УДК 519.234.3 DOI: 10.18698/1812-3368-2018-3-13-23

М-ОЦЕНКИ В ПОРОГОВОЙ АВТОРЕГРЕССИИ

В.Б. Горяинов[1] vb-goryainov@bmstu.ru
Е.Р. Горяинова[2] el-goryainova@mail.ru

[1] **МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация**
[2] **Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, Российская Федерация**

Аннотация

Проведено робастное оценивание параметров авторегрессионных пороговых моделей с помощью М-оценок с необязательно выпуклой целевой функцией. Доказана асимптотическая нормальность этих оценок, а также исследована их асимптотическая относительная эффективность по отношению к оценкам наименьших квадратов и наименьших модулей и к М-оценкам с выпуклой целевой функцией

Ключевые слова

Робастное оценивание, выпуклая целевая функция, М-оценка, оценка наименьших квадратов, оценка наименьших модулей

Поступила в редакцию 20.04.2017

Введение. Среди нелинейных моделей временных рядов [1] широко распространены пороговые модели [2], в частности пороговые авторегрессионные модели [3]. Настоящая работа посвящена робастному оцениванию параметров авторегрессионных пороговых моделей с помощью М-оценок с необязательно выпуклой целевой функцией. Приведено доказательство асимптотической нормальности этих оценок и исследована их асимптотическая относительная эффективность по отношению к оценкам наименьших квадратов и наименьших модулей, а также к М-оценкам с выпуклой целевой функцией [4].

Постановка задачи. Рассмотрим случайный процесс X_t, описываемый пороговым авторегрессионным уравнением

$$X_t = a_1 X_{t-1}^{+} + a_2 X_{t-1}^{-} + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

где a_1, a_2 — действительные числа; ε_t — последовательность независимых одинаково распределенных непрерывных случайных величин с плотностью f, нулевым математическим ожиданием $\mathrm{E}X_t = 0$ и конечной дисперсией $\mathrm{D}X_t = \sigma^2$; $X_t^{+} = \max(X_t, 0)$, $X_t^{-} = \min(X_t, 0)$. Величины a_1, a_2 и σ^2 предполагаются неизвестными. Важнейшей задачей, возникающей при исследовании уравнения (1), является оценивание по наблюдениям $X_1, X_2, \ldots, X_n$ процесса X_t параметров модели (1) — коэффициентов a_1 и a_2.

Наиболее распространенной оценкой коэффициентов a_1 и a_2 является оценка наименьших квадратов. Оценка наименьших квадратов a^* параметра $a = (a_1, a_2)^{\mathrm{т}}$ по наблюдениям $X_1, X_2, \ldots, X_n$ определяется как точка минимума функции $L_{LSQ}(a) = \sum_{t=1}^{n} \left(X_t - a_1 X_{t-1}^{+} - a_2 X_{t-1}^{-} \right)^2$. Основной недостаток метода наименьших квадратов заключается в его сильной чувствительности к большим значениям невязок $\varepsilon_t = X_t - a_1 X_{t-1}^{+} - a_2 X_{t-1}^{-}$, поскольку они влияют на минимизируемую функцию $L_{LSQ}(a)$ квадратичным образом [5]. Вследствие этого точность оценки наименьших квадратов достаточно сильно ухудшается при росте вероятности экстремальных значений ε_t, что происходит, если плотность распределения вероятности f случайных величин ε_t медленно убывает на бесконечности.

Этого недостатка лишен метод наименьших модулей. Оценка наименьших модулей $\tilde{a}$ параметра a по наблюдениям $X_1, X_2, \ldots, X_n$ определяется как точка минимума функции $L_{LAD}(a) = \sum_{t=1}^{n} | X_t - a_1 X_{t-1}^{+} - a_2 X_{t-1}^{-} |$. В методе наименьших модулей влияние невязок $\varepsilon_t = X_t - a_1 X_{t-1}^{+} - a_2 X_{t-1}^{-}$ на минимизируемую функцию $L_{LAD}(a)$ линейно, поэтому при стремлении скорости сходимости f к нулю на бесконечности точность оценки наименьших модулей падает не так сильно, как точность оценки наименьших квадратов. Однако в случае нормального распределения ε_t, плотность которого $f(x)$ с ростом $|x|$ стремится к нулю достаточно быстро, метод наименьших квадратов гораздо эффективнее метода наименьших модулей [6].

