УДК 517.538.2 DOI: 10.18698/1812-3368-2018-2-4-11

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СИНТЕЗИРУЕМОСТИ ДЛЯ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Ю.С. Белов j_b_juri_belov@mail.ru

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Российская Федерация

Аннотация

Рассмотрено нахождение достаточных условий синтезируемости для систем $\mathcal{E}(\Lambda)$ системы из экспонент $\{e^{i\lambda t}\}_{\lambda\in\Lambda}$ в пространстве $L^2(-\pi,\pi)$ в терминах порождающей функции $G=G_\Lambda$. Полученные результаты представляют интерес не только для теории функций, но и для теории операторов, так как синтезируемость систем $\mathcal{E}(\Lambda)$ соответствует синтезируемости специальных возмущений ранга один самосопряженных операторов. Приведены достаточные условия для синтезируемости

Ключевые слова

Экспоненциальные системы, спектральный синтез, наследственная полнота

Поступила в редакцию 25.09.2017

Работа выполнена при поддержке РНФ (грант № 17-11-01064)

Введение. Пусть $\mathcal{E}(\Lambda):=\{e^{i\lambda t}\}_{\lambda\in\Lambda}$ — полная и минимальная система в пространстве $L^2(-\pi,\pi)$, а $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — система, биортогональная к $\mathcal{E}(\Lambda)$, $(e^{i\mu t},\varphi_\lambda)=\delta_{\lambda,\mu}$, $\lambda,\mu\in\Lambda$. Для каждой функции $f\in L^2(-\pi,\pi)$ рассмотрим формальный ряд Фурье, построенный по системе $\mathcal{E}(\Lambda)$,

$$f\sim\sum_\lambda (f,\varphi_\lambda)e^{i\lambda t}. \tag{1}$$

Хорошо известно, что ряд (1) нетривиален для любой функции $f\neq 0$ и любой системы $\mathcal{E}(\Lambda)$ (см. [1]). В то же время не вполне ясно, как восстанавливать функцию f из набора ее коэффициентов Фурье (f,φ_λ). Один из возможных способов восстановления — найти линейный метод суммирования для ряда (1). В этом случае должно выполняться условие *синтезируемости* для системы $\mathcal{E}(\Lambda)$:

$$f\in\overline{\mathrm{Span}}(f,\varphi_\lambda)e^{i\lambda t}{}_{\lambda\in\Lambda},\qquad f\in L^2(-\pi,\pi). \tag{2}$$

Условие (2) впервые появилось в теории линейных операторов и связано с синтезируемостью полных линейных операторов (обзор результатов и ссылки можно найти в работах [2, 3]). Полные и минимальные системы, удовлетворяющие условию, аналогичному свойству (2), также называют *наследственно полными системами*. Далее будем использовать эквивалентное определение синтезируемости.

Определение 1. *Будем называть систему* $\mathcal{E}(\Lambda)$ *синтезируемой, если для любого разбиения множества* Λ, $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$, $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \varnothing$ *полна система*

$$\{e^{i\lambda t}\}_{\lambda\in\Lambda_2} \cup \{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_1}. \tag{3}$$

Нетрудно проверить, что условия (2) и (3) эквивалентны. Отметим, что даже для произвольных полных и минимальных систем векторов (в сепарабельном гильбертовом пространстве) построение ненаследственно полной системы (с полной биортогональной) — нетривиальная задача [4, 5]. Первые явные примеры таких систем появились в работах А.С. Маркуса и Н.К. Никольского в 1960-х годах. Вопрос о синтезируемости произвольной полной и минимальной системы из экспонент в пространстве $L^2(-\pi,\pi)$ оставался открытым более 50 лет. Первый пример несинтезируемой системы из экспонент был построен в 2013 году автором настоящей работы (совместно с А.Д. Барановым и А.А. Боричевым) [6]. Кроме того, оказалось, что несинтезируемость можно совместить с близостью точек из Λ к ортогональному случаю $\Lambda = \mathbb{Z}$.

