r \rho(\tau)^{l-\gamma-1}}{\rho(\tau)^{l-\gamma} (\rho(\tau) + r)^{l-\gamma}}, \rho(\tau) \leq r.$$

Используя оценку (5) и замену $s = \rho(\tau)$, оценим $L^2(D_0, dv_l)$ норму функции $L_1(z, \tau)$,

$$\int_{D_0(\tau)} L_1(z, \tau)^2 dv_l(\tau) \lesssim 1 + \frac{1}{r^{2\gamma}} \int_0^r \frac{1}{s^{2(l-\gamma)} (s+r)^{2l-2\gamma}} \frac{s^n ds}{s^{n-2l+1}} +$$

$$+ \frac{r^2}{r^{2\gamma}} \int_r^\infty \frac{s^{n+2} ds}{s^{2(l-\gamma)} (s+r)^{2l-2\gamma} s^{n-2l+1}} \lesssim 1. \tag{12}$$

Чтобы оценить второе слагаемое L_2 , применим к дифференциальной форме

$$\frac{dS(w)}{\langle \partial \rho(\tau_z), \tau_z - w \rangle^{n+l}}$$

теорему Стокса в области

$$W_0 = \{w \in B^p : |\langle \partial \rho(\tau_z), \tau_z - w \rangle| > t + cr\}.$$

Тогда

$$\int_{\partial B^p \setminus W(z, \tau_z, cr)} \frac{dS(w)}{\langle \partial \rho(\tau_z), \tau_z - w \rangle^{n+l}} = \int_{W_0} \frac{dV(w)}{\langle \partial \rho(\tau_z), \tau_z - w \rangle^{n+l}} -$$

$$- \int_{\substack{w \in B^p \\ |v(\tau_z, w)| = t+cr}} \frac{dS(w)}{\langle \partial \rho(\tau_z), \tau_z - w \rangle^{n+l}} = L_4 - \frac{1}{(t+cr)^{2n+2l}} \int_{\substack{w \in B^p \\ |v(\tau_z, w)| = t+cr}} \overline{\langle \partial \rho(\tau_z), \tau_z - w \rangle}^{n+l} dS(w).$$

Из доказательства леммы 3 следует, что

$$\|L_4\| \leq \int_{W_0} \frac{dV(w)}{|\langle \partial \rho(\tau_z), \tau_z - w \rangle|^{n+l}} \leq \int_{B^p} \frac{dV(w)}{|\langle \partial \rho(\tau_z), \tau_z - w \rangle|^{n+l}} \lesssim 1.$$

Применяя теорему Стокса к области $\{w \in B^p : |v(\tau_z, w)| < t + cr\}$, получаем

$$L_5 := \int_{\substack{w \in B^p \\ |v(\tau_z, w)| = t+cr}} \overline{v(\tau_z, w)}^{n+l} dS(w) = - \int_{\substack{w \in \partial B^p \\ |v(\tau_z, w)| < t+cr}} \overline{v(\tau_z, w)}^{n+l} dS(w) +$$

$$+ \int_{\substack{w \in B^p \\ |v(\tau_z, w)| < t+cr}} \bar{\partial}_w \left(\overline{v(\tau_z, w)}^{n+l} \right) \wedge dS(w) + \int_{\substack{w \in B^p \\ |v(\tau_z, w)| < t+cr}} \overline{v(\tau_z, w)}^{n+l} dV(w).$$

Поскольку

$$\left| \frac{\partial}{\partial \bar{w}_j} \left(\overline{\langle \partial \rho(\tau_z), \tau_z - w \rangle}^{n+l} \right) \wedge dS(w) \right| \lesssim \left| \langle \partial \rho(\tau_z), \tau_z - w \rangle \right|^{n+l-1},$$

$$|L_5| \lesssim \int_t^{t+cr} (s^{n+l} s^{n-1} + s^{n+l} s^n + s^{n+l-1} s^n) ds \lesssim \int_t^{t+cr} s^{2n+l-1} ds \lesssim r(t+r)^{2n+l-1}.$$

Отметим, что и

$$\int_{D_0} L_5(z, \tau)^2 d\nu_l(\tau) \lesssim \int_{D_0} \left(\frac{r(\operatorname{Re}(\tau_n) + r)^{2n+l-1}}{(\operatorname{Re}(\tau_n) + r)^{2n+2l}} \right)^2 d\nu_l(\tau) \lesssim$$

$$\lesssim \int_0^\infty \frac{r^2}{(t+r)^{2l+2}} \frac{t^n dt}{t^{n-2l+1}} = r^2 \int_0^\infty \frac{t^{2l-1}}{(t+r)^{2l+2}} \frac{t^n dt}{t^{n-2l+1}} \lesssim r^2 \int_0^\infty \frac{dt}{(r+t)^3} \lesssim 1 \quad (13)$$