Разумным компромиссом между оценкой наименьших квадратов и оценкой наименьших модулей являются М-оценки. М-оценка вектора a по наблюдениям $X_1, X_2, \ldots, X_n$ определяется как точка минимума $\hat{a}$ функции

$$L_M(a) = \sum_{t=1}^{n} \rho\left(X_t - a_1 X_{t-1}^{+} - a_2 X_{t-1}^{-} \right), \tag{2}$$

где ρ — некоторая неотрицательная четная функция. М-оценки образуют целое семейство, зависящее от вида функции ρ. Название М-оценка получила вследствие того, что если $\rho(x) = -\ln f(x)$, то М-оценка совпадает с оценкой максимального правдоподобия. Оценки наименьших квадратов и наименьших модулей — частные случаи М-оценок, поскольку получаются из них при $\rho(x) = x^2$ и $\rho(x) = |x|$ соответственно.

М-оценки так же, как и оценки наименьших модулей целесообразно использовать при отклонении распределения ε_t от нормального, но в отличие от оценки наименьших модулей М-оценки почти не теряют эффективность и в случае нормального распределения ε_t. Механизм такого поведения М-оценок хорошо заметен на примере М-оценки с наиболее распространенной функцией ρ, называемой ρ-функцией Хьюбера [7], которая совпадает с x^2 в окрестности $(-k, k)$ начала координат и ведет себя линейно вне этой окрестности:

$$\rho(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если} \quad |x| \le k; \\ 2k|x| - k^2, & \text{если} \quad |x| \le k. \end{cases} \tag{3}$$

В этом случае вклад в сумму (2) наблюдений X_t, сформировавшихся под влиянием экстремальных значений ε_t, будет принижен по сравнению с вкладом остальных наблюдений. Параметр k можно изменять от нуля до бесконечности, подстраиваясь под конкретный вид f для достижения максимальной эффективности оценок. Эффективность М-оценок параметров пороговой авторегрессии с ρ-функцией Хьюбера изучена в работе [4].

Еще сильнее уменьшает вклад резко выделяющихся наблюдений ρ-функция Тьюки [7]:

$$\rho(x)=\begin{cases}1-\left(1-\left(\dfrac{x}{k}\right)^2\right)^3, & \text{если} \quad |x|\le k;\\ 1, & \text{если} \quad |x|>k,\end{cases} \tag{4}$$

где k — положительный параметр. Как видно из (2), (4) резко выделяющиеся невязки ρ-функция Тьюки попросту игнорирует, заменяя их единицей.

Рассмотрим задачу сравнения между собой М-оценок с ρ-функциями Хьюбера и Тьюки, оценок наименьших квадратов и наименьших модулей. Из двух оценок лучшей является та, которая меньше отклоняется от оцениваемого параметра. Если две оценки являются несмещенными (асимптотически несмещенными), то лучшей из них следует назвать оценку с наименьшей дисперсией (асимптотической дисперсией). Оценки наименьших квадратов и наменьших модулей — асимптотически несмещенные и асимптотически нормальные, их асимптотические дисперсии известны [8, 9]. Асимптотическая несмещенность и асимптотическая нормальность М-оценок с выпуклой ρ-функцией, к которой относится ρ-функция Хьюбера, доказана в работе [4].

Возникает задача нахождения асимптотического распределения М-оценки с необязательно выпуклой ρ-функцией, к которой относится ρ-функция Тьюки.