Теорема 1 (теорема Баранова, Белова, Боричева). *Существует ненаследственно полная система из экспонент* $\mathcal{E}(\Lambda)$, $\Lambda := \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}$, *такая, что* $|\lambda_n - n| < 1$, $n \in \mathbb{Z}$.

Цель работы — нахождение достаточных условий синтезируемости для систем $\mathcal{E}(\Lambda)$. Такие результаты представляют интерес для теории функций, а также для теории операторов, поскольку синтезируемость систем $\mathcal{E}(\Lambda)$ соответствует синтезируемости специальных возмущений ранга один самосопряженных операторов [3].

Хорошо известно, что полнота и минимальность $\mathcal{E}(\Lambda)$ в $L^2(-\pi,\pi)$ влечет существование порождающей функции G конечного экспоненциального типа π [7, лекция 17]:

$$G(z) = \lim_{R\to\infty} \prod_{\lambda\in\Lambda,\ |\lambda|<R} \left(1 - \frac{z}{\lambda}\right).$$

Многие свойства систем $\mathcal{E}(\Lambda)$ (например, базисность) связаны с поведением порождающей функции G. Следующий результат был получен С.В. Хрущевым, Н.К. Никольским и Б.С. Павловым [8].

Теорема 2. *Предположим, что* $\Lambda \subset \mathbb{C}_\delta := \{z : \Im z < -\delta\}$, $\delta > 0$. *Тогда система* $\mathcal{E}(\Lambda)$ *(после нормировки) — базис Рисса в* $L^2(-\pi,\pi)$ *тогда и только тогда, когда порождающая функция* G *имеет экспоненциальный тип* π *и*

1) вес $|G(x)|^2$ *удовлетворяет условию Макенхаупта* (A_2):

$$\sup_{I\text{-интервал}} \frac{1}{|I|^2} \int_I |G(x)|^2\, dx \int_I |G(x)|^{-2}\, dx < \infty; \tag{4}$$

2) множество Λ *удовлетворяет условию Карлесона* (C):

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} \sum_{\mu\in\Lambda,\mu\neq\lambda} \frac{(1+|\Im\lambda|)(1+|\Im\mu|)}{|\lambda-\mu|^2} < \infty. \tag{5}$$

В условиях теоремы 1 ряд (1) сходится по норме для любой функции f. Условие Макенхаупта (A_2) влечет полноту и минимальность системы $\mathcal{E}(\Lambda)$. Кроме того, Г. Губреев и А. Тарасенко показали, что условие (A_2) влечет синтезируемость системы $\mathcal{E}(\Lambda)$ [9]. Далее выяснилось, что если выполнено условие (A_2), то существует линейный метод суммирования для ряда Фурье (1) [10].

Условие (A_2) накладывает очень большие ограничения на поведение порождающей функции G, поэтому хотелось бы получить некоторые менее ограничительные достаточные условия синтезируемости.

Теорема 3. *Предположим, что* $\Lambda \subset \mathbb{C}_\delta$ *и существует последовательность* $y_k \to \infty$ *такая, что*

$$\frac{y_k}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{|G(t)|^2}{y_k^2 + t^2} dt \le C \exp\left(\frac{y_k}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\log |G(t)|^2}{y_k^2 + t^2} \right) dt \tag{6}$$

для некоторой константы C. *Тогда система* $\mathcal{E}(\Lambda)$ *синтезируема.*

С помощью теоремы 3 нетрудно построить полную и минимальную систему $\mathcal{E}(\Lambda) \subset \mathbb{C}_\delta$ такую, что $|G|^2 \notin (A_2)$, см. приведенный далее пример 1. Первый пример такой системы предоставил А.А. Боричев.

