УДК 62-50 DOI: 10.18698/1812-3368-2018-3-24-31

О ВЫЧИСЛЕНИИ ПСЕВДООБРАТНОЙ КВАДРАТНОЙ МАТРИЦЫ НА ОСНОВЕ ОБРАЩЕНИЯ

Н.Е. Зубов[1, 2] nezubov@bmstu.ru
Nikolay.Zubov@rsce.ru

Е.А. Микрин[1, 2]
В.Н. Рябченко[1, 2]

[1] **ПАО «РКК «Энергия» им. С.П. Королёва», Королёв, Московская обл., Российская Федерация**
[2] **МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация**

Аннотация

Получены новые формулы вычисления псевдообратной матрицы Мура — Пенроуза для заданной квадратной матрицы. Формулы основаны на преобразовании с помощью обратимой матрицы в виде суммы заданной матрицы и внешнего произведения ее левого и правого делителей нуля. Такое преобразование позволяет использовать для псевдообращения стандартные вычислительные алгоритмы, улучшать обусловленность уравнений при псевдообращении плохо масштабированных матриц, а также выполнять псевдообращение символьных матриц. Приведен пример обращения символьной матрицы невысокого ранга. Рассмотрено множество следствий, вытекающих из теорем, определяющих формулы вычисления псевдообратной матрицы, и описана процедура повышения точности вычислений псевдообратной матрицы

Ключевые слова

Обратная матрица, псевдообратная матрица, формулы вычисления псевдообратной матрицы

Поступила в редакцию 19.01.2017

Исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 14-11-00046)

Введение. Псевдообратная матрица (матрица Мура — Пенроуза) является обобщением понятия обратной матрицы [1, 2]. *Псевдообратной матрицей* $\boldsymbol{A}^+$ к заданной матрице $\boldsymbol{A}$ является матрица, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}; \tag{1}$$

$$\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{A}^+; \tag{2}$$

$$\left(\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A}\right)^* = \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A}; \tag{3}$$

$$\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+\right)^* = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+, \tag{4}$$

где «∗» — операция эрмитова сопряжения для комплексных матриц [1] (в вещественном случае $\mathbb{R}$ — операция транспонирования «т»).

Псевдообращение было независимо описано Э.Х. Муром [3] и Р. Пенроузом [4]. Концепцию псевдообратных интегрирующих операторов в 1903 г. представил Э.И. Фредгольм [5]. Псевдообращение можно понимать как наилучшую аппроксимацию (по методу наименьших квадратов) решения соответствующей системы линейных уравнений [6]. Псевдообращение определено для любых матриц над действительными и комплексными числами [1, 2].

Существует эквивалентный способ задания псевдообратной матрицы через предел обратных [1]:

$$\boldsymbol{A}^{+}=\lim_{\delta\to 0}\left(\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{I}_n\right)\boldsymbol{A}^{*}=\lim_{\delta\to 0}\boldsymbol{A}^{*}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}+\delta\boldsymbol{I}_n\right).$$

В качестве наиболее распространенных методов вычисления псевдообратных матриц используют [1, 2] *скелетное* и *сингулярное* (собственное) разложения матрицы.

В настоящей работе предложены формулы вычисления псевдообратной квадратной матрицы на основе обращения некоторой специальной матрицы. Это позволяет использовать для псевдообращения стандартные алгоритмы, улучшать обусловленность уравнений при псевдообращении плохо масштабированных матриц, а также выполнять псевдообращение символьных матриц, используемых в аналитических матричных задачах.

Формулы псевдообращения на основе обращения невырожденных матриц. Справедливо утверждение.

Теорема 1. *Пусть задана вырожденная квадратная матрица* $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ *ранга* $m<n$, *т. е.*

$$\det\boldsymbol{A}=0,\quad \operatorname{rank}\boldsymbol{A}=m<n,$$

тогда формула псевдообратной матрицы $\boldsymbol{A}^{+}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ *имеет вид*

$$\boldsymbol{A}^{+}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}. \tag{5}$$

Здесь

$$\boldsymbol{T}=\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}_L^{\perp\text{т}}\varphi^{\text{т}}\boldsymbol{A}_R^{\perp\text{т}}\right)^{-1}=\left(\boldsymbol{A}+\left(\boldsymbol{A}_R^{\perp}\varphi\boldsymbol{A}_L^{\perp}\right)^{\text{т}}\right)^{-1} \tag{6}$$

— *неединственная обратимая матрица*;