Асимптотика М-оценок с невыпуклой ρ-функцией. Докажем асимптотическую нормальность М-оценок, ρ-функция которых может не являться выпуклой. Введем обозначения

$$\tilde{X}_t=\left(X_{t-1}^{+},\, X_{t-1}^{-}\right)^{\mathrm{T}}, \quad K=\begin{pmatrix}\mathrm{E}(X_1^{+})^2 & 0\\ 0 & \mathrm{E}(X_1^{-})^2\end{pmatrix}.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть процесс* X_t, *описываемый уравнением* (1), *является стационарным,* $\rho''(x)$ *непрерывна почти всюду и ограничена,* $\rho'''(x)$ *ограничена на* $\mathbb{R}$, *а плотность* $f(x)$ *независимых одинаково распределенных случайных величин* ε_t *в* (1) *удовлетворяет условиям* $\mathrm{E}\varepsilon_t=0$, $\mathrm{E}\left(\rho'(\varepsilon_t)^2\right)<\infty$, $\mathrm{E}\rho'(\varepsilon_t)=0$, $0<\mathrm{E}\rho''(\varepsilon_t)<\infty$ *и* $\mathrm{E}\varepsilon_t^{2+\delta}<\infty$ *для некоторого* $\delta>0$. *Тогда при* $n\to\infty$ *случайный вектор* $\sqrt{n}\left(\hat{a}-a\right)$ *является асимптотически нормальным с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей* $B=K^{-1}\dfrac{\mathrm{E}\left[\rho'(\varepsilon_1)^2\right]}{\left(\mathrm{E}\left[\rho''(\varepsilon_1)\right]\right)^2}$.

◄ Отметим, что вектор $\hat{a}$ минимизирует (2) тогда и только тогда, когда вектор $\hat{\alpha}=\sqrt{n}\left(\hat{a}-a\right)$ является точкой минимума функции $\mathcal{L}(\alpha)=$ $=\sum_{t=1}^{n}\rho\left(\varepsilon_t-\alpha^{\mathrm{T}}\tilde{X}_t n^{-1/2}\right)$. Если функция $\mathcal{L}(\alpha)$ дифференцируема, то вектор $\hat{\alpha}$ является решением уравнения $\mathcal{L}'(\alpha)=0$, или, что равносильно, решением уравнения $L(\alpha)=0$, где

$$L(\alpha)=Mn^{-1/2}\sum_{t=1}^{n}\psi\left(\varepsilon_t-\alpha^{\mathrm{T}}\tilde{X}_t n^{-1/2}\right)\tilde{X}_t,$$

$\psi(x)=\rho'(x)$; $M=\left(K\mathrm{E}\left[\psi'(\varepsilon_1)\right]\right)^{-1}$. Обозначим через $\tilde{\alpha}$ решение уравнения $\tilde{L}(\alpha)=0$, $\tilde{L}(\alpha)=-\alpha+Mn^{-1/2}\sum_{t=1}^{n}\psi(\varepsilon_t)\tilde{X}_t$. Очевидно, что $\tilde{\alpha}=Mn^{-1/2}\sum_{t=1}^{n}\psi(\varepsilon_t)\tilde{X}_t$.

Покажем, что $\tilde{L}(\alpha)-L(\alpha)=o_p(1)$, здесь и далее случайную величину, стремящуюся к нулю по вероятности, обозначим через $o_p(1)$. Отметим, что $\tilde{L}(\alpha)-L(\alpha)=S_1-S_2$, где

$$S_1=Mn^{-1}\sum_{t=1}^{n}\left(\psi'(\varepsilon_t)\tilde{X}_t\tilde{X}_t^{\mathrm{T}}-\mathrm{E}\left[\psi'(\varepsilon_t)\tilde{X}_t\tilde{X}_t^{\mathrm{T}}\right]\right);$$

$$S_2=M2^{-1}n^{-3/2}\sum_{t=1}^{n}\psi''\left(\varepsilon_t-\theta\alpha^{\mathrm{T}}\tilde{X}_t n^{-1/2}\right)\left(\alpha^{\mathrm{T}}\tilde{X}_t\tilde{X}_t^{\mathrm{T}}\alpha\right)\tilde{X}_t,\quad 0<\theta<1.$$