Доказательство теоремы 3 опирается на технику, предложенную в работах [6, 11]. Известно, что задача синтезируемости системы $\mathcal{E}(\Lambda)$ эквивалентна задаче синтезируемости для систем из воспроизводящих ядер в пространстве Пэли — Винера $\mathcal{P}W_\pi$. Синтезируемость систем из воспроизводящих ядер в пространствах де Бранжа (пространство Пэли — Винера — частный случай пространства де Бранжа) исследована в работе [11]. Отметим, что доказательство теоремы 3 позволяет получить достаточные условия синтезируемости и для некоторых пространств де Бранжа, близких к пространству Пэли — Винера.

Условие (6) далеко от необходимых и досточных условий синтезируемости для экспоненциальных систем. Автор надеется вернуться к такого рода задачам в дальнейшем. В частности, было бы интересно построить синтезируемую систему из экспонент такую, что ряд (1) не допускает линейного метода суммирования. Другие открытые вопросы о синтезируемости/несинтезируемости могут быть найдены в обзорной статье [2].

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим пространство Пэли — Винера

$$\mathcal{P}W_\pi := \left\{ F : F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{itz} dt, \quad g \in L^2(-\pi, \pi) \right\}.$$

Преобразование Фурье $\mathcal{F}$ — унитарный оператор, действующий из $L^2(-\pi, \pi)$ в $\mathcal{P}W_\pi$. Кроме того, под действием оператора $\mathcal{F}$ экспоненты переходят в воспроизводящие ядра в $\mathcal{P}W_\pi$:

$$\mathcal{F}\left(e^{-i\bar{\lambda}t}\right) = \frac{\sin\left(\pi\left(z - \bar{\lambda}\right)\right)}{\pi\left(z - \bar{\lambda}\right)} =: k_\lambda(z),$$

а элементы биортогональной системы $\mathcal{F}(\varphi_\lambda)$ удовлетворяют уравнению

$$\mathcal{F}(\varphi_\lambda) = \frac{G(z)}{G'(\lambda)(z-\lambda)},$$

где G — порождающая функция системы $\mathcal{E}(\Lambda)$.

Следовательно, вместо системы $\mathcal{E}(\Lambda)$ можно рассматривать систему из воспроизводящих ядер $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ в пространстве Пэли — Винера $\mathcal{P}W_\pi$. Предположим, что теорема 3 неверна. Тогда существует несинтезируемая система из воспроизводящих ядер $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, удовлетворяющая условию (6). Таким образом, для некоторого разбиения $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$ система

$$\mathcal{MS} := \{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_2} \cup \left\{\frac{G(z)}{z-\lambda}\right\}_{\lambda\in\Lambda_1}$$

неполна в пространстве $\mathcal{P}W_\pi$. Рассмотрим нетривиальный вектор $H \in \mathcal{P}W_\pi$, ортогональный системе $\mathcal{MS}$:

$$H \perp \{k_\lambda\},\ \lambda\in\Lambda_2,\quad H \perp \frac{G(z)}{z-\lambda},\quad \lambda\in\Lambda_1,$$

а также разложение вектора H по ортогональной системе $\{k_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ (формула Шэннона — Котельникова — Уиттекера):

$$H(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n k_n(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \frac{(-1)^n \sin(\pi z)}{z-n},\qquad \{a_n\}\in\ell^2.$$

Не умаляя общности, можно полагать, что $H(n) = a_n \neq 0$ (в противном случае можно использовать разложение по ортогональной системе $\{k_{n+\varepsilon}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ для некоторого ε). Получаем

$$0 = \left(\frac{G(z)}{z-\lambda}, H\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\overline{a}_n G(n)}{\lambda-n} = 0,\qquad \lambda\in\Lambda_1,$$

$$\frac{H(\lambda)}{\sin(\pi\lambda)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^n a_n}{\lambda-n} = 0,\qquad \lambda\in\Lambda_2.$$

Примем

$$L(z) = \sin(\pi z)\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\overline{a}_n G(n)}{z-n}.$$

Ясно, что функция L целая и $L(z) = G_1(z)S_1(z)$, G_1 — каноническое произведение, построенное по множеству Λ_1, S_1 — некоторая целая функция. Выберем G_1 так, чтобы функция $\overline{G_1(\overline{z})}\,G_1(z)$ была произведением Бляшке в $\mathbb{C}_+$. Это возможно, так как множество Λ (следовательно, и Λ_1) удовлетворяет условию Бляшке.