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_R^{\perp}=0,\quad \operatorname{rank}\boldsymbol{A}_R^{\perp}=n-m; \tag{7}$$

$$\boldsymbol{A}_L^{\perp}\boldsymbol{A}=0,\quad \operatorname{rank}\boldsymbol{A}_L^{\perp}=n-m \tag{8}$$

— *правый и левый делители нуля соответственно* [7]; $\varphi\in\mathbb{R}^{(n-m)\times(n-m)}$ — *произвольная квадратная обратимая матрица.*

Рассмотрим пример обращения символьной матрицы невысокого размера. Пусть

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & c & a \\ b & d & 0 & 0 \\ c & 0 & c & 0 \\ d & 0 & d & 0 \end{pmatrix},\quad \operatorname{rank}\boldsymbol{A}=3. \tag{9}$$

Вычислим для матрицы (9) соответствующие делители нуля. Получим

$$\boldsymbol{A}_L^{\perp}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\dfrac{d}{c} & 1 \end{pmatrix}; \tag{10}$$

$$\boldsymbol{A}_R^{\perp}=\begin{pmatrix} \dfrac{a}{c} & -\dfrac{ab}{cd} & -\dfrac{a}{c} & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{т}}. \tag{11}$$

При этом очевидно, что в (6) $\varphi=1$ и матрица $\boldsymbol{T}=\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}_L^{\perp\mathrm{т}}\boldsymbol{A}_R^{\perp\mathrm{т}}\right)^{-1}$ с внешним произведением векторов (10), (11) будет иметь вид

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & c & a \\ b & d & 0 & 0 \\ c-\dfrac{ad}{c^2} & \dfrac{ab}{c^2} & c+\dfrac{ad}{c^2} & -\dfrac{d}{c} \\ d+\dfrac{a}{c} & -\dfrac{ab}{cd} & d-\dfrac{a}{c} & 1 \end{pmatrix}^{-1}. \tag{12}$$

Выполнение обращения матрицы в (12) и вычисление матричного произведения (5) дает

$$\boldsymbol{A}^{+}=\alpha\begin{pmatrix} -cd^2\left(c^2+d^2\right) & a^2b\left(c^2+d^2\right) & cd^2\left(a^2+c^2\right) & d^3\left(a^2+c^2\right) \\ bcd\left(c^2+d^2\right) & d\left(2a^2+c^2\right)\left(c^2+d^2\right) & -bcd\left(a^2+c^2\right) & -bd^2\left(a^2+c^2\right) \\ -cd^2\left(c^2+d^2\right) & -a^2b\left(c^2+d^2\right) & a^2c\left(b^2+d^2\right) & a^2d\left(b^2+d^2\right) \\ a\left(b^2+2d^2\right)\left(c^2+d^2\right) & abc\left(c^2+d^2\right) & -ac^2\left(b^2+d^2\right) & -acd\left(b^2+d^2\right) \end{pmatrix}, \tag{13}$$

где

$$\alpha=\frac{1}{\left(a^2b^2+2a^2d^2+c^2d^2\right)\left(c^2+d^2\right)}. \tag{14}$$

Матрица (13) удовлетворяет условиям регулярности (1), (2) и симметричности (3), (4) и, следовательно, действительно является псевдообратной матрицей.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия полуортогональности*

$$\boldsymbol{A}_R^{\perp\mathrm{т}}\boldsymbol{A}_R^{\perp}=\boldsymbol{A}_L^{\perp}\boldsymbol{A}_L^{\perp\mathrm{т}}=\varphi^{\mathrm{т}}\varphi=\boldsymbol{I}_{n-m}, \tag{15}$$

тогда формула вычисления псевдообратной матрицы (5) *приобретает следующий вид*:

$$\boldsymbol{A}^{+}=\left(\boldsymbol{A}+\left(\boldsymbol{A}_R^{\perp}\varphi\boldsymbol{A}_L^{\perp}\right)^{\mathrm{T}}\right)^{-1}-\boldsymbol{A}_R^{\perp}\varphi^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_L^{\perp}. \qquad (16)$$

Для простоты, исключая из рассмотрения матрицу φ, вместо (16) запишем уравнение

$$\boldsymbol{A}^{+}=\left(\boldsymbol{A}+\left(\boldsymbol{A}_R^{\perp}\boldsymbol{A}_L^{\perp}\right)^{\mathrm{T}}\right)^{-1}-\boldsymbol{A}_R^{\perp}\boldsymbol{A}_L^{\perp}, \qquad (17)$$

при этом нетрудно получить следующие свойства псевдообратной матрицы.