Согласно закону больших чисел, для эргодических последовательностей $S_1\to 0$. Из ограниченности ψ'' вытекает, что $\mathrm{E}\,|S_2|\le C\,|\alpha|^2$, поэтому $|\tilde{L}(\alpha)-L(\alpha)|=o_p(1)\,|\alpha|^2$. По центральной предельной теореме для мартингалов [10] оценка $\tilde{\alpha}$ является асимптотически нормальной с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей B и, следовательно, ограничена по вероятности. Кроме того,

$$|\alpha+L(\alpha)|\le|\alpha+\tilde{L}(\alpha)|+|\tilde{L}(\alpha)-L(\alpha)|\le|\tilde{\alpha}|+|\tilde{L}(\alpha)-L(\alpha)|=|\tilde{\alpha}|+o_p(1)\,|\alpha|^2.$$

Поэтому с вероятностью сколь угодно близкой к 1 существует постоянная C такая, что $|\alpha+L(\alpha)|\le C$ для любых $|\alpha|\le C$. Таким образом, по теореме о неподвижной точке существует ограниченное по вероятности решение $\hat{\alpha}$ уравнения $L(\alpha)=0$.

Кроме того, из $|\tilde{L}(\alpha)-L(\alpha)|=o_p(1)\,|\alpha|^2$ и ограниченности по вероятности $\hat{\alpha}$ вытекает, что $|\tilde{\alpha}-\hat{\alpha}|=|\tilde{L}(\hat{\alpha})|=|\tilde{L}(\hat{\alpha})-L(\hat{\alpha})|=o_p(1)$, отсюда следует утверждение теоремы. ►

Сравнение оценок. Как уже было отмечено, из двух оценок наилучшей логично полагать ту, рассеяние которой вокруг оцениваемого параметра меньше. Если оценка является несмещенной, то рассеяние оценки измеряется ее дисперсией. Поэтому из двух несмещенных оценок лучшей будет оценка с меньшей дисперсией. К сожалению, для фиксированного объема n наблюдений дисперсию оценок вычислить можно лишь в самых простых случаях. Обычно удается доказать асимптотическую нормальность оценки, т. е. доказать слабую сходимость при $n \to \infty$ нормированной подходящим образом последовательности оценок к нормальной случайной величине. В этом случае сравнить точность двух оценок можно, сравнив их асимптотические дисперсии.

Сравним эффективность М-оценки с ρ-функцией Тьюки по отношению к оценкам наименьших квадратов и наименьших модулей и М-оценкам с ρ-функцией Хьюбера. Согласно данным, приведенным в работах [8, 9], для оценки наименьших квадратов a^* и оценки наименьших модулей $\tilde{a}$ асимптотические ковариационные матрицы случайных последовательностей $\sqrt{n}\left(a^* - a\right)$ и $\sqrt{n}\left(\tilde{a} - a\right)$ равны $\sigma^2 K^{-1}$ и $\dfrac{1}{4f^2(0)}K^{-1}$ соответственно. По теореме 1 асимптотическая дисперсия последовательности $\sqrt{n}\left(\hat{a} - a\right)$ для М-оценки $\hat{a}$ с ρ-функцией общего вида составляет $K^{-1}\dfrac{\mathrm{E}\left[\rho'(\varepsilon_1)^2\right]}{\left(\mathrm{E}\left[\rho''(\varepsilon_1)\right]\right)^2}$. При этом

$$\sigma^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx,\ \ \mathrm{E}\left[\rho'(\varepsilon_1)^2\right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\rho'(x)\right]^2 f(x)dx,$$

$$\mathrm{E}\left[\rho''(\varepsilon_1)\right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\rho''(x)f(x)dx.$$