Предположим $G_2 = GG_1$. Известно, что $H(z) = G_2(z)S_2(z)$, где G_2 — каноническое произведение, построенное по множеству Λ_2; S_2 — некоторая целая функция. Примем $S(z) = S_1(z)S_2(z)$. Можно показать, что (см., например, [6, лемма 2.2, утверждение 3.1])

$$S(z)=\sin(\pi z)\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{|a_n|^2}{z-n}.$$

Перепишем тождество $L(z)H(z)=G(z)S(z)$ следующим образом:

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{\overline{a}_nG(n)}{z-n}\right)H(z)=G(z)\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{|a_n|^2}{z-n}\right). \tag{7}$$

Рассмотрим поведение правой и левой частей уравнения (7) на луче iy, $y>0$. С одной стороны,

$$|G(iy)|\cdot\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{|a_n|^2}{iy-n}\right|\geq C\frac{|G(iy)|}{y}.$$

С другой стороны, для любой функции из пространства Пэли — Винера верна оценка $|H(iy)|=o(e^{\pi y}y^{-12})$, $y\to\infty$. Осталось оценить первый сомножитель в левой части уравнения (7)

$$\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{\overline{a}_nG(n)}{iy-n}\right|^2\leq\sum_{n\in\mathbb{Z}}|a_n|^2\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{|G^2(n)|}{y^2+n^2}.$$

Примем $F(z)=\dfrac{G(z)}{z+iy}$. Известно, что $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}|F(n)|^2\leq C\|F\|_2^2$, $y>1$. Таким образом,

$$\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{\overline{a}_nG(n)}{iy-n}\right|^2\leq C\|a_n\|_2^2\int_{\mathbb{R}}\frac{|G(t)|^2}{y^2+t^2}dt.$$

Поскольку функция $G^2(z)e^{2\pi iz}$ внешняя $\mathbb{C}^+$ (см., например, работу [12]), получаем

$$e^{-2\pi y}|G(iy)|^2=\exp\left(\frac{y}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{\log|G(t)|^2}{y^2+t^2}\right).$$

Собирая вместе оценки на сомножители в левой и правой частях в уравнении (7), определяем

$$\exp\left(\frac{y}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{\log|G(t)|^2}{y^2+t^2}dt\right)=o(y)\int_{\mathbb{R}}\frac{|G^2(t)|}{y^2+t^2}dt.$$

Эта оценка противоречит условию (6). Таким образом, теорема 3 полностью доказана.

Пример. Существует полная и минимальная система $\mathcal{E}(\Lambda)$ в $L^2(-\pi,\pi)$ такая, что $\Lambda\subset\mathbb{C}_\delta$, $\delta>0$, порождающая функция G удовлетворяет условию (6) и $|G|^2\notin(A_2)$.

◂ Примем $I_k=[2^k-k,2^k]$, $k>3$.