Следствие 1. *Для заданной вырожденной квадратной матрицы* $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ *ранга* $m<n$ *справедливы соотношения:*

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\left(\boldsymbol{A}^{+}+\boldsymbol{A}_R^{\perp}\boldsymbol{A}_L^{\perp}\right)^{-\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}_R^{\perp}\boldsymbol{A}_L^{\perp};$$

$$\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}_R^{\perp}\boldsymbol{A}_R^{\perp\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}_n;$$

$$\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_R^{\perp}\boldsymbol{A}_R^{\perp\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{+}=\boldsymbol{A}_L^{\perp\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_L^{\perp};$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{+}+\boldsymbol{A}_L^{\perp\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_L^{\perp}=\boldsymbol{I}_n;$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{+}-\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_R^{\perp}\boldsymbol{A}_R^{\perp\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}_L^{\perp\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_L^{\perp};$$

$$\operatorname{trace}\left(\boldsymbol{A}_R^{\perp}\boldsymbol{A}_R^{\perp\mathrm{T}}\right)=\operatorname{trace}\left(\boldsymbol{A}_L^{\perp\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_L^{\perp}\right)=\operatorname{rank}\boldsymbol{A};$$

$$\boldsymbol{A}_R^{\perp\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}_L^{\perp\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_R^{\perp\mathrm{T}}\right)^{-1}\boldsymbol{A}_L^{\perp\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}_{n-m}.$$

Вернемся к матрице (9) и вычислим полуортогональные делители нуля:

$$\boldsymbol{A}_L^{\perp}=\begin{pmatrix}0 & 0 & -\dfrac{d}{c\sqrt{d^2c^{-2}+1}} & \dfrac{1}{c\sqrt{d^2c^{-2}+1}}\end{pmatrix}; \qquad (18)$$

$$\boldsymbol{A}_R^{\perp}=\frac{d}{\sqrt{a^2b^2+2a^2d^2+c^2d^2}}\begin{pmatrix}a\\ -\dfrac{ab}{d}\\ -a\\ 1\end{pmatrix}. \qquad (19)$$

Далее, используя формулу (17), где делители нуля имеют вид (18), (19), получаем псевдообратную матрицу (13).

Симметрический алгоритм. Известно следующее свойство для псевдообратных матриц [2]:

$$\boldsymbol{A}^{+}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{+}=\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right)^{+}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}. \qquad (20)$$

Свойство (20) позволяет преобразовать формулу для псевдообратной матрицы (16) к симметрическому виду.

Следствие 2. *Пусть* $\boldsymbol{A}^{+}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{т}}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{т}}\right)^{+}$, *тогда*

$$\boldsymbol{A}^{+}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{т}}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{т}}+\boldsymbol{A}_{L}^{\perp\mathrm{т}}\boldsymbol{A}_{L}^{\perp}\right)^{-1}. \tag{21}$$

Следствие 3. *Пусть* $\boldsymbol{A}^{+}=\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{т}}\boldsymbol{A}\right)^{+}\boldsymbol{A}^{\mathrm{т}}$, *тогда*

$$\boldsymbol{A}^{+}=\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{т}}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}_{R}^{\perp}\boldsymbol{A}_{R}^{\perp\mathrm{т}}\right)^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{т}}. \tag{22}$$

Формулы (21), (22) также можно получить на основе обращения Ботта — Даффина (Bott — Duffin inverse) [8].

Предобусловливание матрицы. В целях уменьшения влияния ошибок в исходных данных, повышения точности решения, а также ускорения сходимости вычислительных методов используют различные алгоритмы, обеспечивающие масштабирование, регуляризацию, балансировку и др. (см. [9, 10]).

Формула (16) может быть использована для повышения точности вычислений. Нетрудно показать, что при любом числе $\rho\neq 0$ справедливо равенство

$$\frac{1}{\rho}\boldsymbol{A}^{+}=\left(\rho\boldsymbol{A}+\left(\boldsymbol{A}_{R}^{\perp}\boldsymbol{A}_{L}^{\perp}\right)^{\mathrm{т}}\right)^{-1}-\boldsymbol{A}_{R}^{\perp}\boldsymbol{A}_{L}^{\perp}. \tag{23}$$

Поскольку ранее предполагалось выполнение тождества полуортогональности делителей нуля (15), имеет место тождество

$$\boldsymbol{A}_{R}^{\perp\mathrm{т}}\boldsymbol{A}_{R}^{\perp}=\boldsymbol{A}_{L}^{\perp}\boldsymbol{A}_{L}^{\perp\mathrm{т}}=\boldsymbol{I}_{n-m} \tag{24}$$