Значения асимптотических дисперсий первой координаты оценок наименьших квадратов, оценок наименьших модулей, М-оценок с ρ-функцией Хьюбера и ρ-функцией Тьюки для некоторых наиболее распространенных вероятностных распределений ε_t приведены в таблице. Асимптотические дисперсии вычислялись для нормального распределения с плотностью $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, распределения Лапласа с плотностью $f(x) = \dfrac{1}{2}e^{-|x|}$, распределения Коши с плотностью $f(x) = \dfrac{1}{\pi\left(x^2+1\right)}$, логистического распределения с плотностью $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}$ и распределения Стьюдента с плотностью $f(x) = \dfrac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\sqrt{m\pi}\,\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\left(1+\frac{x^2}{m}\right)^{\frac{m+1}{2}}}$ и числом степеней свободы m, равным 2, 3, 5, 13 и 18.

Значения асимптотических дисперсий оценок наименьших квадратов (ОНК), наименьших модулей (ОНМ), М-оценок с ρ-функцией Хьюбера (М-Х) и ρ-функцией Тьюки (М-Т) при различных распределениях ε_t

Распределение ε_t	ОНК	ОНМ	М-Х	М-Т
Нормальное	1	1,57	1,01	1,06
Лапласа	2	1	1,59	1,42
Логистическое	3,29	4	3,02	3,66
Коши	∞	2,47	3,52	2,32
Стьюдента (18)	1,13	1,62	1,11	1,15
Стьюдента (13)	1,18	1,63	1,15	1,18
Стьюдента (5)	1,67	1,73	1,39	1,37
Стьюдента (3)	3	1,85	1,69	1,56
Стьюдента (2)	∞	2	2,09	1,78

Отметим, что дисперсия М-оценок зависит от параметра k в формулах (3), (4), а значение k, при котором дисперсия минимальна, зависит от f. Значения дисперсий, приведенные в таблице, соответствуют компромиссным значениям k, равным 2 и 4,5 для М-оценок с ρ-функцией Хьюбера и ρ-функцией Тьюки.

Оценка наименьших квадратов лучшая только при нормальном распределении ε_t. Из распределений, указанных в таблице, наибольшее сходство с нормальным имеют логистическое распределение и распределение Стьюдента с большим числом степеней свободы, плотности которых являются гладкими и достаточно быстро убывают на бесконечности. В этом случае М-оценки составляют конкуренцию оценке наименьших квадратов, причем М-оценка с ρ-функцией Хьюбера превосходит оценку наименьших квадратов в случае двух распределений.

Для распределения Лапласа отсутствие у плотности производной в нуле приводит к тому, что оценка наименьших квадратов является наихудшей, даже несмотря на экспоненциальную скорость сходимости на бесконечности плотности к нулю. Отметим, что оценка наименьших модулей для распределения Лапласа совпадает с оценкой максимального правдоподобия и поэтому является наилучшей среди всех оценок, а не только среди исследуемых в настоящей работе.

Распределение Стьюдента с двумя степенями свободы и распределение Коши имеют бесконечную дисперсию, что приводит для этих распределений к бесконечной асимптотической дисперсии у оценки наименьших квадратов, и, как следствие, несравнимо низкую эффективность оценки наименьших квадратов по отношению к остальным оценкам.

Семейство распределений Стьюдента с различным числом m степеней свободы служит моделью гладких распределений, плотность которых на бесконечности убывает с различными скоростями — от квадратичной (у распределения Стьюдента с одной степенью свободы, совпадающим с распределением Коши) до практически экспоненциальной при достаточно больших числах m. Согласно данным, приведенным в таблице, с уменьшением числа степеней свободы оценка наименьших квадратов сначала проигрывает только М-оценке с ρ-функцией Хьюбера, далее двум М-оценкам, а затем и всем трем, включая оценку наименьших модулей.

Данные, приведенные в таблице, также свидетельствует о том, что если распределение ε_t практически не отличается от нормального, то целесообразно использовать М-оценку с ρ-функцией Хьюбера, при более сильном отклонении распределения от нормального — применять М-оценку с ρ-функцией Тьюки, а при значительном отклонении — оценку наименьших модулей. Отметим, что при еще большем отклонении распределения от нормального следует использовать знаковую оценку [11].