Объединяя оценки (12), (13), лемму 3 и условие $|f(z)| \leq 1, z \in \partial B^p$, получаем

$$\|(g, T_j f)\|^2 \leq \int_{D_0} d\nu_l(\tau) \left(\int_{B(w_0, r)} |g(z)| (L_1(z, \tau) + |f(z)| (L_2(z, \tau) + L_3(z, \tau))) dS(z) \right)^2 \lesssim$$

$$\lesssim \|g\|_{L^1(\partial B^p)}^2 \sup_{z \in \partial B^p} \int_{D_0} (L_1(z, \tau)^2 + L_2(z, \tau)^2 + L_3(z, \tau)^2) d\nu_l(\tau) \lesssim \|g\|_{L^1(\partial B^p)}^2 \lesssim |B(w_0, r)|^2.$$

Эта оценка влечет слабую ограниченность оператора T и завершает доказательство теоремы. ►

Заключение. Доказательство теоремы 2. Поскольку операторы T_j с ядрами теоремы 1 K_j удовлетворяют условиям T_1 -теоремы, $T_j \in \mathcal{L}(L^p(\partial B^p), L^p(\partial B^p), L^2(D_0, d\nu_l))$ и

$$\|I_l(g)\|_{L^p(\partial B^p)}^p = \sum_{j=1}^N \int_{\partial B^p} \|T_j g(z)\|^p dS(z) =$$

$$= \sum_{j=1}^N \int_{\partial B^p} dS(z) \left(\int_{D_0} \left| \int_{\partial B^p} \frac{g(w) \chi_j^{1/2}(z) J_j(z, \tau) dS(w)}{\langle \partial \rho(\psi_j(z, \tau)), \psi_j(z, \tau) - w \rangle^{n+1}} \frac{d\mu(\tau)}{\operatorname{Re}(\tau_n)^{n-1}} \right|^2 \right)^{p/2} \lesssim \|g\|_{L^p(\partial B^p)}^p.$$

Следовательно, из разложения (7) $\int_{\partial B^p} I_l(g, z)^p dS(z) \lesssim \int_{\partial B^p} |g(z)|^p dS(z)$, что доказывает теорему 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Stein E.M. On the functions of Littlewood — Paley, Lusin, Marcinkiewicz // Trans. Amer. Math. Soc. 1958. Vol. 88. P. 430–466.

2. Дынькин Е.М. Оценки аналитических функций в жордановых областях // Зап. науч. сем. ЛОМИ. 1977. Т. 73. С. 70–90.
3. Ahern P., Bruna J. Maximal and area integral characterization of Hardy — Sobolev spaces in the unit ball in \mathbb{C}^n // Rev. Mat. Iberoamericana. 1988. Vol. 4. No. 1. P. 123–153.
4. Krantz S., Li S.Y. Area integral characterizations of functions in Hardy spaces on domains in \mathbb{C}^n // Complex Variables. 1997. Vol. 32. No. 4. P. 373–399.
5. Sandrine G. Complex tangential characterizations of Hardy — Sobolev spaces of holomorphic functions // Rev. Mat. Iberoamericana. 1993. Vol. 9. No. 2. P. 201–255.
6. Rotkevich A.S. External area integral inequality for the Cauchy — Leray — Fantappié integral. URL: <https://arxiv.org/abs/1707.08181> (дата обращения: 15.09.2017).
7. Роткевич А.С. Конструктивное описание классов Бесова в выпуклых областях в \mathbb{C}^d // Зап. науч. сем. ЛОМИ. 2013. Т. 416. С. 136–174.
8. Bonami A., Lohoue N. Projecteurs de Bergman et Szegő pour une classe de domaines faiblement pseudo-convexes et estimations L^p // Comp. Math. 1982. Vol. 46. No. 2. P. 159–226.
9. Hansson T. On Hardy spaces in complex ellipsoids // Ann. Inst. Fourier. 1999. Vol. 49. No. 5. P. 1477–1501. DOI: 10.5802/aif.1727
10. Широков Н.А. Равномерные полиномиальные приближения в выпуклых областях в \mathbb{C}^n // Зап. науч. сем. ЛОМИ. 2006. Т. 333. С. 98–112.
11. Hytönen T., Weis L. A $T1$ theorem for integral transformations with operator-valued kernel // J. Reine Angew. Math. 2006. Vol. 599. P. 155–200.
12. Leray J. Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe (Problème de Cauchy. III) // Bull. Soc. Math. Fr. 1959. Vol. 87. P. 81–180. DOI: 10.24033/bsmf.1515