и, следовательно, выполняются тождества для матричных норм [1, 2]

$$\left\|\boldsymbol{A}_{L}^{\perp}\right\|=\left\|\boldsymbol{A}_{R}^{\perp}\right\|=1;\ \left\|\boldsymbol{A}_{R}^{\perp}\boldsymbol{A}_{L}^{\perp}\right\|=1.$$

В этом случае целесообразно принять $\rho=\|\boldsymbol{A}\|^{-1}$ и тогда формула (23) приобретет вид

$$\|\boldsymbol{A}\|\boldsymbol{A}^{+}=\left(\frac{1}{\|\boldsymbol{A}\|}\boldsymbol{A}+\left(\boldsymbol{A}_{R}^{\perp}\boldsymbol{A}_{L}^{\perp}\right)^{\mathrm{т}}\right)^{-1}-\boldsymbol{A}_{R}^{\perp}\boldsymbol{A}_{L}^{\perp},$$

или

$$\boldsymbol{A}^{+}=\frac{1}{\|\boldsymbol{A}\|}\left(\left(\frac{1}{\|\boldsymbol{A}\|}\boldsymbol{A}+\left(\boldsymbol{A}_{R}^{\perp}\boldsymbol{A}_{L}^{\perp}\right)^{\mathrm{т}}\right)^{-1}-\boldsymbol{A}_{R}^{\perp}\boldsymbol{A}_{L}^{\perp}\right).$$

При этом очевидно выполняется неравенство для чисел обусловленности

$$\operatorname{cond}\left(\frac{1}{\|\boldsymbol{A}\|}\boldsymbol{A}+\left(\boldsymbol{A}_{R}^{\perp}\boldsymbol{A}_{L}^{\perp}\right)^{\mathrm{т}}\right)\leq\operatorname{cond}\left(\boldsymbol{A}+\left(\boldsymbol{A}_{R}^{\perp}\boldsymbol{A}_{L}^{\perp}\right)^{\mathrm{т}}\right).$$

Заключение. Для заданной квадратной матрицы получены новые формулы вычисления псевдообратной матрицы Мура — Пенроуза, которые основаны на преобразовании с помощью обратимой матрицы в виде суммы заданной матрицы и внешнего произведения ее левого и правого делителей нуля. Такое преобразование дает возможность использовать для псевдообращения стандартные вычислительные алгоритмы, улучшать обусловленность уравнений при псевдообращении плохо масштабированных матриц, а также выполнять псевдообращение символьных матриц.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. 320 с.

2. *Bernstein D.S.* Matrix mathematics. Princeton University Press, 2005. 768 p.

3. *Moore E.H.* On the reciprocal of the general algebraic matrix // Bulletin of the American Mathematical Society. 1920. No. 26. P. 394–395.

4. *Penrose R.* A generalized inverse for matrices // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1955. Vol. 51. No. 3. P. 406–413.

5. *Fredholm E.I.* Sur une classe d'équations fonctionnelles // Acta Mathematica. 1903. Vol. 27. Iss. 1. P. 365–390. DOI: 10.1007/BF02421317

6. *Алберт А.* Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1977. 224 с.

7. *Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Рябченко В.Н.* Матричные методы в теории и практике систем автоматического управления летательных аппаратов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016. 667 с.

8. *Yonglin Ch.* The generalized Bott — Daffin inverse and its application // Linear Algebra and its Application. 1990. Vol. 134. P. 71–91. DOI: 10.1016/0024-3795(90)90007-Y

9. *Голуб Дж., Ван Лоун Ч.* Матричные вычисления. М.: Мир, 1999. 548 с.

10. *Икрамов Х.Д.* Численное решение матричных уравнений. М.: Наука, 1984. 192 с.

Зубов Николай Евгеньевич — д-р техн. наук, заместитель руководителя по науке научно-технического центра ПАО «РКК «Энергия» им. С.П. Королёва» (Российская Федерация, 141070, Московская обл., Королёв, ул. Ленина, д. 4А), профессор кафедры «Системы автоматического управления» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Микрин Евгений Анатольевич — академик РАН, д-р техн. наук, генеральный конструктор ПАО «РКК «Энергия» им. С.П. Королёва» (Российская Федерация, 141070, Московская обл., Королёв, ул. Ленина, д. 4А), заведующий кафедрой «Системы автоматического управления» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Рябченко Владимир Николаевич — д-р техн. наук, ведущий научный сотрудник научно-технического центра ПАО «РКК «Энергия» им. С.П. Королёва» (Российская Федерация, 141070, Московская обл., Королёв, ул. Ленина, д. 4А), профессор кафедры «Системы автоматического управления» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Рябченко В.Н. О вычислении псевдообратной квадратной матрицы на основе обращения // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2018. № 3. С. 24–31. DOI: 10.18698/1812-3368-2018-3-24-31