В последнее время среди исследователей в различных областях науки растет понимание того, что распределение вероятности многих случайных величин, встречающихся на практике, и ранее считавшееся нормальным, является нормальным лишь приближенно. Аргументируется эта точка зрения ссылкой на центральную предельную теорему, которая обосновывает большинство гипотез о нормальном распределении случайных величин, но которая в силу своего предельного характера всегда приводит лишь к приближенному нормальному распределению. Поэтому возникает потребность в изучении поведения оценок на распределениях, считающихся нормальными лишь приближенно, и выявлении оценок, достаточно эффективных на распределениях, несильно отличающихся от нормального. Наиболее распространенной моделью приближенного нормального распределения является распределение, плотность которого имеет вид

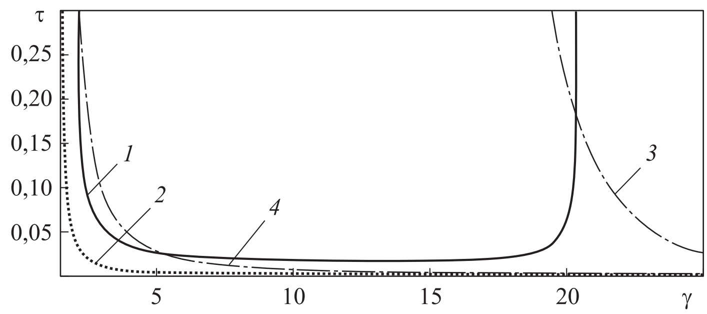
$$f(x) = (1-\gamma)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} + \gamma\frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau}e^{-\frac{x^2}{2\tau^2}}, \quad \tau > 1, \;\; 0 < \gamma < 1.$$

Это распределение называется загрязненным нормальным распределением (*contaminated normal distribution*) и является смесью двух нормальных распределений, в которой с небольшой вероятностью γ дисперсия нормального распределения значительно увеличивается, иногда в несколько раз. Другими словами, если последовательность случайных величин ε_t имеет загрязненное нормальное распределение, то среди ε_t с вероятностью $1-\gamma$ встречаются стандартные (с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией) нормальные величины, а с вероятностью γ — нормальные величины с дисперсией $\tau^2 > 1$. Чем больше γ и τ, тем сильнее загрязненное нормальное распределение отклоняется от нормального.

Распространенной мерой сравнения эффективности двух оценок между собой является асимптотическая относительная эффективность по Питмену, равная обратному отношению их асимптотических дисперсий. Изучим поведение асимптотической относительной эффективности М-оценки первой координаты с ρ-функцией Тьюки по отношению к остальным оценкам на семействе загрязненных нормальных распределений. Другими словами, выясним, как зависит асимптотическая относительная эффективность от γ и τ.

Обозначим через $e(\text{М-Т, М-Х})$, $e(\text{М-Т, ОНК})$ и $e(\text{М, ОНМ})$ асимптотические относительные эффективности М-оценки с ρ-функцией Тьюки по отношению к М-оценке с ρ-функцией Хьюбера, к оценке наименьших квадратов и оценке наименьших модулей соответственно.

Линии уровня $e(\text{М-Т, М-Х}) = 1$ (кривая *1*), $e(\text{М-Т, ОНК}) = 1$ (кривая *2*), $e(\text{М, ОНМ}) = 1$ (кривая *3*) на плоскости (γ, τ) показаны на рисунке. Для сравнения на этом же рисунке приведена линия уровня $e(\text{ОНМ, ОНК}) = 1$ (кривая *4*) асимптотической относительной эффективности оценки наименьших модулей по отношению к оценке наименьших квадратов. При этом множество $\{(\gamma, \tau) : e(\text{М-Т, М-Х}) > 1\}$ находится над кривой *1*, множество $\{(\gamma, \tau) : e(\text{М-Т, ОНК}) > 1\}$ — над кривой *2*, множество $\{(\gamma, \tau) : e(\text{ОНМ, ОНК}) > 1\}$ — над кривой *4*, множество $\{(\gamma, \tau) : e(\text{М-Т, ОНМ}) > 1\}$ — под кривой *3*.