Рассмотрим функцию G экспоненциального типа π с простыми нулями такую, что

$$C_1 \le |G(x)| \le C_2, \ \ x \notin \cup_k I_k,$$

$$C_1 \left(1 + \operatorname{dist}(x, \mathbb{R} \setminus I_k)\right)^{-1} \le |G(x)| \le C_2 \left(1 + \operatorname{dist}(x, \mathbb{R} \setminus I_k)\right)^{-1}, \ x \in I_k,$$

$$\Lambda := \{z : G(z) = 0\} \subset \mathbb{C}_\delta.$$

Известно, что такая функция существует [13]. Нетрудно проверить, что система $\mathcal{E}(\Lambda)$ полна и минимальна в $L^2(-\pi, \pi)$, функция G удовлетворяет условию (6) и $|G|^2 \notin (A_2)$. ►

ЛИТЕРАТУРА

1. *Young R.M.* On complete biorthogonal system // Proc. Amer. Math. Soc. 1981. Vol. 83. No. 3. P. 537–540. DOI: 10.2307/2044113 URL: https://www.jstor.org/stable/2044113

2. *Baranov A., Belov Y., Borichev A., Yakubovich D.* Recent developments in spectral synthesis for exponential systems and for nonselfadjoint operators // Recent Trends in Analysis. Proc. of the Conf. in Honor of Nikolai Nikolski. Bucharest: Theta Foundation, 2013. P. 17–34.

3. *Baranov A.D., Yakubovich D.V.* Completeness and spectral synthesis of nonselfadjoint one-dimensional perturbations of selfadjoint operators // Adv. Math. 2016. Vol. 302. P. 740–798. DOI: 10.1016/j.aim.2016.07.020

4. *Маркус А.С.* Задача спектрального синтеза операторов с точечным спектром // Известия АН СССР. Сер. матем. 1970. Т. 34. № 3. С. 662–688.

5. *Никольский Н.К.* Полные расширения вольтерровых операторов // Известия АН СССР. Сер. матем. 1969. Т. 33. № 6. С. 1349–1355.

6. *Baranov A., Belov Y., Borichev A.* Hereditary completeness for systems of exponentials and reproducing kernels // Adv. Math. 2013. Vol. 235. P. 525–554. DOI: 10.1016/j.aim.2012.12.008

7. *Levin B.Ya.* Lectures on entire functions, translations of mathematical monographs. AMS, 1996. 248 p.

8. *Khrushchev S., Nikolski N., Pavlov B.* Unconditional bases of exponentials and reproducing kernels // Complex Analysis and Spectral Theory. Springer, 1981. P. 214–235.

9. *Губреев Г.М., Тарасенко А.А.* Спектральное разложение модельных операторов в пространствах де Бранжа // Матем. сб. 2010. Т. 201. № 11. С. 41–76.

10. *Belov Y., Lyubarskii Y.* On summation of nonharmonic Fourier series // Constructive approximation. 2016. Vol. 43. Iss. 2. P. 291–309. DOI: 10.1007/s00365-015-9290-6

11. *Baranov A., Belov Y., Borichev A.* Spectral synthesis in de Branges spaces // Geom. Funct. Anal. 2015. Vol. 25. Iss. 2. P. 417–452. DOI: 10.1007/s00039-015-0322-y

12. *Lyubarskii Yu., Seip K.* Complete interpolating sequences for Paley — Wiener spaces and Muckenhoupt's (A_p) condition // Rev. Mat. Iberoamericana. 1997. Vol. 13. No. 2. P. 361–376.

13. *Белов Ю.С.* Модельные функции с почти предписанным модулем // Алгебра и анализ. 2008. Т. 20. № 2. С. 3–18.

Белов Юрий Сергеевич — доцент, Лаборатория им П.Л. Чебышева, Санкт-Петербургский государственный университет (Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7/9).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Белов Ю.С. Достаточные условия синтезируемости для экспоненциальных систем // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2018. № 2. С. 4–11.
DOI: 10.18698/1812-3368-2018-2-4-11

SUFFICIENT CONDITIONS FOR SYNTHESABILITY OF EXPONENTIAL SYSTEMS

Yu.S. Belov j_b_juri_belov@mail.ru

Saint Petersburg State University, St. Petersburg, Russian Federation

Abstract

The study considers the sufficient conditions for synthesability of exponential systems $\{e^{i\lambda t}\}_{\lambda\in\Lambda}$ in $L^2(-\pi,\pi)$ in terms of generating function $G = G_\Lambda$. The obtained results are of interest not only for the theory of functions but also for the theory of operators, since the synthesizability of $\mathcal{E}(\Lambda)$ systems corresponds to the synthesizability of special perturbations of the level one of self-adjoint operators