ON CALCULATION OF PSEUDOINVERSE SQUARE MATRIX BASED ON INVERSION

N.E. Zubov[1, 2] nezubov@bmstu.ru
Nikolay.Zubov@rsce.ru

E.A. Mikrin[1, 2]
V.N. Ryabchenko[1, 2]

[1] **S.P. Korolev Rocket and Space Corporation Energia, Korolev, Moscow Region, Russian Federation**
[2] **Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation**

Abstract

The paper focuses on the new formulae obtained for calculation of the Moore — Penrose pseudoinverse matrix for a given quadratic matrix. The formulae are based on conversion as a sum of the given matrix and the exterior product of its left and right zero divisors by means of the inverse matrix. Such conversion allows us to use the standard calculation algorithms for pseudoinversion, improve equation conditionality in the case of badly scaled matrix pseudoinversion and complete pseudoinversion of symbolic matrixes. The paper exemplifies inversion of a low rank symbolic matrix. Finally, the set of corollaries from the theorems defining the pseudoinverse matrix calculation formulae is considered and a procedure of improving calculation accuracy of the pseudoinverse matrix is described

Keywords

Inverse matrix, pseudoinverse matrix, pseudoinverse matrix calculation formulae

Received 19.01.2017

The research was supported by a grant from the Russian Science Foundation (project no. 14-11-00046)

REFERENCES

[1] Voevodin V.V., Kuznetsov Yu.A. Matritsy i vychisleniya [Matrices and calculations]. Moscow, Nauka Publ., 1984. 320 p.

[2] Bernstein D.S. Matrix mathematics. Princeton University Press, 2005. 768 p.

[3] Moore E.H. On the reciprocal of the general algebraic matrix. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1920, no. 26, pp. 394–395.

[4] Penrose R. A generalized inverse for matrices. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1955, vol. 51, no. 3, pp. 406–413.

[5] Fredholm E.I. Sur une classe d'équations fonctionnelles. *Acta Mathematica*, 1903, vol. 27, iss. 1, pp. 365–390. DOI: 10.1007/BF02421317

[6] Albert A. Regression and the Moore — Penrose pseudoinverse. Academic Press, 1972. 180 p.

[7] Zubov N.E., Mikrin E.A., Ryabchenko V.N. Matrichnye metody v teorii i praktike sistem avtomaticheskogo upravleniya letatel'nykh apparatov [Matrix methods in theory and practice of automatic control systems of aircraft]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2016. 667 p.

[8] Yonglin Ch. The generalized Bott — Daffin inverse and its application. *Linear Algebra and its Application*, 1990, vol. 134, pp. 71–91. DOI: 10.1016/0024-3795(90)90007-Y

[9] Golub G.H., Van Loan Ch.F. Matrix computations. Johns Hopkins University Press, 2012. 784 p.

[10] Ikramov Kh.D. Chislennoe reshenie matrichnykh uravneniy [Numerical solution of the matrix equations]. Moscow, Nauka Publ., 1984. 192 p.

Zubov N.E. — Dr. Sc. (Eng.), Deputy Director for Science, Research and Development Center, S.P. Korolev Rocket and Space Corporation Energia (Lenina ul. 4A, Korolev, Moscow Region, 141070 Russian Federation), Professor, Department of Automatic Control Systems, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Mikrin E.A. — Academician of the Russian Academy of Sciences, Dr. Sc. (Eng.), General Designer of S.P. Korolev Rocket and Space Corporation Energia (Lenina ul. 4A, Korolev, Moscow Region, 141070 Russian Federation), Head of the Department of Automatic Control Systems, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Ryabchenko V.N. — Dr. Sc. (Eng.), Leading Researcher of Research and Development Center, S.P. Korolev Rocket and Space Corporation Energia (Lenina ul. 4A, Korolev, Moscow Region, 141070 Russian Federation), Professor, Department of Automatic Control Systems, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Zubov N.E., Mikrin E.A., Ryabchenko V.N. On Calculation of Pseudoinverse Square Matrix Based on Inversion. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2018, no. 3, pp. 24–31 (in Russ.).
DOI: 10.18698/1812-3368-2018-3-24-31