Роткевич Александр Сергеевич — доцент кафедры математического анализа Санкт-Петербургского государственного университета (Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская набережная, д. 7/9).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Роткевич А.С. Неравенство Лузина для дополнения комплексных эллипсоидов в \mathbb{C}^n // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2018. № 1. С. 26–37.
DOI: 10.18698/1812-3368-2018-1-26-37

LUZIN INEQUALITY FOR THE COMPLEMENT OF COMPLEX ELLIPSOIDS IN \mathbb{C}^n

A.S. Rotkevich

rotkevichas@gmail.com

Saint Petersburg University, St. Petersburg, Russian Federation

Abstract

We consider a generalization of Luzin area integral inequality for functions defined by Cauchy — Leray — Fantappié adjoint integral in the complement of complex ellipsoids in \mathbb{C}^n . In this work we obtain estimates that are useful for characterization of the smoothness of holomorphic functions by pseudoanalytical continuations. These

Keywords

Luzin inequality, Cauchy — Leray — Fantappié integral, $T1$ -theorem

results are a technical part of the investigation devoted to the description of spaces of holomorphic functions by polynomial approximations. Our methods could be considered as a model example of the application of vector-valued T_1 -theorem to the proof of nonlinear inequality

Received 25.09.2017

© BMSTU, 2018

The work was supported by the Russian Science Foundation (grant no. 14-41-00010)

REFERENCES

- [1] Stein E.M. On the functions of Littlewood — Paley, Lusin, Marcinkiewicz. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1958, vol. 88, pp. 430–466.
- [2] Dyn'kin E.M. Estimates of analytic functions in Jordan domain. *Journal of Soviet Mathematics*, 1986, vol. 34, iss. 6, pp. 2060–2073. DOI: 10.1007/BF01741580
- [3] Ahern P., Bruna J. Maximal and area integral characterization of Hardy — Sobolev spaces in the unit ball in \mathbb{C}^n . *Rev. Mat. Iberoamericana*, 1988, vol. 4, no. 1, pp. 123–153.
- [4] Krantz S., Li S.Y. Area integral characterizations of functions in Hardy spaces on domains in \mathbb{C}^n . *Complex Variables*, 1997, vol. 32, no. 4, pp. 373–399.
- [5] Sandrine G. Complex tangential characterizations of Hardy — Sobolev spaces of holomorphic functions. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 1993, vol. 9, no. 2, pp. 201–255.
- [6] Rotkevich A.S. External area integral inequality for the Cauchy — Leray — Fantappié integral. Available at: <https://arxiv.org/abs/1707.08181> (accessed: 15.09.2017).
- [7] Rotkevich A.S. Constructive description of the Besov classes in convex domains in \mathbb{C}^d . *Journal of Mathematical Sciences*, 2014, vol. 202, iss. 4, pp. 573–600. DOI: 10.1007/s10958-014-2064-z
- [8] Bonami A., Lohoue N. Projecteurs de Bergman et Szegö pour une classe de domaines faiblement pseudo-convexes et estimations. *Comp. Math.*, 1982, vol. 46, no. 2, pp. 159–226.
- [9] Hansson T. On Hardy spaces in complex ellipsoids. *Ann. Inst. Fourier*, 1999, vol. 49, no. 5, pp. 1477–1501. DOI: 10.5802/aif.1727
- [10] Shirokov N.A. Uniform polynomial approximations on convex domains in \mathbb{C}^n . *Journal of Mathematical Sciences*, 2007, vol. 141, iss. 5, pp. 1564–1572. DOI: 10.1007/s10958-007-0064-y
- [11] Hytönen T., Weis L. A T_1 theorem for integral transformations with operator-valued kernel. *J. Reine Angew. Math.*, 2006, vol. 599, pp. 155–200.
- [12] Leray J. Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe (Problème de Cauchy. III). *Bull. Soc. Math. Fr.*, 1959, vol. 87, pp. 81–180. DOI: 10.24033/bsmf.1515

Rotkevich A.S. — Assoc. Professor of Mathematical Analysis Department, Saint Petersburg University (Universitetskaya naberezhnaya 7/9, St. Petersburg, 199034 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Rotkevich A.S. Luzin Inequality for the Complement of Complex Ellipsoids in \mathbb{C}^n . *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2018, no. 1, pp. 26–37 (in Russ.). DOI: 10.18698/1812-3368-2018-1-26-37