Keywords

Exponential systems, spectral synthesis, hereditary completenness

Received 25.09.2017

The work was supported by the Russian Science Foundation (grant no. 17-11-01064)

REFERENCES

[1] Young R.M. On complete biorthogonal system. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1981, vol. 83, no. 3, pp. 537–540. DOI: 10.2307/2044113 Available at: https://www.jstor.org/stable/2044113

[2] Baranov A., Belov Y., Borichev A., Yakubovich D. Recent developments in spectral synthesis for exponential systems and for nonselfadjoint operators. *Recent Trends in Analysis. Proc. of the Conf. in Honor of Nikolai Nikolski*. Bucharest, Theta Foundation, 2013. Pp. 17–34.

[3] Baranov A.D., Yakubovich D.V. Completeness and spectral synthesis of nonselfadjoint one-dimensional perturbations of selfadjoint operators. *Adv. Math.*, 2016, vol. 302, pp. 740–798. DOI: 10.1016/j.aim.2016.07.020

[4] Markus A.S. The problem of spectral synthesis for operators with point spectrum. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 1970, vol. 4, no. 3, pp. 670–696.
DOI: 10.1070/IM1970v004n03ABEH000926

[5] Nikol'skiĭ N.K. Complete extensions of volterra operators. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 1969, vol. 3, no. 6, pp. 1271–1276.
DOI: 10.1070/IM1969v003n06ABEH000846

[6] Baranov A., Belov Y., Borichev A. Hereditary completeness for systems of exponentials and reproducing kernels. *Adv. Math.*, 2013, vol. 235, pp. 525–554. DOI: 10.1016/j.aim.2012.12.008

[7] Levin B.Ya. Lectures on entire functions, translations of mathematical monographs. AMS, 1996. 248 p.

[8] Khrushchev S., Nikolski N., Pavlov B. Unconditional bases of exponentials and reproducing kernels. In: Complex Analysis and Spectral Theory. Springer, 1981. Pp. 214–235.

[9] Gubreev G.M., Tarasenko A.A. Spectral decomposition of model operators in de Branges spaces. *Sbornik: Mathematics*, 2010, vol. 201, no. 11, pp. 1599–1634.
DOI: 10.1070/SM2010v201n11ABEH004124

[10] Belov Y., Lyubarskii Y. On summation of nonharmonic Fourier series. *Constructive approximation*, 2016, vol. 43, iss. 2, pp. 291–309. DOI: 10.1007/s00365-015-9290-6

[11] Baranov A., Belov Y., Borichev A. Spectral synthesis in de Branges spaces. *Geom. Funct. Anal.,* 2015, vol. 25, iss. 2, pp. 417–452. DOI: 10.1007/s00039-015-0322-y

[12] Lyubarskii Yu., Seip K. Complete interpolating sequences for Paley — Wiener spaces and Muckenhoupt's condition. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 1997, vol. 13, no. 2, pp. 361–376.

[13] Belov Yu.S. Model functions with nearly prescribed modulus. *St. Petersburg Math. J.*, 2009, vol. 20, no. 2, pp. 163–174. DOI: 10.1090/S1061-0022-09-01042-5

Belov Yu.S. — Assoc. Professor, Chebyshev Laboratory, Saint Petersburg State University (Universitetskaya naberezhnaya 7/9, St. Petersburg, 199034 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Belov Yu.S. Sufficient Conditions for Synthesability of Exponential Systems. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2018, no. 2, pp. 4–11 (in Russ.). DOI: 10.18698/1812-3368-2018-2-4-11