Линии уровня $e(\text{М-Т, М-Х}) = 1$ (*1*), $e(\text{М-Т, ОНК}) = 1$ (*2*), $e(\text{М, ОНМ}) = 1$ (*3*) и $e(\text{ОНМ, ОНК}) = 1$ (*4*) на плоскости (γ, τ)

Типичными на практике считаются 10…15 % загрязнений (т. е. $\gamma \in (0{,}1, 0{,}15)$) уровня $\tau \in (3, 10)$. Заметно, что при $\gamma = 0{,}1$ метод наименьших квадратов уступает М-оценке с ρ-функцией Хьюбера при $\tau > 1{,}7$, которая, в свою очередь, уступает М-оценке с ρ-функцией Тьюки при $\tau > 2{,}42$. Превосходство оценки наименьших модулей над М-оценкой с ρ-функцией Тьюки при $\gamma = 0{,}1$ наступает лишь при $\tau > 21{,}5$. Таким образом, для типичных на практике значений целесообразнее использовать М-оценку с ρ-функцией Тьюки. С возрастанием величины γ преимущество М-оценки с ρ-функцией Тьюки только увеличивается. Так, при $\gamma = 0{,}15$ метод наименьших квадратов уступает М-оценке с ρ-функцией Хьюбера уже при $\tau > 1{,}63$, которая, в свою очередь, уступает М-оценке с ρ-функцией Тьюки при $\tau > 2{,}23$.

Заключение. В типичных ситуациях на практике при оценивании параметров модели пороговой авторегрессии М-оценку с ρ-функцией Тьюки следует предпочесть остальным оценкам, в частности оценке наименьших квадратов и оценке наименьших модулей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Franses P.H., van Dijk D., Opschoor A.* Time series models for business and economic forecasting. Cambridge University Press, 2014. 312 p.

2. *Tong H.* Nonlinear time series: a dynamical approach. Oxford University Press, 1990. 564 p.

3. *Tong H.* Threshold models in time series analysis — 30 years on // Statistics and its Interface. 2011. Vol. 4. No. 2. P. 107–118. DOI: 10.4310/SII.2011.v4.n2.a1

4. *Горяинов В.Б., Горяинова Е.Р.* Робастное оценивание в пороговой авторегрессии // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2017. № 6. С. 19–30.
DOI: 10.18698/1812-3368-2017-6-19-30

5. *Горяинов В.Б., Горяинова Е.Р.* Влияние аномальных наблюдений на оценку наименьших квадратов параметра авторегрессионного уравнения со случайным коэффициентом // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2016. № 2. С. 16–24.
DOI: 10.18698/1812-3368-2016-2-16-24

6. *Горяинов А.В., Горяинова Е.Р.* Сравнение эффективности оценок методов наименьших модулей и наименьших квадратов в авторегрессионной модели со случайным коэффициентом // Автоматика и телемеханика. 2016. № 9. С. 84–95.

7. *Huber P.J., Ronchetti E.M.* Robust statistics. Wiley, 2009. 380 p.

8. *Petruccelli J.D., Woolford S.W.* A threshold AR(1) model // Journal of Applied Probability. 1984. Vol. 21. No. 2. P. 270–286. DOI: 10.2307/3213639

9. *Wang L., Wang J.* The limiting behavior of least absolute deviation estimators for threshold autoregressive models // Journal of Multivariate Analysis. 2004. Vol. 89. Iss. 2. P. 243–260.
DOI: 10.1016/j.jmva.2004.02.006

10. *Häusler E., Luschgy H.* Stable convergence and stable limit theorems. Springer, 2015. 228 p.

11. *Горяинов В.Б., Горяинова Е.Р.* Асимптотические свойства знаковой оценки коэффициентов авторегрессионного поля // Автоматика и телемеханика. 2015. № 3. С. 62–78.

Горяинов Владимир Борисович — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Математическое моделирование» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Горяинова Елена Рудольфовна — канд. физ.-мат. наук, доцент департамента математики на факультете экономических наук Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (Российская Федерация, 101000, Москва, ул. Мясницкая, д. 20).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Горяинов В.Б., Горяинова Е.Р. М-оценки в пороговой авторегрессии // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2018. № 3. С. 13–23.
DOI: 10.18698/1812-3368-2018-3-13-23

MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATION IN THRESHOLD AUTOREGRESSION

V.B. Goryainov[1] vb-goryainov@bmstu.ru
E.R. Goryainova[2] el-goryainova@mail.ru

[1] Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
[2] National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russian Federation

Abstract

The study focuses on robust estimation of the parameters of autoregressive threshold models carried out by means of the maximum likelihood estimation method with an optionally convex objective. We proved the asymptotic normalcy of these estimates and studied their asymptotic relative efficiency with respect to least squares and least absolute deviation estimates and to the maximum likelihood estimation with convex objective

Keywords

Robust estimation, convex objective, maximum likelihood estimation, least squares estimation, least absolute deviation estimation

Received 20.04.2017

REFERENCES

[1] Franses P.H., van Dijk D., Opschoor A. Time series models for business and economic forecasting. Cambridge University Press, 2014. 312 p.

[2] Tong H. Nonlinear time series: a dynamical approach. Oxford University Press, 1990. 564 p.

[3] Tong H. Threshold models in time series analysis — 30 years on. *Statistics and its Interface*, 2011, vol. 4, no. 2, pp. 107–118. DOI: 10.4310/SII.2011.v4.n2.a1

[4] Goryainov V.B., Goryainova E.R. Robust estimation in threshold autoregression. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2017, no. 6, pp. 19–30 (in Russ.). DOI: 10.18698/1812-3368-2017-6-19-30

[5] Goryainov V.B., Goryainova E.R. The influence of anomalous observations on the least squares estimate of the parameter of the autoregressive equation with random coefficient. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2016, no. 2, pp. 16–24 (in Russ.). DOI: 10.18698/1812-3368-2016-2-16-24

[6] Goryainov A.V., Goryainova E.R. Comparison of efficiency of estimates by the methods of least absolute deviations and least squares in the autoregression model with random coefficient. *Automation and Remote Control*, 2016, vol. 77, iss. 9, pp. 1579–1588.
DOI: 10.1134/S000511791609006X

[7] Huber P.J., Ronchetti E.M. Robust statistics. Wiley, 2009. 380 p.

[8] Petruccelli J.D., Woolford S.W. A threshold AR(1) model. *Journal of Applied Probability*, 1984, vol. 21, no. 2, pp. 270–286. DOI: 10.2307/3213639

[9] Wang L., Wang J. The limiting behavior of least absolute deviation estimators for threshold autoregressive models. *Journal of Multivariate Analysis,* 2004, vol. 89, iss. 2, pp. 243–260.
DOI: 10.1016/j.jmva.2004.02.006

[10] Häusler E., Luschgy H. Stable convergence and stable limit theorems. Springer, 2015. 228 p.

[11] Goryainov V.B., Goryainova E.R. Asymptotic properties of the sign estimate of autoregression field coefficients. *Automation and Remote Control*, 2015, vol. 76, iss. 3, pp. 419–432.
DOI: 10.1134/S0005117915030066

Goryainov V.B. — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Department of Mathematical Simulation, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Goryainova E.R. — Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Professor, Faculty of Economic Sciences, Department of Mathematics, National Research University Higher School of Economics (Myasnitskaya ul. 20, Moscow, 101000 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Goryainov V.B., Goryainova E.R. Maximum Likelihood Estimation in Threshold Autoregression. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2018, no. 3, pp. 13–23 (in Russ.).
DOI: 10.18698/1812-3368-2018-3-13-23